VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

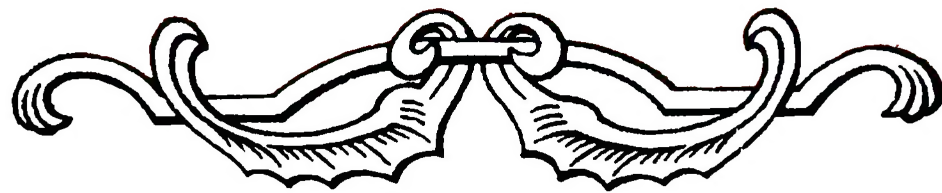
АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

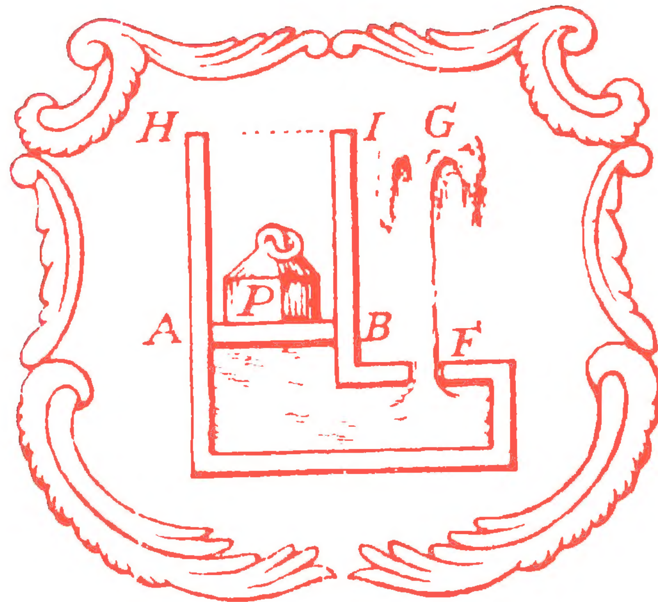
КЛАССИКИ НАУКИ



DANIELIS BERNOULLI

HYDRODYNAMICA
SIVE DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII





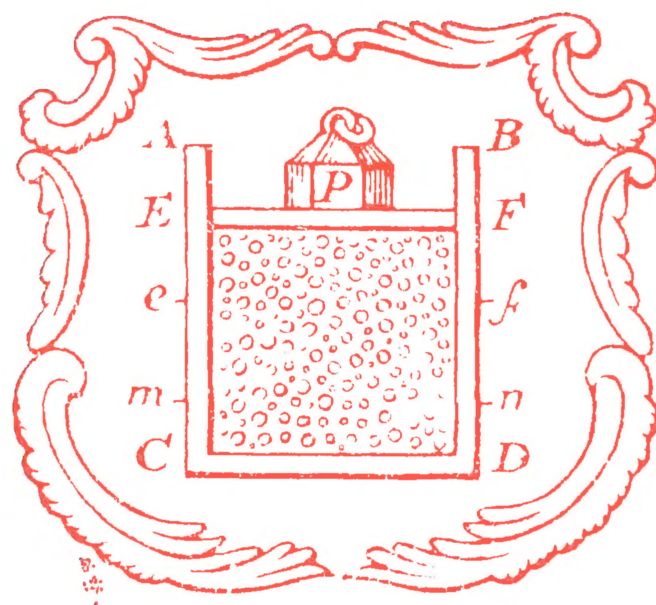
EX OFFICINA ACADEMIAE SCIENTIARUM FRSS

MCMLIX

ДАНИИЛ БЕРНУЛЛИ

ГИДРОДИНАМИКА
ИЛИ ЗАПИСКИ О СИЛАХ И ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТЕЙ

ПЕРЕВОД В. С. ГОХМАНА
КОММЕНТАРИИ И РЕДАКЦИЯ
АКАДЕМИКА А. И. НЕКРАСОВА
И ПРОФЕССОРА К. К. БАУМГАРТА
СТАТЬЯ АКАДЕМИКА В. И. СМИРНОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1959

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

основана академиком *С. И. Вавиловым*

Редакционная коллегия: академик *И. Г. Петровский* (председатель), академик *Н. Н. Андреев*, академик *К. М. Быков*, академик *Б. А. Казанский*, академик *О. Ю. Шмидт*, академик *Д. И. Щербаков*, академик *П. Ф. Юдин*, член-корреспондент АН СССР *Б. Н. Делоне*, член-корреспондент АН СССР *Х. С. Коштоянц*, член-корреспондент АН СССР *А. М. Самарин*, профессор *Д. М. Лебедев*, профессор *Н. А. Фигуровский*, кандидат философских наук *И. В. Кузнецов* (заместитель председателя).


ГИДРОДИНАМИКА * ДАНИИЛ БЕРНУЛЛИ *



ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 9

Часть первая

являющаяся вступлением и содержащая в себе различные предварительные замечания 11

Часть вторая

в которой речь идет о покоящихся жидкостях и об их равновесии как по отношению друг к другу, так и по отношению к другим силам 35

Часть третья

О скоростях жидкостей, вытекающих из любым образом устроенного сосуда через любое отверстие 54

Часть четвертая

О различных временах, которые могут быть затрачены на вытекание воды 95

Часть пятая

О движении вод из постоянно заполненных сосудов 133

Часть шестая

О движении жидкостей, движущихся внутри сосудов, не вытекая из них, и в особенности о колебаниях жидкостей 161

Часть седьмая

О движении вод в погруженных сосудах, где главным образом на примерах показывается, сколь замечательно полезно начало сохранения

живых сил даже в тех случаях, когда следует считать, что кое-что из этих сил теряется 179

Часть восьмая

О движении жидкостей, как однородных, так и неоднородных, через сосуды неправильной и прерывистой формы, где на основе теории живых сил, часть которых постоянно поглощается, изъясняются преимущественно особые явления жидкостей, выбрасываемых через весьма многие отверстия, причем предпосылаются общие законы для определения повсюду движения жидкостей 203

Часть девятая

О движении жидкостей, выбрасываемых не собственной тяжестью, а посторонней силой, преимущественно о гидравлических машинах с наивысшей, какая лишь может существовать, степенью их совершенства 231

Часть десятая

О свойствах и движениях упругих жидкостей, в особенности воздуха 282

Часть одиннадцатая

О жидкостях, приведенных в состояние вихря, а затем о жидкостях, которые содержатся в движущихся сосудах 342

Часть двенадцатая

в которой излагается новая статика движущихся жидкостей, которую я называю гидравлико-статикой 359

Часть тринадцатая

О реакции жидкостей, вытекающих из сосудов, об измерении эффекта, который можно отсюда получить для навигации, и вместе с тем изложение новой теории определения давления вытекающих жидкостей на плоскости, на которые они попадают 389

ПРЕДИСЛОВИЕ



Наконец, выходит в свет наша «Гидродинамика» [1], после того как были преодолены все препятствия, задержавшие ее напечатание в течение почти восьми лет; возможно, что ей и не привелось бы увидеть света, если бы вся эта работа пришлась исключительно на мою долю. Я охотно объявляю, что главнейшая часть этой работы обязана руководству, замыслам и поддержке со стороны Петербургской Академии наук. Повод для написания этой книги дало постановление Академии, в котором первых профессоров, собравшихся для ее создания, обязали и затем определенно побуждали, чтобы они писали рассуждения на какую-нибудь полезную и, насколько возможно, новую тему. Всякий легко согласится с тем, что теория о силах и движениях жидкостей, если только она не создана против воли Минервы [2], не является ни бесполезной, ни тривиальной. Для того чтобы рассеять скуку у читателя, я подверг рассмотрению разнообразные вопросы, в особенности в последних пяти частях, а также включил примеры аналитические, физические, механические, как теоретические, так и практические, некоторые геометрические, мореходные, астрономические и иные. Введение таких примеров представляется мне не только допустимым, но прямо вытекающим из существа предпринятой работы. Беспристрастный и сведущий в этих вопросах читатель легко исправит ошибки, которые могли проскочить при спешке. Настоящая моя работа преследует единственную цель: принести пользу Академии, все усилия которой направлены к тому, чтобы содействовать росту и общественной пользе благих наук.



ГИДРОДИНАМИКИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

являющаяся вступлением и содержащая в себе различные предварительные замечания

§ 1. Так как теория жидкостей состоит из двух частей, из которых одна, гидростатика, рассматривает давление и различные случаи равновесия покоящихся жидкостей, а другая, гидравлика, рассматривает движения жидкостей. то обычно писатели трактуют их отдельно; но я нашел, что они связаны между собой столь тесной связью, что каждая из них очень нуждается в помощи со стороны другой, и я не усумнился их соединить, поскольку этого требует порядок вещей, под более общим названием гидродинамики [3]. Хотя теория жидкостей непрерывно разрабатывалась уже с древнейших времен, тем не менее она не получила значительного развития. Действительно, познания древних математиков ограничивались тем, что они понимали общее равновесие покоящихся жидкостей или твердых тел и жидкостей, в которых тела пребывают, о чем писал Архимед. И так как сверх того само по себе ясно, что там, где нет равновесия, возникает движение в направлении места меньшего давления, то, исходя из этого, древние математики сумели придумать различные игрушки и гидравлические машины, отлично служившие частью для увеселения, частью для общественных нужд, и в этом деле они действительно оказались весьма изобретательными. Они представляли себе также, хотя не совсем ясно, те движения, которые вызываются давлением воз-

духа. Однако об истинных причинах явлений и точных измерениях в области гидравлических вопросов они ничего не знали и, таким образом, оставались почти на пороге науки.

§ 2. Для определения движения жидкостей служило главным образом вытекание воды из сосуда через очень малое отверстие. Хотя от внимания Фронтина [4] и других полностью не ускользнуло, как некоторые это полагают, что скорость вод, вытекающих из сосуда или из водоема, растет при увеличении высоты воды над местом вытекания, тем не менее нельзя отрицать того, что тот же Фронтин при исчислении коэффициентов расхода вод допустил постыдные и грубые ошибки. Бенедикт Кастелли [5] первый размышлял о связи между скоростями и высотами, но он предположил неправильный закон, полагая, что обе они следуют одному и тому же отношению. Наконец, Торичелли [6] заметил, что скорости растут в отношении квадратных корней из высот, за ним последовали все. Правда, к соглашению об абсолютной мере скорости еще не пришли, но поставили опыты, которые, как полагали, определят указанную меру; из них обычно больше всего ссылаются на опыт, который был произведен Гульельмином [7] и затем восемь раз был повторен, хотя он сильно расходится с другими опытами, выполненными с этого времени; но все опыты, проводимые при неодинаковых обстоятельствах, обычно расходятся между собой, и не всегда оказывается надежным судить о скорости воды по количеству ее, вытекающему за определенное время через определенное отверстие; более подробно мы скажем об этом в надлежащем месте. Если мы произведем расчет Гульельминова опыта, о котором мы только что упомянули, то на основании количества воды, вытекшей через данное отверстие в течение заданного времени, пришлось бы заключить, что скорость ее была не выше той, какая соответствует четвертой части высоты поверхности воды над отверстием. У того же автора имеются и другие опыты, изложенные во второй книге, предл. 1, «Измерений текущих вод». Согласно этим опытам, вытекающая вода могла бы со своей скоростью подняться на две трети высоты уровня воды над отверстием. У Мариотта [8] и у других

DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.

HYDRODYNAMICA,

SIVE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.

OPUS ACADEMICUM

AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.

Bibliothecae Mathematicae Collegii S. J. ad S. Clementem 1749



ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CC XXXVIII.

Typis JOH. HENR. DECKERI, Typographi Basiliensis.

Титульный лист «Гидродинамики» Д. Бернулли.

ДАНИИЛА БЕРНУЛЛИ, сына Иоганна
проф. мед. в Базеле,
ранее ордин. проф. высшей математики, ныне члена и почетн. проф. имп. Петербургской Академии наук

ГИДРОДИНАМИКА

или

ЗАПИСКИ О СИЛАХ И ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТЕЙ

Академический труд, составленный автором в период пребывания его в Петербурге

Страсбург
ИЗДАНИЕ ИОГАННА РЕЙНГОЛЬДА ДУЛЬЗЕККЕРА
1738

В типографии Иоганна Генриха Деккера, Базельского типографа

имеются опыты, которые говорят в пользу половины высоты. Несмотря на различие оцененных таким образом скоростей, я уверен, что истинные скорости едва ли отличаются друг от друга, если их отнести к соответственным высотам воды, и что повсюду они были приблизительно такими, какие соответствуют всей высоте. Но те многочисленные опыты, которые были упомянуты последними и которые на первый взгляд говорят как будто в пользу половины высоты, без сомнения побудили Ньютона, мужа бессмертного по своим заслугам, создать теорию, по которой вода, поднимающаяся вертикально вверх из сосуда через очень малое отверстие, может подняться на половину высоты воды, покоящейся в сосуде, хотя это утверждение и противоречит всем опытам, произведенным непосредственно для определения этих высот. Эту теорию он изложил в первом издании «Математических начал естественной философии» [9], выведя ее из давления, приводящего в движение воду, которая находится перед самым отверстием и как раз должна выйти наружу. Но так как существо дела не всегда позволяет a priori определить силу, побуждающую воду к вытеканию, а скорее о ней можно составить себе представление иным путем, а именно на основании явлений движения, т. е. a posteriori, в чем я неоднократно убеждался, то рассуждение, основанное на указанном положении, внушает подозрение. Во втором издании своего труда прославленный муж изменил свое мнение, а затем несколько изменил его и в третьем издании, утверждая, что вода поднимается, конечно, на всю высоту, но образуемая ею струя перед отверстием [10] сжимается или утончается, удовлетворяя таким образом как явлению скорости, так и явлению количества вытекающей за заданное время воды, которые, как казалось, находились во взаимном противоречии. Но хотя нельзя отрицать того, что упомянутое выше сжатие водяной струи является истинной причиной, вследствие которой нельзя о скорости вытекающей воды судить на основании ее количества, тем не менее я полагаю, что нельзя строить теории, основываясь на явлении сжатия, так как оно является случайным, не везде постоянным, между тем как скорость изменяется

лишь от постоянных причин, как трение, вязкость воды и иных, им подобных [11]. Так, если вода вытекает не через простое отверстие, а через цилиндрическую трубку, то струя заметно не сжимается и скорость сохраняется, за исключением того, что у нее отнимается вследствие трения. Если же кто-нибудь, несмотря на это, полагает, что течение воды можно правильно и надежно вывести из давления, то я попрошу его обратить внимание на более сложные случаи, например на истечение вод из сосуда, разделенного с помощью некоторой перегородки с просверленным в ней отверстием на две полости, заполняемые водою, так что воду заставляют протекать через два отверстия. Это движение, которое Мариотт назвал удивительным, описано им в превосходном трактате «О движении вод» (часть IV, стр. 442).

§ 3. При указанных выше обстоятельствах всякий легко сам рассудит, насколько мало остается надежды на то, чтобы когда-нибудь законы движения жидкостей были сведены к законам чистой геометрии без какой-либо физической гипотезы, если на самом пороге их изучения они ускользнули от прозорливости мужа всесильного и несравненного по своим способностям; я и не думаю, чтобы то, что я собираюсь изложить в настоящей работе, обладает всей строгостью математических рассуждений. Начала настоящей теории являются физическими, и не без некоторого преувеличения их следует считать приблизительно верными; но если принять эти начала, то все станет геометрическим, не нуждающимся в каких-либо ограничениях и связанным между собой необходимой связью. Но я не могу не быть хорошего мнения об этих физических положениях, к которым я случайно пришел, так как они навели меня на открытие множества новых свойств, относящихся как к равновесию, так и к движению жидкостей, которые, если только меня не вводит в заблуждение пристрастие к предпринятой работе, когда-нибудь чрезвычайно подвинут вперед гидродинамику, если их разработают больше, чем это удалось мне. Так как многим все новое обычно представляется сомнительным, здесь будет уместно отметить, что я продумал всю теорию, написал трактат и бóльшую часть его в част-

ном порядке сообщил друзьям, а кое-что доложил и на заседаниях Академии раньше, чем поставить какой-либо опыт; я сделал это для того, чтобы не впасть в ошибку вследствие предвзятости в измерениях из-за предположения неправильного, хотя и удовлетворяющего приблизительно измерениям. Ведь даже прозорливейшие мужи, ознакомившись с моими теоремами, открыто признавались, что они не могут убедить себя в их правильности и не думают, чтобы эти теоремы можно было подтвердить на опыте. После того как все эти предосторожности были приняты, я, наконец, произвел опыты в присутствии друзей, и эти опыты оказались в таком согласии с моей теорией, что я лично не мог и рассчитывать на него. А теперь вернемся к тому, от чего мы отклонились.

§ 4. После того как авторам стало известно о различии скоростей при изменении высот, они стали рассматривать более сложные сосуды, а именно составленные из различно наклоненных и неодинаковой ширины труб. Свойства же последних в свое время до некоторой степени установил Фронтин. Фронтин хорошо знал, что коэффициент расхода труб увеличивается с покатостью или низким положением стакана, т. е. определенной трубы, которая вставлялась в родник, а иногда и в реку; в силу этого он также указывал, что эти стаканы следует устраивать, как он выражается, по линии и располагать на равной высоте. Исходя именно из этого, некоторые неправильно обвиняли Фронтина в том, что он совершенно не принимал в расчет скорости. Я не вижу, каким образом он мог бы обойтись без учета скорости при своих вычислениях всей полученной воды и сравнивать ее количество с водой, которая израсходована. Путем опыта он также установил, и это заслуживает быть отмеченным, что через стакан установленного размера, а также положения расходуется воды больше должного, если к нему тут же присоединяются трубы большего коэффициента расхода.

Что это так и есть и что указание Фабретти [12] правильно, я покажу в своем месте, хотя проницательнейшие в иных отношениях мужи и указывали, что для них это не было достаточно ясно или даже больше, что они в этом сомневаются.

§ 5. То, что древние видели нечетко и без истинных мер, только Гульельмин, наконец, выразил в трактате «Об измерении текущих вод» в виде следующего более точного и общего утверждения: скорость воды, текущей по наклонной трубе, тождественна с той, какую она имела бы, если бы вытекала из сосуда через схожее и равное по сечению отверстие, отстоящее от поверхности на столько же, на сколько сечение в наклонной трубе отстоит от горизонтали, проведенной через стакан. Против этого предложения возражал Дени Папин [[13]]. Однако его возражения далеки от истины. Но поскольку мы занялись теперь пересмотром всех важнейших идей, как гидростатических, так и гидравлических, в настоящем месте следует еще указать на определение давления жидкостей по их натиску, а именно, что сила давления жидкости, обрушивающейся с заданной скоростью под прямым углом на поверхность, равна весу построенного на этой поверхности цилиндра жидкости, высота которого такова, что, падая с нее свободно из состояния покоя, движущееся тело приобретает скорость жидкости. С помощью этого весьма полезного вывода можно оценить силу жидкостей, приводящих в движение машины, или ветра, двигающего корабли, движение тел в сопротивляющихся средах и многое иное. Но я исключаю из рассмотрения ту особенную гидростатику, которая обнаруживается в очень тонких или капиллярных трубках, так как до настоящего времени она не могла быть сведена к общим законам, одинаковым для всех жидкостей. Кроме того, неизвестен автор, который впервые заметил особенности этих трубок; известно, однако, что это наблюдение является новейшим, так как в книгах, изданных ранее 70-х или 80-х годов XVII в., о нем ничего не упоминается.

§ 6. Помимо вышеупомянутых, более знаменитыми авторами по вопросам жидкостей со времен Галилея являются Торичелли, Борелли, Вивиани, Паскаль, Бойль, а в позднейший период Ва-

риньон, Ньютон, Полени, Германн, Яков и Иоганн Бернулли [14], открытия которых помещены в «Комментариях королевской Академии наук в Париже», «Математических началах естественной философии», в трактате «Об источниках» и в примечаниях к Фронтину, в «Форономии» и в трудах ученых, издаваемых в Лейпциге, и в различных других трудах. Что же касается искривлений, получающихся в результате давления жидкости, и других подобного рода открытий, сделанных математиками, то я их — равно, как и все прочее, достойное похвалы, — обхожу молчанием вследствие того, что они легко сводятся к чистой геометрии.

После изложения того, что относится к другим авторам, я считаю правильным показать основания моих исследований и откровенно высказать свое мнение, можно ли или должно ли ждать от них каких-либо приобретений для гидродинамики и в какой мере. Итак, насколько смогу кратко, я изложу основные пункты предпринятого мною труда.

§ 7. Сначала в нем излагаются важнейшие теоремы, касающиеся равновесия покоящихся жидкостей. Мне казалось, что этого требует смысл начинания, хотя я охотно признаю, что в этой области не представил никаких новых предложений. Правда, способ их доказательства, насколько я знаю, является моим собственным, но так как нетрудно придумать для себя бесчисленное множество доказательств, то я считаю это делом незначительным даже в той части, которую я приписываю себе. Сверх того, попутно рассматриваются некоторые явления в капиллярных трубках и, наконец, в связи с давлением, производимым жидкими телами на стенки сосуда, даются различные и в том числе некоторые новые теоремы, касающиеся формы пузырей [15], наполненных жидкостью, их способности поднимать тяжести, устройства и крепости водопроводов и других смежных вопросов.

§ 8. Затем речь идет о движении жидкостей, вытекающих из сосуда. Тогда как все, занимавшиеся до сих пор этим вопросом, рассматривали в своей теории лишь один наиболее частый слу-

чай, когда отверстие принимается бесконечно малым по сравнению с внутренним сечением сосуда, наша теория не в малой степени дает обобщение, а именно, она применима к отверстиям любого размера и сосудам любой формы. Когда отверстие сосуда можно рассматривать как бесконечно малое, внутренняя форма сосуда играет малую роль. Однако без знания формы сосуда нельзя определить движение воды в том случае, когда отверстие имеет значительный размер. Из общей теории выводятся следствия, которые отлично объясняют переменное движение вод и их состояние и подтверждают все то, чему нас научил опыт, либо на что, очевидно, указывают самые обстоятельства дела. Правда, теория учит, что когда внутренние сечения даже умеренно превосходят сечение отверстия, то ошибка, проистекающая от того, что отверстие принято бесконечно малым, является неощутимой; таким образом, наши добавления покажутся, быть может, некоторым в достаточной мере бесполезными. Этим лицам, если только таковые в будущем найдутся, я предложил бы обратить внимание на то, что я пишу не только для исследователей в области гидравлики, но и для геометров, до сих пор наслаждающихся только чистыми истинами, и что наши исследования получают очень широкое применение в ряде других вопросов; это станет более понятным, если учесть, что всякое движение, начинаясь с покоя, проходит через бесчисленные ступени раньше, чем получает определенную скорость. Зачастую очень большие изменения происходят в столь короткие моменты времени, что мы их никоим образом не можем воспринять чувствами, но тем не менее их следует определить в отдельные моменты времени как для того, чтобы правильно представить себе движение, так и потому, что отсюда могут быть выведены различные теоремы. Ограничусь одним примером, касающимся важного случая. Я обратил внимание на невозможность определения давления воды, протекающей по трубе с заданной скоростью, на ее стенки, если только не будут постигнуты умом те изменения, которые я назвал бы мгновенными, как бы они ни были недоступны чувственному восприятию. Разобравшись в них впервые, я к своему удоволь-

ствию мог прибавить новую часть теории жидкостей, которую мне казалось лучше всего назвать гидравлико-статической, так как она одновременно рассматривает как движение, так и давление жидкостей. После этого мною излагаются примеры этой общей теории, касающиеся цилиндрических сосудов как простых, так и тех, которые снабжены трубами, а для этих последних определяются главным образом изменения, происходящие от начала течения до тех пор, пока достигается заданная степень скорости, причем это делается в предположении очень широких сосудов; следует при этом отметить, что эти изменения очень заметны, хотя бы сосуды были бесконечно широкими, и что их можно показать на опытах, поскольку воды, вытекающие из очень широкого сосуда через простое отверстие без трубы, уже в первое мгновение обладают всей той скоростью, какую они могут иметь. Вышеуказанные изменения зависят как от длины, так и от формы трубы.

Далее мною прилагаются и аналитические вычисления для определения различного рода времен вместе с относящимися сюда физическими пояснениями. Наконец, после изложения теории невозможности того, чтобы воды поднялись намного выше верхней поверхности бьющего ключа, в заключение этой части доказывается, что к нашим допущениям не имеет отношения то особенное явление, которое я сам зачастую наблюдал и которое по желанию могу воспроизвести, о каковом имеется указание в «Истории королевской Академии наук в Париже» за 1702 г., где сообщается, что в фонтанах во́ды иногда поднимаются на утроенную или даже на учетверенную высоту по сравнению с той, какая соответствует верхней поверхности воды; однако вскоре затем огромный скачок воды уменьшается до обычной высоты. После этого нами приводится и истинная причина этого явления, и правильные размеры, полученные из нашей теории, и указывается способ воспроизведения необычного скачка и даже, по желанию, его увеличения [16].

§ 9. Затем теория распространяется на исследование движений из постоянно наполненных сосудов, т. е. из сосудов, в ко-

торые все время подливается столько же воды, сколько из них вытекает. Их особенность заключается главным образом в том, что вытекающие жидкости все больше и больше приближаются к той степени скорости, которая соответствует полной высоте поверхности жидкости над отверстием, однако никогда полностью ее не достигает, разве только спустя бесконечное время. Но при этом доказывается, что воды стремятся к указанной выше скорости столь быстро, что уже спустя неощутимо короткое время они получают почти всю скорость, если только они не проносятся по очень длинным каналам или водопроводам и выбрасываются отверстием широкого сечения. Именно в этом последнем случае ускорения не являются столь быстрыми, чтобы их нельзя было заметить, что подтверждается особым примером, заимствованным из книги Мариотта «О движении вод». Так как это движение начинается с покоя и непрерывно нарастает, то даются формулы, с помощью которых можно либо по времени протекания, либо по количеству выбрасываемых вод определить скорость в отдельные моменты времени, и наоборот.

§ 10. В дальнейшем мною рассматриваются жидкости, движущиеся внутри сосудов, причем преимущественно подвергаются измерению их возвратные или колебательные движения и показываются их свойства. Ньютон дал подобную теорему о колебаниях жидкости в трубе равномерной ширины (два крайних колена у нее вертикальны, а среднее горизонтально); мой отец дал эту теорему в «Комментариях имп. Академии наук в Петербурге» (т. 2, стр. 201) в более общем виде, допустив любой наклон крайних колен трубы по отношению к горизонту. Наша теория охватывает вопрос без какого-либо ограничения, рассматривая трубы, которые изменяются в отдельных местах произвольно либо по направлению, либо по положению, а также по сечению. Далее мною показывается, в каких случаях колебания с различными амплитудами будут изохронными, откуда очень обще определяется длина простого изохронного маятника. Но, помимо этого рода колебаний, в следующей части исследуются и некоторые другие, например колебания, которые образуются в трубах, погружен-

ных в воду, не ограниченную сосудом, или даже в ограниченное количество воды. При изучении этих колебаний требуется особая осмотрительность: если ее применить, то все явления в точности соответствуют вычислению; если же ею пренебречь, то между ними получается такое же расхождение, какое имеет место между законами движения для совершенно упругих тел и законами движения для мягких тел.

§ 11. После этого я перехожу к другим более сложным вопросам, а именно, я рассматриваю движение жидкостей однородных или разнородных, которые заставляют пройти через одно или много отверстий раньше, чем они выбрасываются в воздух. Здесь вышеуказанный общепринятый закон о скачке воды до высшего уровня воды совершенно не оправдывается, так как в данном случае перестают действовать обычные законы давления. У других авторов нельзя найти и следа всего этого, кроме только того, что приводит Мариотт в указанном выше месте «О движении вод» (ч. IV, стр. 442), где он заверяет, что течение вод даже замедляется, как он сам убедился в этом на опыте; но вместе с тем он обнаруживает, как он был далек от истинной теории этих движений, и мне представляется, что эта теория действительно устраняет значение почти всех тех положений, которые обычно применялись к вопросам подобного рода. Таким образом, не существует ничего, что в большей мере подтверждало бы превосходство наших положений; и действительно, произведенные опыты не позволяют мне больше в этом сомневаться. Эти исследования являются притом весьма полезными, так как они могут иметь большое значение при устройстве гидравлических машин.

§ 12. Далее идут рассуждения о гидравлических машинах, в которых главным образом доказывается, что существует некоторый известный предел совершенства машин, дальше которого нельзя идти. Этот предел в машинах не достигается. Для многих весьма распространенных машин численно рассчитывается приближение к пределу. К этому прибавляются правила или наставления, которые следует принимать во внимание при устройстве новых машин. В качестве примера приводится весьма извест-

ная во всем мире машина Марли, о которой доказывается, если только можно верить описаниям, что она дает не свыше примерно одной пятьдесят шестой части того количества воды, какое при прочих равных условиях теоретически могла бы дать наиболее совершенная машина. Особое исследование выполняется также для машины, которая очень широко применяется с древнейших времен до нашей эпохи, а именно для улитки Архимеда, весьма заслуживающей внимания геометров, как с точки зрения того, что относится к чистой геометрии, так и того, что относится к гидравлике.

§ 13. Затем следуют некоторые рассуждения о движении упругих жидкостей, как, например, воздуха и зажженного пороха, причем этому предпосылаются рассуждения о природе этих жидкостей. Однако на последние я лично смотрю лишь как на физические гипотезы, о которых я ничего уверенно утверждать не стану. Предложения и задачи этой части являются новыми, и они избраны с таким расчетом, чтобы могли дать возможность объяснить многие физические вопросы или даже их разрешить [17]. К этому прибавляется кое-что об оценке живых сил упругих жидкостей, что, быть может, когда-нибудь окажется небесполезным в механической практике. Так мною доказывается, что эффект по подъему тяжестей от одного фунта зажженного пороха может оказаться больше того, что могут выполнить даже сто весьма сильных людей, работая непрерывно в течение одного дня.

§ 14. Далее речь идет о круговом движении жидкостей и о жидкостях, покоящихся в движущихся сосудах; к этому прибавляется и многое иное. То, что здесь излагается о круговом движении, может некоторым образом послужить для объяснения явлений тяжести с помощью вихрей; остальное же будет применяться, поскольку это окажется возможным.

§ 15. После изложения теории движения мы снова возвращаемся к равновесию жидкостей, но жидкостей движущихся, законы которых до сих пор еще не были даны. Поразительно, что в то время, как в других случаях движение определяется

на основании давления, здесь наоборот давление получается из движения, которое должно быть раньше определено из окружающих условий. Я не думал бы, чтобы можно было надежно пойти по иному пути, чем тот, по которому я следовал. Именно я рассматривал трубу, по которой течет вода, разрезанной в том месте и в тот момент времени, которые обусловливаются задачей. Затем на основе предпосланных наших правил я выяснил ускорение прилегающей частицы воды, очень близкой к вытеканию. На основании этого ускорения можно было составить представление о давлении на указанную частицу воды, которое, согласно природе жидких тел, равно давлению на стенки трубы. После того как это давление определено, становится ясно, что должно было бы произойти, если бы труба была в том же самом месте просверлена и если бы отверстию соответствовала приставная трубочка [[18]]. А именно, произошло бы то, что в последней вода поднялась бы на некоторую высоту до состояния покоя в трубочке и эта вода поддерживалась бы снизу водой, протекающей по каналу, так что здесь установилось бы равновесие между текущими водами и покоящимися. Поэтому-то я и решил, что настоящую теорию будет уместно назвать гидравлико-статической. Заслуживает далее быть отмеченным, что эта теория в свою очередь является основанием и источником для изучения других, до сих пор еще не изученных движений. Излагаемые теоремы являются не только новыми, но и в большей своей части неожиданными; в истинности всех этих теорем я и сам никак не мог себя убедить, пока не проделал опытов, которые освободили меня от всяких сомнений. Эти теоремы имеют замечательное применение, так как на них основывается правильная оценка давления вод, текущих по водопроводам или каналу, и с их помощью следует определять требуемую прочность труб. С ними также связаны точные измерения расходуемых вод с помощью измерительных приборов, располагаемых по сторонам реки; в физиологии при помощи их можно более правильно понять то, что относится к движению жидкостей в теле животного, и т. д.

§ 16. Наконец, я перехожу к изложению некоторых других способов, с помощью которых вода может произвести напор. Так, вытекая через отверстие, вода совершенно так же давит в противоположную сторону на сосуд, как ядро толкает обратно орудие, из которого оно выбрасывается взрывом. Таким образом, открываются новые свойства этого обратного толчка, прекрасно поясняющие природу давления [19]. Тем, которые серьезно занимаются механикой, эти новые свойства толчка помогут в поисках общих законов. Я произвел эти исследования, так как мне представлялось, что это может когда-нибудь дать повод для изобретения нового мореходства без весел или без опоры для ветра [20]. В надлежащем месте я кое-что об этом вкратце укажу, хотя хорошо знаю, что первые начала всех подобного рода вещей сами по себе кажутся большинству смешными. Наконец, прибавляются еще некоторые теоремы о силе жидкости в результате толчка и о возникающем отсюда сопротивлении, которое встречают тела, движущиеся в жидкостях.

§ 17. Вот то, что, как мне казалось, допускает геометрическую дедукцию из принятых начал. Но так как в теории не существует ничего столь строго доказанного, что уже не требовало бы некоторого ограничения в применении к телам природы, то отсюда легко явствует, что не следует ожидать такой теории жидкостей, которая полнейшим образом удовлетворяла бы всем измерениям, полученным из опыта. Мне хотелось бы, чтобы об этом помнили те, которые пожелали бы подтвердить наши теоремы на опытах. Они найдут без сомнения во всех случаях некоторое соответствие, однако не совершенное, а то более строгое, то более слабое, в зависимости от обстоятельств. Всякий раз, когда я сам ставил какой-нибудь опыт, я прежде всего продумывал, в какой мере начала теории находятся в соответствии с рассматриваемым случаем, и, таким образом, результат опыта никогда или же очень редко вводил меня в заблуждение. Ибо обычно я не только предвидел, в каком направлении будет разница, если последняя должна быть заметной, но и как она будет велика. Если я правильно рассуждаю, то это в достаточной

мере свидетельствует о том, что жидкости действительно следуют тем законам, которые мы считаем для них установленными, но они наталкиваются повсюду на помехи, то большие, то меньшие. Вообще я произвел немалое количество опытов, причем отдельные опыты я поместил в конце той части, к которой они относятся; я стремился главным образом к тому, чтобы подтвердить ими положения, которые ранее не были известны и которые большинству представляются в достаточной мере парадоксальными. О достоверности этих опытов нет речи потому, что кто же усомнится, если наиболее важные из них я произвел в присутствии друзей и после того, как была опубликована теория. Однако значительную часть опытов, которые я измыслил, я предоставляю произвести другим, так как у меня нет возможности все их проделать. По прочтении наших предложений каждый придумает бесчисленное множество таких опытов; поэтому, думал я, нет нужды в том, чтобы изложить здесь все те опыты, которые представляются мне желательными. Однако некоторые из них я изложил.

§ 18. Наконец, следует еще изложить те начала, о которых мы столько раз упоминали. Важнейшим началом является *сохранение живых сил*, или, как я выражаюсь, *равенство между действительным опусканием и потенциальным подъемом*. Я буду пользоваться этим последним выражением, так как оно обозначает то же, что и первое, но оно, быть может, будет более приемлемым для некоторых философов, которых смущает самое название *живая сила*. Полагаю, что по существу нашей темы здесь будет уместно поговорить об этом несколько подробнее.

§ 19 [[21]]. После того как Галилей показал, что тело, падая вертикально или же по как-либо изогнутой поверхности, приобретает одну и ту же скорость, если только высота падения одинакова, что может быть доказано на основании природы давления, Гюйгенс счастливо использовал это предложение, но для более общего допущения, при выводе законов движения упругих тел вследствие удара, а также при установлении центра качания

сложного маятника. Формулировал же он свою аксиому следующими словами: «Если любое число весомых тел начинает двигаться произвольно под действием силы своей тяжести и затем все они сами собой приходят в состояние покоя, то общий центр тяжести этих грузов вернется на первоначальную высоту». Под словом «произвольно» он подразумевает здесь следующее: соударяются ли тела при падении или же они взаимно друг на друга давят, или как-либо иначе воздействуют друг на друга. Из этой аксиомы тотчас же следует начало сохранения живых сил, которое доказал уже сам Гюйгенс и в котором утверждается: если любое количество весомых тел начинает двигаться произвольно под действием силы своей тяжести, то скорости отдельных тел повсюду будут таковы, что сумма их квадратов, умноженных на соответствующие массы, будет пропорциональна вертикальной высоте, на которую снизится общий центр тяжести этих тел, умноженной на массы всех тел. Поразительно, до какой степени полезно это положение в механической философии, на что правильно обратил внимание именно мой отец, указавший на него в различных работах, а впервые — в изданной в Париже диссертации «О законах движений» и во втором томе «Комментариев имп. Академии наук в Петербурге». Это тождественно с тем, что я применил для исследования законов движений, возникающих под действием собственной тяжести в жидких телах. А именно, я допустил, что скорости частиц все время таковы, что когда отдельные частицы движутся вверх до состояния покоя, то общий центр их тяжести поднимается на первоначальную высоту. Однако в силу указанного выше соображения я предпочел приурочить это положение к словам Гюйгенса, а не к словам отца, и передать его выражением: равенство между действительным снижением и потенциальным подъемом, а не другим: сохранение живых сил[22], к которому некоторые, в особенности в Англии, не-

известно почему все еще продолжают питать отвращение. Действительно, мне кажется, что во всем учении Лейбница о живых силах нет ничего такого, с чем не согласились бы все, хотя каждый и выражается по-своему, на что, если не ошибаюсь, я ясно указал в «Комментариях имп. Академии наук в Петербурге» (т. I, стр. 131 и след.). Я счел желательным сослаться здесь на это место, дабы кто-нибудь из читателей не был введен в заблуждение словами и знал, что я принимаю в механике только то, что принято всеми и в том числе Галилеем, когда он установил, что приращения скоростей пропорциональны давлениям [23] и элементам времен.

§ 20. Впрочем, хотя упомянутое выше начало является всеобщим, тем не менее его не следует применять без всякой оглядки, так как зачастую случается, что движение переходит к материи другого рода. Так, например, его можно применять для вывода правил движений, получающихся в результате удара, если только тела являются совершенно упругими; если же они не являются таковыми, то легко видеть, что часть живых сил или потенциального подъема, затраченная на сжатие тел, не восстанавливается в телах, но остается приставшей к некоей тонкой материи [24], к которой она переходит. Однако если этот вопрос исследуется правильно и если определяется соотношение, какое существует между частью, оставшейся в телах, и частью, перешедшей к тонкой материи, то оказывается, что можно легко устранить указанное неудобство и, таким образом, правильно определить законы движения для мягких тел. Нечто подобное удается и при расчете движения вод, где иногда очевидно, что часть потенциального подъема непрерывно теряется; это, конечно, следует принимать во внимание при проведении расчета. Благодаря тому что я принял это надлежащим образом во внимание, мне удалось открыть много новых теорем о течении вод, которые можно увидеть в шестой и седьмой частях. Я не вижу возможности доказать их или тем более придумать, пользуясь каким-либо иным методом.

§ 21. Итак, я воспользовался нашим началом с большой осмотрительностью, и этим путем было выявлено многое до сих пор неизвестное не только о движении жидкостей, но, что может показаться удивительным, и об их давлении, чего до поставленного анализа никто не мог бы легко предвидеть и ожидать. Действительно, когда получается, что потенциальный подъем не может полностью сохраниться по самой природе вещей и что нельзя предвидеть, какая часть его поглощается, то отсюда следует, что движение жидкостей не может быть определено достаточно точно, и я не думаю, чтобы это могло быть сделано с помощью какого-либо иного метода. Поэтому я рекомендовал бы читателю быть осторожным при выводе из нашей теории следствий, которые в силу изменившихся окружающих условий могут зачастую не совпасть в точности с опытами.

§ 22. Из сказанного ранее уже достаточно ясно, что, согласно нашему методу, требуется, чтобы скорость отдельных частиц жидкости определялась на основе принятой скорости, существующей в каком-либо месте, например в месте вытекания. Поэтому оказалось необходимым ввести еще одно допущение, а именно следующее: после того как, конечно мысленно, мы представили себе жидкость разбитой на слои, перпендикулярные к направлению движения, мы допускаем, что частицы жидкости одного и того же слоя движутся с равной скоростью, так что скорость жидкости оказывается повсюду обратно пропорциональной соответствующему сечению сосуда. Это допущение и было использовано, хотя, впрочем, известно, что вследствие трения жидкость у стенок сосуда течет несколько медленнее, а по середине быстрее и что наряду с этим следует допустить и еще некоторые другие отступления. Однако от этого рода неточностей лишь очень редко может получиться значительная погрешность.

§ 23. Я закончу настоящие предварительные замечания о наших допущениях рассмотрением явлений, которые могут несколько пояснить и подтвердить сохранение живых сил в движении жидкостей. Правда, очень много замечаний встречается и в самой работе, но в силу того, что они требуют вычислений,

я на них теперь не стану ссылаться. Очень просто и ясно то, что происходит с каплей, упавшей на покоящуюся воду; именно она возбуждает на поверхности покоящейся воды круги, причем их бывает тем больше, чем больше была капля или чем с большей высоты она упала, и нет сомнения, что эти круги распространялись бы без конца, если бы этому не препятствовали вязкость воды и другие подобные обстоятельства. Порой можно наблюдать и другой эффект от подобного рода капель, когда некоторое количество меньших капелек отбрасывается вверх поверхностью ниже расположенной воды; в этом случае всегда оказывается, а это в особенности имеет сюда отношение, что капельки поднимаются тем выше, чем меньше их было числом и чем они были мельче по объему. Когда высота падения составляла два фута, то меньшие капельки зачастую поднимались выше высоты падения, в особенности, когда вода капала из большого отверстия. Здесь заслуживает также быть отмеченным то, что происходит с частицей воды в тонкой трубе, например горизонтальной, прикрытой просверленной крышкой на том конце, куда течет вода. А именно, в тот момент времени, когда вода подходит к крышке, несколько капель выскакивают с большим напором, а затем скоро все движение воды прекращается. Но если кто-либо был склонен подумать, что вода, прилегающая к отверстию, будет продолжать двигаться со своей скоростью, а остальная вода остановится, то это в очень малой мере соответствовало бы сохранению живых сил: последнему же прекрасно соответствует указанное выше мгновенное вытекание воды или подобие взрыва. Но об этом подробнее в другом месте.

§ 24. Вот то, что я хотел наперед отметить о наших допущениях, как об их достоинствах, так и недочетах. Мне остается еще сказать кое-что о природных свойствах жидкостей, так как им будут посвящены наши поздние, ночные занятия, но не потому, что я рассчитываю изучить их лучше, чем другие, а потому, что я считаю недопустимым отступить от этого обычая, освященного всеми авторами. Конечно, прежде всего все сходятся обычно на

том, что любым жидким телам присуще внутреннее движение, без которого действительно никто не может правильно понять столь большой их текучести, закипания различных жидкостей, растворения твердых тел, погруженных в жидкость, испарения и других бесчисленных явлений. Этим объясняется, что очень многие весьма твердые предметы плавятся от достаточного жара, который все вовлекает в движение. Это внутреннее движение приводит к тому, что частицы перестают соприкасаться друг с другом, но как бы свободно летают туда и сюда, в результате чего они, не испытывая трения, от малейшего импульса сдвигаются с места; а это удавалось бы в очень малой степени, если бы допустить, что те же частицы находятся между собой в соприкосновении как в куче песка. Таким образом, легко понять, что мельчайшая мука из яичной шелухи, поставленная в чашке над огнем, напоминает, как говорят, кипящее молоко. А чем сильнее жар, тем, конечно, быстрее происходит движение частиц и тем все бо́льшими промежутками они отделяются друг от друга, что согласуется с расширением всех жидкостей при увеличении тепла и с их сжатием от холода, каковому закону подчиняется и вода, пока она еще не замерзла. А то обстоятельство, что во время замерзания вода обнаруживает противоположное свойство, повидимому, следует приписать другой, случайно привходящей причине, а именно тому, что вода в промежуточных своих пространствах хранит воздушные частицы, которые, таким образом, не увеличивают объема воды, подобно тому как сахар, растворенный в воде, не увеличивает ее объема. Во время же наступающего замерзания движение водяных частиц уменьшается, и, таким образом, эти частицы больше сближаются друг с другом и даже изгоняют из промежуточных своих пространств воздушные частицы, которые, будучи расположены менее удобно в других местах, могут увеличить объем, подобно тому как нерастворившийся еще сахар увеличивает объем воды, с которой он смешан. Отсюда удобно выводится и причина того, что лед воды, хорошо очищенной до замерзания от воздуха, становится не легче по удельному весу, а скорее даже тяжелее. Отличные

опыты относительно действительного растворения воздуха в воде вплоть до точки насыщения провел Мариотт, изложивший их в своем трактате «О движении жидкости». Таким образом, имеется основание подозревать, что жидкости (как я сказал) замерзают, когда прекращается или же сильно уменьшается внутреннее движение, ибо тогда частицы падают друг на друга, приходят во взаимное соприкосновение и одновременно удаляют из своих промежутков инородные частицы, если последние там имеются. Однако отсюда не поддается более ясному пониманию твердость замерзших тел; напротив, представляется даже, что после прекращения указанного движения тело должно оказаться по своей природе чем-то средним между жидким телом и твердым, если только при этом не происходит еще что-либо другое, и что его следует уподобить куче песка. В чем тут дело, я, правда, не догадываюсь, но в то же время можно представить себе, что все частицы тяготеют друг к другу или, если воспользоваться выражением, которое применяют англичане, взаимно притягиваются; это притяжение чрезвычайно увеличивается, когда частицы сближаются друг с другом. Оно бывает неодинаковым в различных телах; например, оно меньше в маслах, чем в водах, лед которых тверже. Быстрее и легче замерзают те жидкости, у которых частицы либо сильнее притягиваются взаимно, либо находятся в более слабом движении. На этом основании можно было бы предположить, что вода, в которой растворен сахар или соль, замерзает медленнее вследствие того, что частицы сахара или соли, находящиеся между частицами воды, ослабляют их притяжение, и они не могут соединиться и затем замерзнуть без того, чтобы инородные частицы не были удалены с их места. И действительно, у всех жидкостей, в которых растворены посторонние частицы, во время замерзания происходит некое удаление частей из пор или их отделение, а также осаждение. Имеется бесчисленное множество других явлений у тел как твердых, так и жидких, которые удивительнейшим образом согласуются с началом взаимного тяготения; таким образом, можно пожалеть, что это начало стоит настолько выше человеческого разумения,

что, думается, нет никого, кто был бы в состоянии каким-либо образом его понять.

§ 25. Наконец, здесь будет уместно напомнить, что я рассматриваю настоящий трактат скорее как физический, чем как математический. Поэтому я решил не слишком гнаться за геометрическим методом в предварительном изложении допущений, определений и прочих подготовительных соображений и не придерживаться повсюду порядка изложения геометров, которые обычно всякий вопрос начинают с самого начала, строят ряд предложений и обрабатывают все в таком порядке, чтобы из первых предпосылок все в отдельности правильно вытекало, и не оставляют ничего недоказанным, хотя бы это было доказано многими другими. У меня не было этой заботы по отношению к тому, что было дано другими, будь то определения, аксиомы или даже теоремы. Однако я доказываю все, что является новым, а в первой части привожу даже доказательства таких теорем, которые были в разных местах доказаны другими. Когда встретятся какие-нибудь термины, которых другие не объясняли или не применяли, то я буду давать их определение в самом тексте. Остальное я буду излагать либо в стиле геометров — в форме предложений, теорем, задач, следствий и пояснений, либо просто в виде рассуждения.

Остается лишь одно, о чем я больше всего хочу предупредить читателя. Я не мог применить к настоящему труду того старания или внимания, какое я должен был и какое я хотел применить. Поэтому нисколько не сомневаюсь в том, что когда я производил вычисления, то в них вкрались кой-какие погрешности, которых, надеюсь, никто не истолкует в дурную сторону; некоторые из них, которые мне попались на глаза во время беглого прочтения трактата, я исправил сам. Я убежден, однако, что все же остались и другие погрешности.

ГИДРОДИНАМИКИ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

в которой речь идет о покоящихся жидкостях и об их равновесии как по отношению друг к другу, так и по отношению к другим силам

Теорема 1 [25]

§ 1. Поверхность покоящейся жидкости параллельна горизонту.

Доказательство

Пусть сосуд *ABCD* (фиг. 1) содержит в себе жидкость *EBCFG*, поверхность которой, если это возможно, будет непараллельна горизонту. Рассмотрим каплю жидкости *a* в более высоком месте, увлекаемую своей тяжестью вертикально вниз с силой, представленной через *ac*. Разложим эту силу на две составляющие — *ad* и *ab*, из которых одна перпендикулярна к поверхности, а другая к ней касательна. Но так как нет ничего такого, что оказало бы противодействие этой последней силе, то она не может не проявить своего действия, а именно, увлечь эту каплю по направлению к *E*, это противоречило бы допущению покоя или постоянного положения. Следовательно, необходимо, чтобы нигде не существовало касательной силы *ab*, а это имеет место лишь в том случае, когда вся поверхность жидкости параллельна горизонту, что и требовалось доказать.

Следствие

§ 2. Отсюда усматривается истинность общего предложения, что поверхность жидкости, на частицы которой воздействуют какие-либо силы, всегда располагается таким образом, что любая капля, находящаяся на поверхности, увлекается силой по направлению, перпендикулярному к поверхности [26].

Теорема 2

§ 3. Однородная жидкость, заключенная в двух сообщающихся трубках любой формы, находится в состоянии равновесия, когда обе поверхности расположены ровно по уровню, т. е. сохраняют одинаковое вертикальное расстояние от самой нижней точки сосуда.

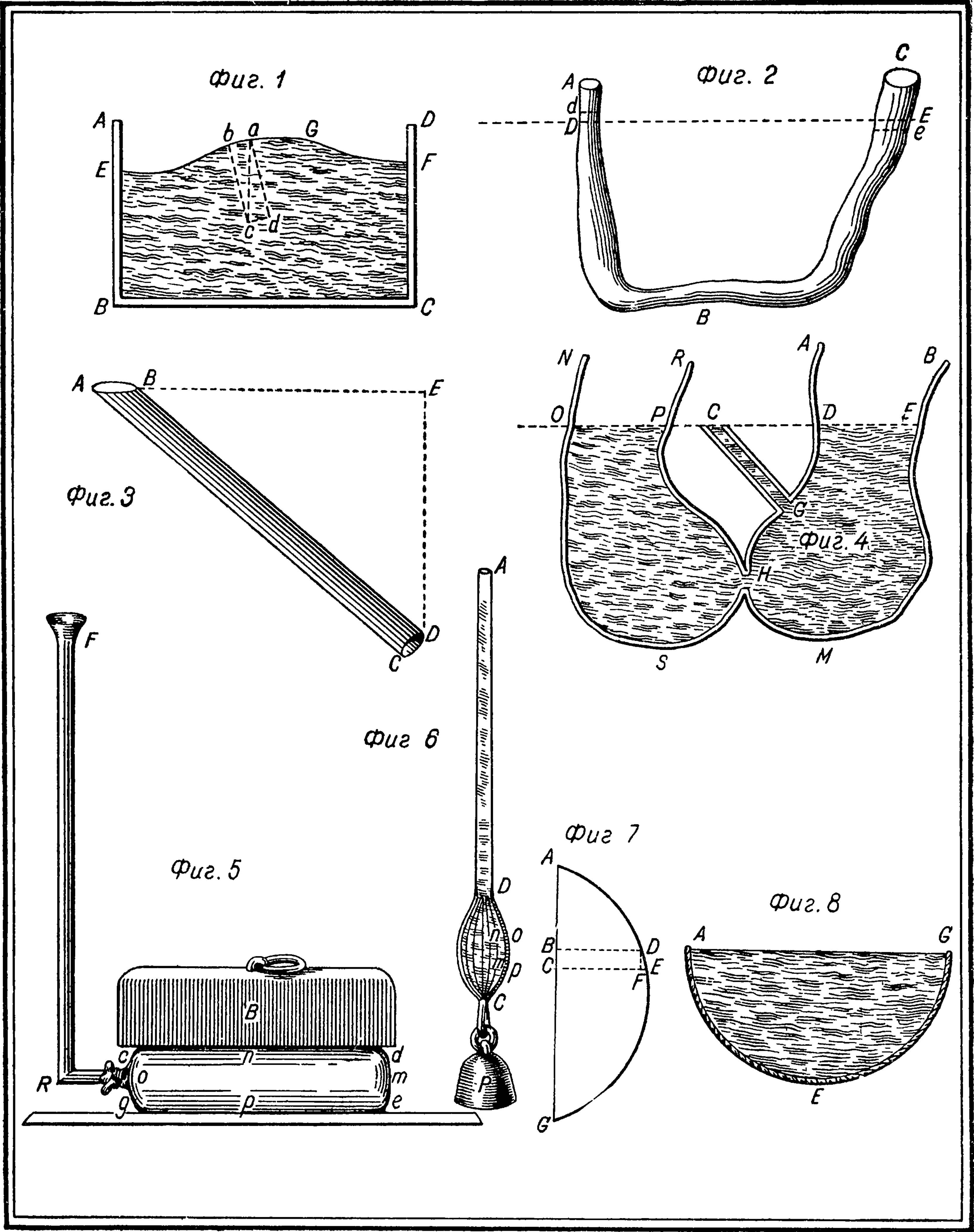
Доказательство

Пусть имеется жидкость, заключенная в сосуде ABC (фиг. 2), состоящем из двух колен, или сообщающихся труб, и допустим, что в обоих коленах она расположилась до одной и той же высоты. Я утверждаю, что она не может изменить своего положения без того, чтобы какое-либо весомое тело не поднялось из более низкого положения в более высокое, что противно природе тяжелых тел. Действительно, если бы поверхность E снизилась до e, а на другой стороне поднялась от D до d, то так как остальная часть сосуда заполнена одной и той же жидкостью до и после изменения положения, весь результат изменения свелся бы к тому, что частица Ee поднялась бы до Dd.

Впрочем то же самое следует из первой теоремы, поскольку можно представить себе в покоящейся воде любой формы трубку, в которой вода сохранит то же положение, какое она занимала раньше; ибо все равно, удерживается ли вода, заключенная в трубке, стенками трубки, или же она удерживается покоящейся вокруг нее водой.

Пояснение 1

§ 4. Когда в первом доказательстве предшествующего параграфа допускается, что вся масса DBE изменила свое положение на dBe, то можно легко доказать, что при этом центр тяжести


Фиг. 1
A
D
b
a
G
E
F
c
d
B
C
Фиг. 2
A
d
D
C
E
e
B
A
B
E
Фиг. 3
C
D
N
R
A
B
O
P
C
D
E
G
Фиг. 4
H
S
M
F
Фиг 6
A
Фиг. 5
D
n
o
p
C
P
B
c
n
d
R
o
m
g
p
e
Фиг 7
A
B
D
C
E
F
G
Фиг. 8
A
G
E

всей массы переместится в более высокое положение, что приводит к абсурду. Но так как при нашем доказательстве в *Ee* нет никакой частицы, которая не поднялась бы после изменения положения, то я решил, что доказательство будет более строгим и ясным, если совершенно не принимать в рассмотрение центр тяжести.

Пояснение 2

§ 5. При капиллярных трубках мы имеем особенные явления. Именно в узкой трубке вода поднимается выше уровня воды, в которую погружен другой конец трубки, ртуть же (в капиллярной трубке) не доходит до уровня в широкой части сосуда. Внимательно продумав эти явления, я пришел почти к тому же объяснению, которое дал когда-то блаженной памяти мой дядя, Яков Бернулли, в своем трактате «О тяжести эфира», а именно: в более узкой трубке вода поднимается выше уровня вследствие того, что число воздушно-эфирных частиц в основании столба, возвышающегося над водой в трубке, меньше числа частиц в аналогичном основании вне трубки. Сказанное можно понять из того, что если положить на горизонтальной доске вплотную друг к другу шарики и циркулем обвести окружность, то некоторое число шариков неизбежно будет отброшено, так как они не поддаются делению. Давления вездушно-эфирных столбов (у одного из которых основание находится внутри трубки, а у другого — вне трубки) относятся между собой как их нижние части, т. е. как числа частиц в нижних частях. Отсюда, если число частиц в первой нижней части равно a, а во второй равно $a+b$, давление первого столба равно g, то давление второго столба будет $\frac{a+b}{a}g$; отсюда разность давлений равна $\frac{b}{a}g$, чему и должна равняться высота над уровнем. Для того чтобы более правильно это понять, надо будет принять во внимание, что g пропорционально квадрату диаметра жидкости, заключенной в трубке и что тому же квадрату, в силу крайней малости шариков, пропорционально a, так что отношение g к a следует считать постоянным, и что поэтому высота воды над уровнем

должна быть пропорциональна b. Но, что само по себе ясно, b пропорционально периферии поверхности жидкости, заключенной в трубке; следовательно, высота над уровнем будет пропорциональна той же периферии, что уже давно было подтверждено опытом. Далее, если мы рассмотрим теперь различные жидкости, то мы увидим, что упомянутая периферия будет тем более извилиста и, стало быть, тем больше, чем бо́льшими являются частицы жидкости, а так как от величины указанной периферии зависит высота жидкости над уровнем, то нам становится понятно, почему эта высота в одной и той же трубке не следует обратному отношению к удельному весу. Так, если одну и ту же трубочку погрузить в винный спирт и в воду, то первый поднимется меньше, чем вторая, хотя в силу меньшей своей тяжести спирт должен был бы подняться на бо́льшую высоту. А это указывает на то, если только я правильно разбираюсь в данном вопросе, что частицы винного спирта меньше частиц воды. Тем не менее, по-моему, ни у одной жидкости подъем над уровнем не может никогда смениться снижением, и я полагал бы, что все жидкости обладают в этом отношении одной и той же природой, если только сюда не привходит какая-то иная, покуда еще неисследованная причина [27]. Если мы будем рассуждать, исходя из нашего допущения, то надлежит утверждать, что и ртуть должна была бы подниматься выше уровня, если бы только ее частицы не притягивали взаимно друг друга с большей силой, чем частицы воды; этому именно притяжению я и приписываю все, что заставляет ртуть вести себя иначе. В конце настоящей части я пришел к указанному выше мнению.

Лемма

§ 6. Представим себе, что цилиндрическая труба $ABDC$ (фиг. 3), наклоненная как-либо к горизонту, причем основание ее CD перпендикулярно к стенкам трубы, наполнена водою до AB. Я утверждаю, что давление всей воды на основание CD равно

весу цилиндра воды, основанием которого является CD, а высотой — вертикальная прямая DE, ограниченная горизонтальной прямой BE.

Доказательство

Так как труба имеет цилиндрическую форму и, сверх того, основание ее перпендикулярно к стенкам трубы, то всякий видит, что действие жидкости на дно тождественно с тем, какое было бы присуще твердому цилиндру такого же веса на наклонной плоскости; из механики же известно, что давление твердого цилиндра на дно является именно таким, как это определено в настоящем предложении. Следовательно, таким же будет действие жидкости, если только не принимать во внимание прилипания жидкости к стенкам трубы, а также ее свойства в отношении капиллярных трубок, чего мы здесь не касаемся. Это и требовалось доказать.

Теорема 3

§ 7. Пусть теперь имеется сосуд $AHMB$ (фиг. 4) любой формы, заполненный водою до DE; тогда давление воды на отдельные части стенки сосуда, например на G или H, будет всегда равно весу цилиндра воды, основанием которого является поверхность указанной выше части, а высота равна вертикальному расстоянию той же части от поверхности воды.

Доказательство

Прежде всего представим себе цилиндрическую трубку CG, установленную перпендикулярно к сосуду, уровень жидкости в котором есть ED; пусть эта трубка наполнена той же жидкостью до C. Вообразим теперь, что сосуд просверлен в G. После этого и жидкость в сосуде и в трубке будет находиться в равновесии (согласно § 3). Следовательно, жидкость в трубке CG настолько же давит внутрь, насколько жидкость сосуда давит наружу. Но первое из этих давлений определяется предложением, изложенным в § 6; стало быть, в соответствии с ним находится и второе давление.

Если же затем вместо части стенки *G* взять другую часть *H* такого рода, что нормаль к *H* входит внутрь сосуда, то можно вообразить себе целый сосуд *RHSN*, присоединенный к первому в *H* и наполненный водою до *PO*. Тогда становится очевидным, что если просверлить часть стенки *H*, являющуюся общей для обоих сосудов, то жидкость останется при этом в равновесии (согласно § 3); следовательно, давление обеих жидкостей в *H* будет одинаково. Давление же жидкости в *RSN* будет таким, какое следует из предложения (согласно первой части настоящего доказательства); следовательно, таковым будет и давление жидкости в сосуде *AMB*, что и требовалось доказать.

Пояснение

§ 8. Из приведенных выше предложений легко выводится равновесие покоящихся жидкостей в более сложных случаях. Но я не собираюсь проследить все случаи, да этого и не требует характер нашей задачи, и ограничиваюсь только что данными мною доказательствами основных предложений гидростатики. Что же касается давлений непокоящихся жидкостей, то они, конечно, требуют более глубокого исследования. До сих пор не было еще правильно определено и давление жидкостей, протекающих с заданной степенью скорости по каналам или трубам, хотя этого рода тема очень полезна как для водных проблем, так и для многих других. Но этими вопросами нельзя заниматься прежде, чем мы не изложим вопроса о движении жидкостей.

§ 9. Из предшествующего делается очевидной теория сил надутых пузырей, с помощью которых могут преодолеваться большие нагрузки. Отсюда познается также сила, выдерживаемая стенками трубы, в которой покоится вода. Так как этот предмет обычно трактуется авторами гидростатики, то мы его рассмотрим теперь, в особенности принимая во внимание, что на нем основывается много другого, о чем нам надлежит говорить.

Пусть, во-первых, имеется пузырь *onmp* (фиг. 5), лежащий между полом и грузом *B*, и пусть в него подливается вода через

трубу *FRo*, вертикальное колено которой мы для простоты примем несравнимо длиннее диаметра пузыря. Груз *B* сразу не поднимется. Но если затем подлить воды, например до *F*, то груз, наконец, поднимется. Равновесие же наступит, когда место соприкосновения *cd* будет так относиться к отверстию *o*, как вес *B* к весу цилиндра воды с высотой *FR*, стоящего над основанием *o*. Таким образом, абсолютное определение подъема зависит от структуры пузыря. Если бы, например, он был составлен из совершенно гибких, не допускающих никакого растяжения волокон, и если бы в то же время естественной формой его была сферическая, то легко явствует, что места соприкосновения *cnd* и *gpe* будут между собой равны и будут сморщены, а остальная часть пузыря расширится и будет стремиться принять форму шарового пояса. Отсюда можно с помощью геометрии вывести величину подъема *np*, которая будет равна нулю, пока наибольший круг пузыря будет находиться в меньшем отношении к отверстию *o*, чем вес *B* к весу вышеупомянутого столба воды, и весь пузырь расправится не раньше, чем когда высота столба воды станет бесконечно большой, т. е. никогда. Если же волокна обладают иными свойствами, то дело обстоит иначе, чего в достаточной мере не приняли во внимание многие, писавшие о форме надутого пузыря, которые хотели приложить ее к мышечным полостям в животном организме, на чем я теперь остановлюсь несколько подробнее.

§ 10. Пусть имеется пузырь *DC* (фиг. 6) и к нему подвешен груз *P* и в то же время присоединена трубка *DA*, длину которой мы для простоты снова представим себе несравнимо большей, чем длина *DC*. При указанных предпосылках каждый, конечно, легко понимает, что если пузырь и трубку заполнить, то первый из них надуется и подвешенный груз *P* поднимется; но никто не уяснит состояния равновесия и формы пузыря, если только не будет вполне выяснена структура пузыря и его волокон. Ввиду этого мы исследуем несколько отдельных случаев, которые могут встретиться чаще.

Случай I

§ 11. Если пузырь будет состоять из продольных, равных, совершенно гибких и однообразных волокон DpC, DmC и т. д., сходящихся наподобие меридианов в точках D и C, как в полюсах, причем каждое из волокон соединяется с ближайшими к нему волокнами с помощью очень малых поперечных волоконцев, которые так нетуго натянуты, что при минимальной силе или даже как бы при нулевой силе они допускают достаточное растяжение, то любое волокно DpC изогнется в фигуру упругой линии, а весь пузырь примет форму тела, образующегося в результате вращения указанной кривой вокруг оси DC. Далее, если высота AD бесконечно велика, то упругая линия DpC становится прямоугольной, и тогда наибольшая толщина пузыря относится к длине оси DC примерно как 25 к 11, а длина дуги DpC относится к той же оси приблизительно как 5 к 2, так что при наибольшем подъеме груза пузырь укоротится на $^3/_5$ части.

Случай II

§ 12. Если при прочих прежних условиях очень малые поперечные нити no, mp и т. д., которые перпендикулярны к продольным волокнам, оказывают сопротивление растяжению, то ясно, что нельзя определить форму волокна $DopC$ без того, чтобы не рассмотреть два рода сил, приложенных к одной и той же точке, из которых одна направлена перпендикулярно к кривой и давить на нить наружу, а другая направлена перпендикулярно к оси кривой DC и влечет нить внутрь. Легко также понять, что можно придумать бесчисленное множество законов этих давлений, чтобы волокно $DopC$ сложилось в любую заданную кривую и, стало быть, напр., и в круговую линию, каковая форма большинством физиологов приписывается волоконцам, относящимся к мышечным структурам. Но существует еще иной способ, при котором продольное волокно может приобрести форму круговой дуги, а именно, когда поперечные волоконца no, mp и т. д. совсем отсутствуют. Ибо при этих условиях, пока пузырь на-

полняется, между двумя продольными соседними волокнами $DopC$ и $DnmC$ образуется щель, через которую жидкость вытекает, но так как она не может вытечь достаточно быстро, то она одновременно растягивает волокна и приводит их к круговой форме. В этом случае максимальное укорочение волокна, которое в предыдущем случае составило $^3/_5$ всей длины незаполненного жидкостью пузыря, будет близко к $^4/_{11}$.

§ 13. Из вышеизложенного следует, что трудно правильно определить форму надутого пузыря, к которому подвешен груз, поскольку никто не может вполне познать свойства очень малых волокон. Тем не менее я воспроизведу здесь некоторые представляющиеся наиболее достоверными примеры из моих записей, но без доказательства, которое, если бы кто-либо пожелал, он найдет в 3-м томе «Комментариев имп. Академии наук в Петербурге». Но прежде всего я дам уравнение для кривой, которая, как я указал в предшествующем параграфе, вызывается двумя родами сил, подчиняющимся какому-либо определенному закону.

§ 14 [28]. Итак, пусть имеется нить AEG (фиг. 7), закрепленная в двух точках, A и G. Проведем прямую AG, и пусть будут D и E на нити две бесконечно близкие точки, из которых опустим два перпендикуляра DB и EC на прямую AG; малая же прямая DF пусть будет параллельна прямой AG. Представим себе, что в отдельных точках D или E приложены две произвольно изменяющиеся силы, из которых одна всегда перпендикулярна к кривой, а другая — к AG. Первую положим в точке D равной A, в точке E — равной $A+dA$; вторую — в точке D равной C, в точке E — равной $C+dC$. Пусть, далее, $AB=x$, $BD=y$, $AD=s$, $BC=dx$, $FE=dy$, $DE=ds$; этот последний элемент кривой мы примем имеющим постоянную величину [29]. Радиус соприкасающейся окружности в точке D равен R, в точке E равен $R+dR$. Тогда я утверждаю, что для кривой будет иметь место следующее уравнение:

$$-AdR-RdA=(RdCdx+2Cdyds+CdxdR):ds,$$

или же, если подставить CRd^2x вместо $Cdyds$, ибо $R=\frac{dyds}{d^2x}$, то [30] мы будем иметь

$$-AdR-RdA=(RdCdx+CRd^2x+Cdyds+CdxdR):ds,$$

или

$$\frac{-ARds-RCdx}{ds}=\int Cdy.$$

§ 15. Из предшествующего уравнения понятно, что если действуют только силы, перпендикулярные к кривой, то получается, что AR равна постоянной величине, ибо в этом случае $C=0$. Отсюда следует, что радиус соприкасающейся окружности обратно пропорционален соответствующей силе. А если имеются лишь силы, перпендикулярные к оси, тогда с исчезновением буквы A получается

$$-\frac{RCdx}{ds}=\int Cdy.$$

Но это уравнение может быть проинтегрировано и приведено к виду $RCdx^2=\text{const}$. Из последнего явствует, что сила, умноженная на радиус соприкасающейся окружности, всегда находится в обратном отношении к квадрату синуса (угла), образуемого ординатой с кривой. Равным образом каноническое уравнение допускает интегрирование в том случае, когда все силы, перпендикулярные к оси, между собой равны или пропорциональны элементу кривой ds. Ибо, если положить $dC=0$, то получится

$$-AdR-RdA=(2ndyds+ndxdR):ds,$$

где под n подразумевается постоянная величина. При правильном истолковании этого уравнения находим

$$nydy+m^2dy-nsds=ds\int Adx,$$

где m представляет собой постоянную, получающуюся в результате интегрирования.

Если сверх того допустить, что силы, нормальные к кривой, пропорциональны ординатам y, то последнее уравнение можно дальше привести к следующему:

$$-dx = \left(2f^2 - \frac{gy^2}{h}\right) dy : \sqrt{(2ny + 2m^2)^2 - \left(2f^2 - \frac{gy^2}{h}\right)^2};$$

постоянные последнего уравнения f и m имеют свои значения для каждого отдельного случая, между тем как n и g зависят от соотношения сил в любой точке. Отсюда, если $g = 0$, то получается цепная линия, если $n = 0$, то получается упругая линия. Вообще же, это уравнение служит для определения кривой равномерно тяжелой ткани, на которой покоится жидкость. Простейшим случаем в данном вопросе будет тот, когда предположено $f = m = 0$; действительно, тогда будет

$$-dx = \frac{-gydy}{\sqrt{(4n^2h^2 - g^2y^2}},$$

или, после выполнения интегрирования с прибавлением соответствующей постоянной,

$$x = -\sqrt{\frac{4n^2h^2}{g^2} - y_2} + \frac{2nh}{g}.$$

Последнее представляет собой уравнение полуокружности, форму которой и примет ткань при следующем допущении. Пусть имеется весомая нить ткани AEG (фиг. 8), изогнутая в полуокружность, диаметр которой AG расположен горизонтально; пусть над нитью покоится жидкость до AG. Тогда я утверждаю, что если вес жидкости будет равен весу нити, то получится, что совершенно гибкая и однородной толщины нить сохранит форму полуокружности. А каким образом можно достичь того, чтобы веса нити и жидкости были между собой равны, это известно из элементов геометрии. Наконец, если принять, что как силы A, так и силы C всюду пропорциональны соответствующей ординате y (а это допущение представляется, конечно, очень подходящим к действительной форме пузыря на фиг. 6), то опять-таки кано-

ническое уравнение, содержащее в себе дифференциалы третьего порядка, может быть приведено к более простому дифференциальному уравнению, причем последнее может быть легко составлено через квадратуры. Действительно, пусть $A = my$ и $C = ny$; тогда я утверждаю, что природа кривой ADG на фиг. 7 выражается следующим уравнением:

$$dx = \left(g^3 + \frac{1}{2}my^2\right)dy : \sqrt{\left(f^3 + \frac{1}{2}ny^2\right)^2 - \left(g^3 + \frac{1}{2}my^2\right)^2},$$

в котором постоянные величины f и g снова получаются в результате интегрирований; значение же буквы n будет отрицательным, когда данное уравнение применяется для определения формы заполненного пузыря.

§ 16. Я не хотел слишком много останавливаться на том, что не имеет очень близкого отношения к гидродинамике. Ничего также я не прибавляю об упругих жидкостях, так как их теорию я решил изложить отдельно. Но что касается давлений упругих жидкостей, то их можно будет легко вывести и доказать, исходя из вышеизложенной природы просто весомых жидкостей, если представить себе, что жидкость лишена упругости и что над ней лежит бесконечной или квази-бесконечной высоты цилиндр подобной же жидкости (о том, каким образом это следует понимать, мы скажем в своем месте). А теперь я перехожу к тому, что обычно больше всего исследуется в гидродинамике, а именно: какова должна быть прочность труб, чтобы они могли противостоять давлению воды, причем здесь в особенности рассматриваются те трубы, которые подводят воды к источникам; об этих трубах я тоже вкратце напомню.

§ 17. Следует хорошо отличать давления вод, покоящихся в трубах, от давления текущих вод, хотя, насколько я знаю, до сих пор на это никто не обращал внимания. Отсюда получается, что хотя предложенные различными учеными законы имеют силу только для покоящихся вод, но они употребляются в таких выражениях, которые могут склонить к тому, чтобы относить эти законы равным образом и к текущим водам. Для

того же, чтобы различие между этими теориями стало ясно с самого начала, я приведу один пример, доказательство которого будет понятно из нижеизложенного. Пусть вместо водоема имеется очень обширный сосуд $ABCD$ (фиг. 9), наполненный водой до EF и снабженный в нижней своей части горизонтальной цилиндрической трубкой $MOmo$, через которую, как мы представляем себе, вода может беспрепятственно протекать. Проведем вертикальную прямую NG до горизонтальной прямой EH. Я утверждаю, что если после указанной подготовки закрыть пальцем все отверстие Oo, то точка N будет испытывать давление наружу соразмерно всей высоте NG; если закрыть половину отверстия, то указанное давление уменьшится на свою четвертую часть и, наконец, если с устранением пальца жидкость станет вытекать вполне свободно, то все давление исчезнет, так что обычно авторы смешивают все с частью или даже с нулем. Но я докажу, что давление может стать даже отрицательным и, таким образом, может смениться всасыванием. Но так как я не могу толковать об этом раньше, чем изложу всю теорию текущих вод, то я покуда буду рассматривать лишь покоящиеся воды, как если бы отверстие Oo было полностью закрыто.

§ 18. Из механики известно, что стенки трубы $MOmo$ (диаметр которой мы будем считать несоизмеримо меньшим высоты NG) напрягаются совершенно так же, как если бы они были представлены в виде четырехугольной фигуры $MOmo$ (фиг. 10) и имели подвешенный к ним груз P, равный весу водяной призмы, тремя сторонами которой являются: 1) радиус трубки, 2) длина ее и 3) высота воды над трубой. Из этого предложения уясняется не только отношение напряжений, если бы имелись различные высоты воды или диаметры трубок, но и самая величина напряжений. Следовательно, если прочность труб окажется больше указанного напряжения, то не будет никакой опасности разрыва; в противном случае трубу наверняка разорвет. Между прочим разные лица производили опыты над прочностью труб; но подобного рода опыты трудны и сопряжены с большими издержками. Поэтому можно легче определить прочность свинцовых или железных труб,

если с помощью опыта установить, какой груз может без опасности разрыва выдержать свинцовая или железная нить заданной толщины. Аналогичный произведенный мною опыт я изложу в конце настоящей части с тем, чтобы показать, каким образом отсюда может быть выведена прочность трубы заданной толщины и диаметра.

Изложение опытов, относящихся ко второй части

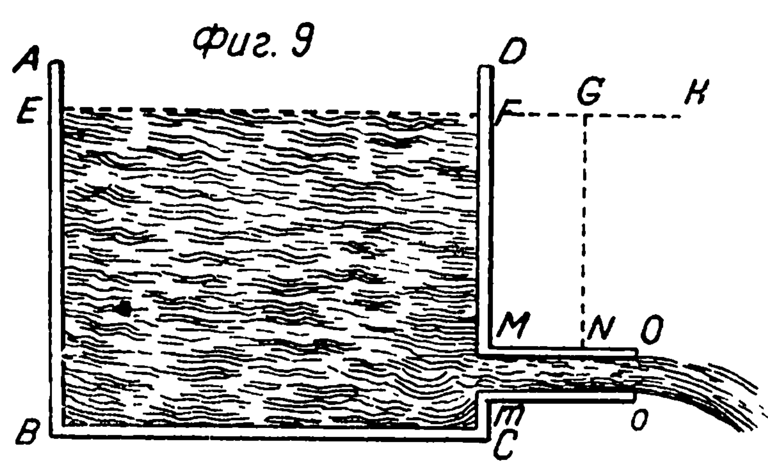
К § 5. О капиллярных трубках. Различными лицами были произведены бесчисленные опыты касательно свойств указанных трубок; среди этих лиц выдается Георгий-Бернгард Бильфингер [31], который не только собрал наиболее важные опыты, но и прибавил к ним очень много своих (см.: Комментарии имп. Академии наук в Петербурге, т. 2, стр. 233 и след.).

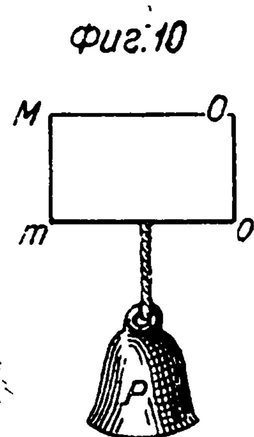
I. Для того чтобы стало вполне очевидным, насколько различны свойства ртути и других жидкостей, я распорядился изготовить стеклянный сосуд *ABC* (фиг. 11), состоящий из двух вертикальных колен, из которых одно, *AB*, имело диаметр в 3 или 4 линии, а другое, *BC*, — едва в одну третью часть линии. Когда этот сосуд наполняли какой-либо жидкостью, то поверхность оказывалась выше в более узком колене, чем в более широком, занимая, например, положения *D* и *G*; лишь одна ртуть стоит ниже в более узком колене, чем в более широком; поверхности расположены, например, в *F* и *G*.

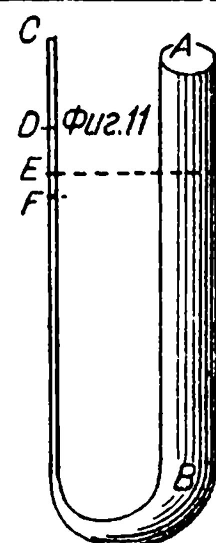
II. С целью показать, что ртуть отступает от природы других жидкостей только в силу большего взаимного притяжения своих частиц, я придумал следующие опыты. Я заполнял ртутью путем всасывания тоненькую трубку, расположенную горизонтально, а затем осторожно переводил ее в вертикальное положение. Тогда ртуть начинала вытекать, но никогда не вытекала полностью, и вертикальная высота ртути, остававшейся в трубке, оказывалась при любом положении одной и той же. Если же в то время, как ртуть таким образом висит в трубочке, конец трубки погрузить в ртуть, покоящуюся в сосуде, то вся ртуть тотчас же вы-

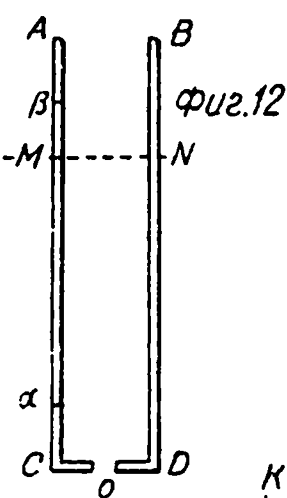
текает. Предыдущие явления, если не ошибаюсь, указывают на то, что со ртутью и другими жидкостями происходит одно и то же, когда совершенно отсутствует притягательная сила; последнее же явление показывает, что ртуть обладает очень сильным взаимным притяжением.

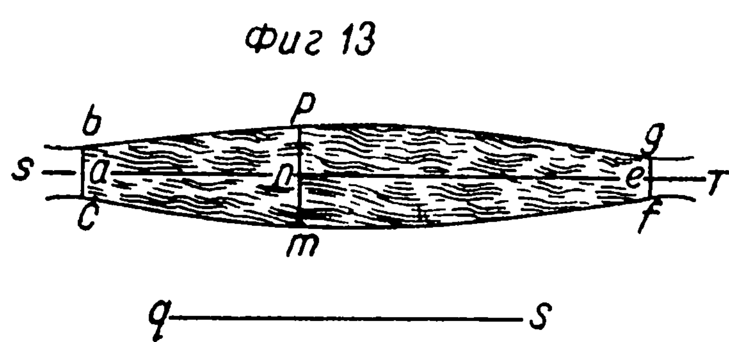
III. Возьмем цилиндрическую стеклянную трубу диаметром в 3 или 4 линии, снабженную дном из тонкой бумаги или изготовленным из очень тонкого железного листа, причем посредине его просверлено очень малое отверстие, как это показано на фиг. 12. Наклоним трубку $ACDB$ и наполним всю ее ртутью, после чего осторожно поставим отвесно. Тогда произойдет то же, что мы раньше наблюдали, и хотя бы трубка была очень широкой, тем не менее не вся ртуть из нее вытечет, но некоторая часть ее, например $MCDN$, задержится, причем последняя будет тем больше, чем меньше отверстие o. Когда затем дно трубки погружается в ртуть, содержащуюся в другом сосуде, на малую глубину так, чтобы погруженная часть трубки была $C\alpha$, то ртуть не только не поднимается в трубке до b (разумеется, если принять $C\alpha = Mb$), но и вся почти вытекает, пока поверхность ее MN не достигнет α. После этого я погрузил пустую трубку $ACDB$ достаточно глубоко в ртуть, находившуюся в другом сосуде, но она начала вытекать из сосуда в трубку не раньше, чем последняя была погружена на глубину CM; после этого ртуть стала быстро втекать из сосуда в трубку до тех пор, пока уровень в трубке не дойдет до MN, если до этого места она была погружена. Все вышеизложенное можно легко вывести из взаимного притяжения ртутных частиц. Сверх того я постарался исследовать отношение, какое существует между высотой MC и размером отверстия o. Правдоподобным представляется, во всяком случае, что указанная высота находится в обратном отношении к диаметру отверстия. Однако я не мог на опыте в достаточной мере подтвердить этой догадки как вследствие нечистоты ртути, которой я пользовался, благодаря чему при повторных опытах с неизменным отверстием высота задержавшейся ртути оказывалась не совсем одинаковой, так и вследствие того, что трудно точно измерить

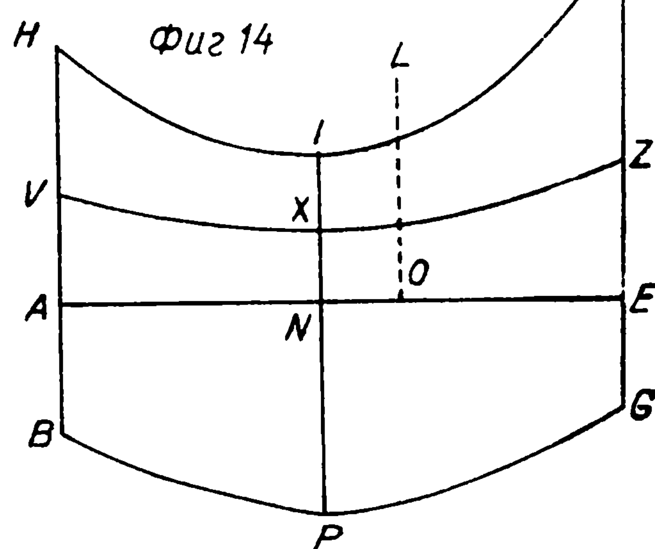

Фиг. 9
A
E
B
D
F
G
K
M
N
O
m
C
o

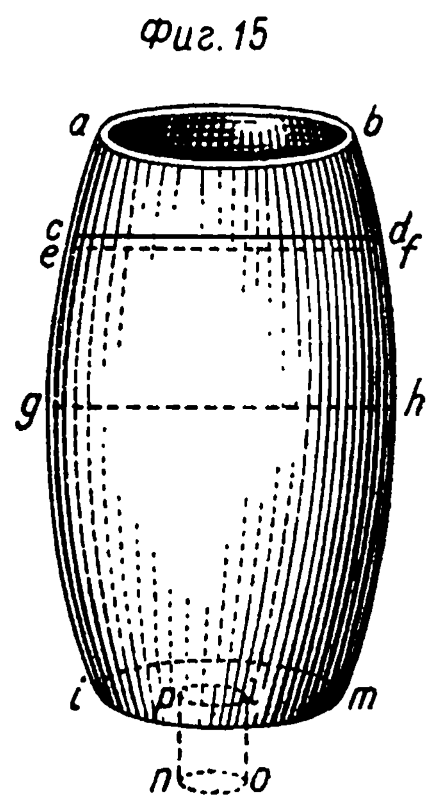

Фиг.10
M
O
m
o
P

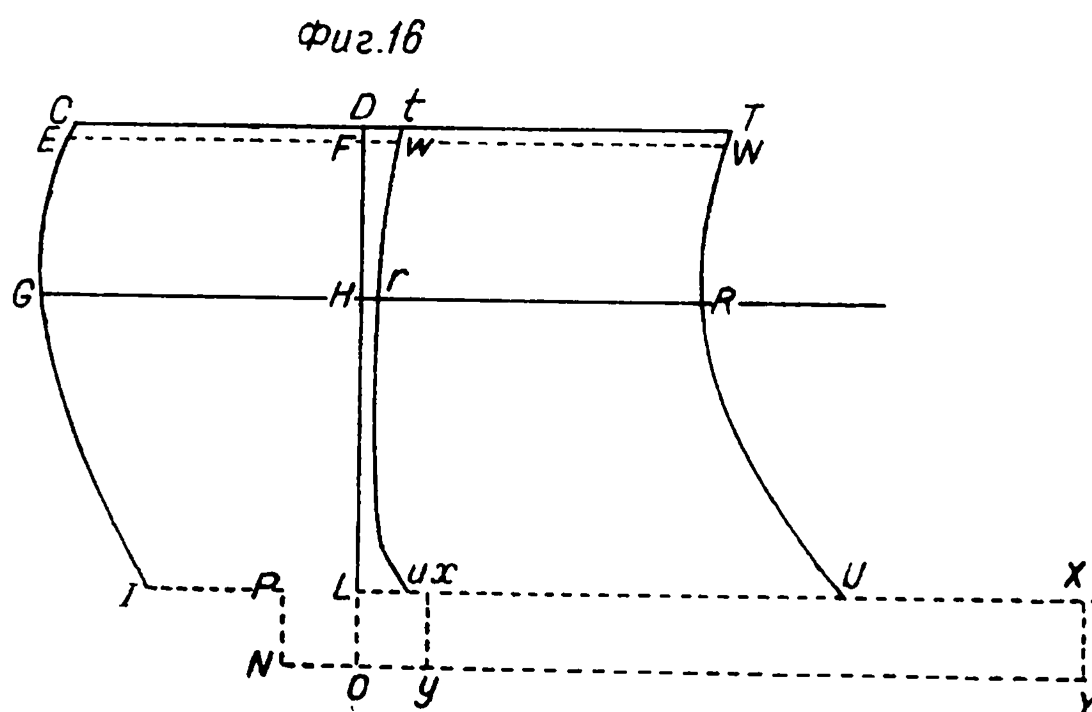

C
A
D
Фиг.11
E
F
G
B


A
B
Фиг.12
β
M
N
α
C
o
D


Фиг 13
b
p
g
s
a
n
e
T
c
m
f
q
s


Фиг 14
H
K
L
I
Z
V
X
O
A
N
E
B
G
P


Фиг. 15
a
b
c
d
e
f
g
h
i
p
m
n
o
q
s
z


Фиг.16
C
D
t
T
E
F
w
W
G
H
r
R
I
P
L
u
x
U
X
N
O
y
Y

очень малые отверстия. Действительно, отверстия должны быть очень малыми, так как высота задержавшейся ртути составляет едва 6 или 8 линий, когда диаметр отверстия равен шестой части линии. Я расскажу, однако, каким методом я воспользовался. Я просверливал отверстие в листе медными проволоками различной толщины, какие применяются в музыкальных инструментах, причем их малые диаметры я определял очень точно на основании их длины и веса, но при этом обычно вокруг краев отверстия образуются бахромы, задерживающие вытекание, и легко случается, что отверстие оказывается бо́льшим, чем толщина нити.

К § 18. О прочности труб. Круглая медная нить, диаметр которой был равен $^2/_{11}$ парижских линий и к которой последовательно подвешивались все большие грузы, разорвалась лишь тогда, когда груз превысил 18 нюренбергских фунтов. Затем я наблюдал, что весьма тонкая, прямоугольной формы, свинцовая пластинка, шириной в $^5/_4$ линии и толщиной в $^1/_{131}$ линии, разорвалась, когда к ней был подвешен груз в $3^1/_2$ унции. Из этих двух наблюдений следует, что при прочих равных условиях нить из меди более чем в 28 раз крепче нити из свинца. Из первого опыта можно также вывести, что если бы медная труба имела диаметр в 1 фут, а толщина ее стенок составляла $^2/_{11}$ линии, то она могла бы выдержать до своего разрыва воду до высоты в 518 футов. При этом расчете я приписал кубическому футу воды вес 70 фунтов. Но если бы та же труба была свинцовой, то в силу второго наблюдения она выдержала бы воду до высоты 18 футов, и она была бы в состоянии выдержать воду почти до высоты 99 футов, если бы стенки этой трубы были толщиной в 1 линию. Сказанное находится в соответствии с тем, что имеется в трактате «О движении вод» (стр. 472) Мариотта где последний сообщает, что он производил наблюдения над свинцовой трубой, диаметр которой составлял 1 фут при толщине стенок в $2^1/_2$ линии и которая поддерживала без своего разрыва воду до высоты в 100 футов; когда же он стал постепенно обскабливать ее стенки до тех пор, пока в конце концов толщина их

не уменьшилась до одной линии, то тогда, наконец, сила воды разорвала трубу.

Из наблюденной прочности медной нити становится понятной и прочность военных метательных орудий. Так, например, если взять военное метательное орудие, дуло которого имеет диаметр в 3 пальца, то недалеко от зажигательного отверстия, где сила пороха оказывается наибольшей, толщина стенок бывает обычно приблизительно равна диаметру дула, так что весь диаметр орудия втрое больше диаметра дула. Поэтому, так как указанной толщиной нельзя пренебречь по сравнению с диаметром дула, мы будем считать, что вся масса сосредоточена по середине и что, таким образом, она находится на расстоянии 3 пальцев от оси дула. При указанных предпосылках наибольшая высота воды, которую метательный снаряд может поддержать недалеко от зажигательного отверстия, равна $\frac{11}{2} \times 12 \times 3 \times 2 \times 518 = 205\,128$, каковая сила почти в 7000 раз превышает упругость естественного воздуха. В дальнейшем же я покажу, что воспламененный порох может развить силу для разрыва метательного орудия даже несколько большую той, какая была указана выше, однако не намного ее превосходящую. Избыток же прочности, которого требуют метательные орудия, они получают от поясов или повязок, которые называются plattes, bandes et moulures; кроме того, у казенной части метательного орудия (á l'endroit de la culasse) толщина превышает ту, которую мы приняли. Но в то же время мы не будем так удивляться тому, что немалое количество метательных орудий разрывается.

ГИДРОДИНАМИКИ
ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

О скоростях жидкостей, вытекающих из любым образом устроенного сосуда через любое отверстие

§ 1 [32]. Раньше чем попытаться определить движение жидкостей, вызываемое собственной их тяжестью, мы повторим то, что было изложено нами в первой части, в §§ 18, 19, 20, 21 и 22, о началах, которые должны быть для этого применены.

А именно, мы напомним, что потенциальный подъем системы, каждая из частей которой движется с любой скоростью, обозначает вертикальную высоту, какой достигает центр тяжести указанной системы, если представить себя, что каждая из ее частиц при обращенном вверх движении поднимается, насколько она может, под влиянием собственной скорости, а действительное снижение обозначает вертикальную высоту, на которую снижается центр тяжести после того, как каждая из частиц пришла в состояние покоя. Затем мы также вспомним, что потенциальный подъем необходимо должен быть равен действительному снижению, когда все движение остается в подверженной ему материи и никакая часть его не переходит в неощутимую материю или в какую-либо иную материю, не принадлежащую к данной системе, и, наконец, что движение жидкостей приблизительно таково, что повсюду скорость обратно пропорциональна соответствующему сечению сосуда, о чем я в надлежащем месте прибавлю еще кое-что другое.

Теперь надлежит исследовать нижеприведенное предложение.

Задача

§ 2. Определить потенциальный подъем всей воды, содержащейся в трубе, если вода течет по трубе любой формы и если известна ее скорость в каком-либо месте.

Решение

Пусть имеется трубка любой формы ST (фиг. 13 и 14), по которой течет вода $bcfg$; допустим, что если взять на оси ae какую-нибудь точку n, через которую перпендикулярно к оси проходит плоскость pm, то все частицы воды, расположенные в этой плоскости, будут течь с одинаковой скоростью, причем эта скорость такова, что она повсюду обратно пропорциональна величине сечения pm. Пусть скорость воды в gf такова, что она соответствует вертикальной высоте qs, т. е. пусть потенциальный подъем струи воды в gf равен прямой qs: так как подобного рода высоты находятся между собой в отношении квадратов скоростей, то отсюда следует, что потенциальный подъем воды в pm равен четвертой пропорциональной квадрата величины сечения pm, квадрата величины сечения gf и высоты qs, т. е. $\frac{gf^2}{pm^2} \times qs$. После этих предварительных замечаний допустим, что на фиг. 14 имеется кривая BPG — шкала сечений трубы, так что если положить $AN = an$, то NP будет обозначать величину сечения pm. Затем, пусть кривая HIK является шкалой потенциальных подъемов, так что получится $NI = \frac{EG^2}{NP^2} \times qs$. Представим себе теперь, что каждый отдельный элемент кривой HIK имеет вес, равный весу соответствующей струи воды и что центр тяжести указанной кривой находится в точке L. Проведем еще LO перпендикулярно к оси AE; тогда LO будет представлять собой искомый потенциальный подъем всей воды. А из механики известно, что если провести третью кривую VXZ, ордината которой NX повсюду равна $\frac{EG^2}{NP}$, то LO будет равно четвертой пропорциональной площадей $AEGB$ и $AEZV$ и линии qs или EK. Таким образом, искомое выявлено.

§ 3. Пусть, например, имеется коническая труба, в которой передняя поверхность gf и задняя bc имеют диаметры, относящиеся друг к другу, как m к p; тогда потенциальный подъем воды будет равен

$$\frac{3m^3}{n\,(m^2+mn+n^2)} \times qs.$$

Задача

§ 4. Определить изменения потенциального подъема всей воды при заданных бесконечно малых изменениях как в отношении положения, так и скорости, соответствующих передней поверхности воды.

Решение

Пусть площадь $AEGB = M$, площадь $AEZV = N$, $qs = v$; тогда потенциальный подъем равен $\frac{Nv}{M}$. Но так как количество воды в трубе предполагается постоянно одним и тем же, то площадь $AEGB$ будет неизменной и, стало быть, $dM = 0$, так что дифференциал потенциального подъема просто равен $\frac{Ndv + vdN}{M}$, а dN получается из изменения положения воды. Таким образом, искомое выявлено.

Пояснение

§ 5. Приведенные выше предложения, как я это покажу в надлежащем месте, могут быть использованы для определения движения жидкости, движущейся внутри сосудов, т. е. из них не вытекающей. Но если жидкость вытекает через отверстие, то более удобно будет иное вычисление, а именно то, которое следует ниже.

Задача

§ 6. Определить изменение потенциального подъема после того, как небольшая капля вытекла через отверстие.

Решение

Представим себе, что вода вытекает из сосуда *aimb* (фиг. 15) любой формы, имеющего дно *im*, в котором просверлено отверстие *pl*. Пусть количество воды, оставшейся в сосуде после того, как заданное количество ее уже вытекло, составляет *cimd*. За бесконечно малый промежуток времени вытечет капелька *pnol*, причем поверхность жидкости *cd* снизится до положения *ef*. Вообразим внутри воды сечение *gh*, параллельное поверхностям *cd* или *ef*, а также дну *im*, и пусть скорость одной какой-либо частицы в *gh* такова, что частица могла бы подняться на высоту *qs* или v, пока капелька еще не вытекла, и на высоту *qz* или $v+dv$, после того как указанная капелька вытекла. При всех указанных выше допущениях требуется определить приращение потенциального подъема воды после того, как она изменила положение *cimd* на положение *eipnolmf*, т. е. после того, как капелька вытекла.

Построим, как и раньше, кривую *CGI* (фиг. 16), или шкалу сечений, где именно *CD* и *EF* будут представлять размеры поверхности воды до и после вытекания капельки, *GH* — принятое выше сечение, *IL* — величину дна, *PL* — величину отверстия, между тем как прилегающий снизу очень маленький параллелограмм *PNOL* соответствует цилиндрической капельке *pnol* (фиг. 15). Построим затем другую кривую *TRU*, ординаты которой попрежнему равны квадрату прямой *GH*, разделенному на соответствующую ординату кривой *CGI*; к этой кривой при том же условии присоединен маленький параллелограмм *LOYX*, сторона которого *LX* равна квадрату прямой *GH*, разделенному на прямую *PL*.

Таким образом, уже ясно, что потенциальный подъем воды до вытекания капельки равен четвертой пропорциональной площади *DCIPL*, площади *DTUL* и высоты *qs*, а после вытекания он равен четвертой пропорциональной площади *FEIPNOL*, площади *FWUXYOL* и высоты *qz*. Но в обоих этих аналогичных положениях первочлены (а именно, площадь *DCIPL* и площадь *FEIPNOL*) между собой равны; следовательно, если любую из

этих площадей обозначить через M, площадь $DTUL$ — через N, площадь $FWUXYOL$ — через $N+dN$, высоту qs — через v и qz — через $v+dv$, то приращение потенциального подъема во время вытекания капельки будет равно $\frac{Ndv+vdN}{M}$. Если же теперь положить $LD=x$, $FD=-dx$, $DC=y$, $HG=m$, $PL=n$, то будет $DT=\frac{m^2}{y}$, $LX=\frac{m^2}{n}$, $LO=\frac{-ydx}{n}$ (так как площадь $DFEC$ равна площади $LONP$), а отсюда $dN=LOYX-DFWT=$ $=-\frac{m^2ydx}{n^2}+\frac{m^2dx}{y}$, откуда искомое приращение потенциального подъема равно $\left(Ndv-\frac{m^2vydx}{n^2}+\frac{m^2vdx}{y}\right):M$, что и требовалось определить.

Задача

§ 7. Определить бесконечно малое действительное снижение воды, пока капелька вытекает при сохранении тех же положений.

Решение

Когда (фиг. 15) вода изменяет свое положение $cdmi$ на положение $efmlonpi$, то ясно, что в обоих положениях центр тяжести части воды $efmi$ пребывает в одном и том же месте, а в силу этого можно считать, что только тонкий слой $cdfe$ [равный $-ydx$, между тем как вся масса воды равна M] снизился в $lonp$. Пусть, далее, высота слоя $cdfe$ над капелькой $lonp$ равна x, высота центра тяжести воды $efmi$ над дном равна b; тогда высота центра тяжести всей воды в положении $cdmi$ над дном будет равна $b-\frac{ydx}{M}\times(x-b)$, а в положении $efmlonpi$ эта же высота будет равна $\frac{M+ydx}{M}\times b$; отсюда разность высот (или искомое действительное снижение) равна $\frac{-ydx}{M}\times x$. Это уравнение показывает, что для получения действительного снижения, вызываемого вытеканием капельки, следует вытекающую капельку умножить на высоту воды над отверстием и произведение разделить на количество воды, что и требовалось определить.

Задача

§ 8. Определить движение однородной жидкости, вытекающей из заданного сосуда через заданное отверстие.

Решение

Так как, согласно нашему допущению, потенциальный подъем в отдельные моменты равен действительному снижению, то приращение первого, покуда капелька вытекает, равно приращению последнего, происходящему за такой же малый промежуток времени. Следовательно, если снова поверхность воды после вытекания заданной части ее положить равной y, сечение сосуда в каком-либо произвольно взятом месте — m, сечение отверстия — n, высоту воды над отверстием — x, и если сверх того величина N строится согласно тому закону, который был указан в § 6, и под v подразумевается высота, соответствующая скорости воды в рассматриваемом месте, т. е. там, где сечение сосуда равно m, то, согласно § 6, приращение потенциального подъема будет равно $\left(Ndv - \frac{m^2vydx}{n^2} + \frac{m^2vdx}{y}\right) : M$, а весьма малое действительно снижение будет равно $\frac{-yxdx}{M}$ (согласно предшествующему параграфу).

Отсюда получается

$$\left(Ndv - \frac{m^2vydx}{n^2} + \frac{m^2vdx}{y}\right) : M = -yxdx : M,$$

или

$$Ndv - \frac{m^2vydx}{n^2} + \frac{m^2vdx}{y} = -yxdx,$$

каковое уравнение может быть вообще проинтегрировано, так как буквы N и y являются заданными функциями x, а буква v является величиной одного лишь измерения.

Следствие 1

§ 9. Так как скорости находятся в обратном отношении к сечениям, то ясно, что высота, соответствующая скорости вытекаю-

щей воды, равна $\frac{m^2}{n^2}v$; поэтому, если последнюю обозначить через z, то будет

$$n^2Ndz - m^2zydx + \frac{m^2n^2zdx}{y} = m^2yxdx.$$

Следствие 2

§ 10. Если отверстие очень мало по сравнению с сечениями сосуда, то получается $n=0$ и все уравнение превращается в следующее:

$$-m^2zydx = -m^2yxdx,$$

или $z=x$; таким образом, в данном случае вода вытекает все время с той скоростью, с какой она могла бы подняться до высоты верхнего уровня, что является до сих пор единственным случаем, правильно понятым геометрами; и это предложение имеет силу для всех сосудов любой формы. Но если отверстие не рассматривается как бесконечно малое, то никак нельзя пренебрегать формой сосуда. Можно, однако, отметить, что если только отверстие не очень велико, то без весьма заметной погрешности его можно рассматривать как бесконечно малое.

Следствие 3

§ 11. Если жидкость не является повсюду одинаковой, то вычисление следует произвести подобным же образом, т. е. исследуя как приращение потенциального подъема, так и действительного снижения и приравнивая их друг к другу. Если же отверстие очень мало, то само по себе ясно, что показывает и вычисление, что жидкость будет вытекать со скоростью, соответствующей такой высоте, что если бы сосуд был до этой высоты заполнен жидкостью, которая вытекает, то стенки отверстия выдерживали бы то же самое давление.

Общее пояснение

§ 12. Прежде чем мы станем выводить из своей теории более специальные следствия о движении жидкостей из цилиндрических сосудов, будет уместно здесь исследовать, в какой мере

принятые допущения соответствуют природе вещей и какие могут встретиться иные, не принятые нами совершенно в расчет, причины, которые ослабляют движение жидкостей.

Во-первых, что касается начала сохранения живых сил или постоянного равенства между потенциальным подъемом и действительным снижением, то я не вижу здесь ничего, что могло бы послужить для него заметным препятствием, если только мы отвлечемся от трений, вязкости, сопротивления воздуха и от других подобных помех. Конечно, зачастую случается, что названное начало не может быть применено без ограничения, как это мы покажем в дальнейшем, а именно, когда отдельные частицы воды перемещаются различным движением, в результате чего получается, что в отдельные моменты теряется некоторая часть движения, или, если вам угоднее, потенциального подъема. Однако в настоящем случае не происходит ничего подобного, так как все частицы движутся почти одинаково; в особенности, когда отверстие очень мало, движение внутренних частиц почти отсутствует, и, следовательно, отсюда не может получиться никакой потери. Другое же начало, согласно которому допускается, что любая частица обладает такой скоростью, которая соответствует обратному отношению сечений, страдает, конечно, двумя пороками: во-первых, тем, что движение возле стенок сосуда происходит несколько медленнее, чем посередине, вследствие чего не все частицы, соответствующие одному и тому же сечению сосуда, движутся с одной и той же скоростью, и, во-вторых, тем, что вода, расположенная не очень далеко от дна, не может обладать тем движением, какого требует указанное начало. Но ни один из них не влечет за собой какой-либо ощутимой погрешности, поскольку в настоящей простой задаче внутренняя форма сосуда почти не влияет на движение вытекающей воды В силу того же соображения понятно, что не на много отличным может быть движение воды, вытекающей в каком-либо ином направлении, так как, разумеется, внутреннее движение воды является различным лишь в самой нижней части сосуда, и это различие не

может иметь почти никакого значения. Таким образом, ясно, что допущения, на которых основывается вычисление по настоящей нашей задаче, в такой мере согласуются с сущностью вопроса, что отсюда не может получиться какой-либо уловимой ошибки. Но, конечно, упомянутые раньше сопротивления, трение, вязкость жидкости и другие, им подобные, являются более эффективными, в особенности, если отверстие, через которое жидкости выбрасываются, очень мало, или же если высота воды над отверстием очень велика, или, наконец, если трубка очень тонка, по поводу чего очень много опытов имеется у Мариотта в трактате «О движении вод». Теперь же я перехожу к исследованию движения воды, вытекающей из цилиндрических сосудов через отверстия любого размера. Сосуды же, в интересах краткости и большой стройности решения, мы будем рассматривать расположенными вертикально.

О том, что относится к вытеканию воды из вертикально расположенных цилиндров через любое отверстие, имеющееся в горизонтальном дне

§ 13. Геометры, исследовавшие движение вод, вытекающих из сосуда, обычно рассматривают главным образом вертикально расположенные цилиндры. Следовательно, будет небесполезно вывести из нашей общей теории то, что имеет отношение к данному случаю. Пусть сечение цилиндра относится к сечению отверстия, как m к n; высота воды над отверстием, когда вытекание начинается, равна a; высота оставшейся воды равна x; высота, соответствующая скорости внутренней воды, равна v; тогда в каноническом уравнении § 8 $y = m$, $N = mx$ (согласно § 6), в силу чего оно перейдет в следующее уравнение:

$$mxdv - \frac{m^3}{n^2} vdx + mvdx = -mxdx,$$

или

$$\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) vdx + xdv = -xdx.$$

Умножим последнее уравнение на $x^{\frac{-m^2}{n^2}}$, так что получится

$$\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)x^{\frac{-m^2}{n^2}}v\,dx+x^{1-\frac{m^2}{n^2}}dv=-x^{1-\frac{m^2}{n^2}}dx.$$

Это уравнение может быть проинтегрировано, но при интегрировании следует прибавить постоянную величину, а именно такую, чтобы в начале истечения, т. е. когда $x=a$, жидкость не обладала никакой скоростью, т. е. чтобы v было равно 0. Тогда получится

$$x^{1-\frac{m^2}{n^2}}v=\frac{n^2}{2n^2-m^2}\left(a^{2-\frac{m^2}{n^2}}-x^{2-\frac{m^2}{n^2}}\right),$$

или

$$v=\frac{n^2a}{2n^2-m^2}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2}{n^2}}-\frac{x}{a}\right).$$

§ 14. Таким образом, из последнего уравнения можно найти высоту, определяющую скорость внутренней воды. При этом заслуживает быть отмеченным, что если сосуд очень широк, можно вскоре принять $v=\frac{n^2}{m^2}x$, разумеется после того, как вода хотя бы немного снизится, т. е. тотчас, как x станет немного меньше a. Это правило заметно нарушается лишь по отношению к самому началу движения; если рассмотреть этот первый элемент движения (в течение которого естественно высоту $a-x$ можно считать бесконечно малой), то уравнение показывает, что в этом случае $v=a-x$. Отсюда следует, что во всяком цилиндре, каково бы ни было отверстие, внутренняя вода в начале движется ускоренно, подобно свободно падающим телам. Если же движение будет хоть сколько-нибудь длиться, то указанное правило будет тем меньше нарушаться, чем больше отверстие и чем выше вода в трубе. Далее, если желательно определить высоту, которая соответствует скорости вытекающей воды и которую в § 9 мы положили равной z, то будет $z=\frac{m^2}{n^2}v$, или

$$z=\frac{m^2a}{2n^2-m^2}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2}{n^2}}-\frac{x}{a}\right).$$

§ 15. Когда $n = m$, т. е. когда нет никакого дна, то из самого существа дела явствует, что вода падает свободно, подобно тяжелым телам, и движется ускоренно; на это же указывает и уравнение, ибо в этом случае получается $z = a - x$. Если же отверстие как бы бесконечно мало по сравнению с сечением сосуда, какой случай мы уже рассмотрели выше, то следует положить $n = 0$, и тогда $z = x$. Последнее показывает, что вода все время вытекает с той скоростью, с какой она могла бы подняться на всю высоту воды. Наконец, когда $m^2 = 2n^2$, получается $z = \frac{m^2}{0}(x - x)$. Так как из этого уравнения ничего нельзя определить, следует обратиться к диференциальному уравнению § 13, которое теперь имеет следующий вид:

$$-vdx + xdv = -xdx, \text{ или } \frac{xdy - vdx}{x^2} = \frac{-dx}{x};$$

после интегрирования и прибавления должной постоянной это уравнение дает $\frac{v}{x} = \log \frac{a}{x}$, или $v = x \log \frac{a}{x}$, либо

$$z = 2v = 2x \log \frac{a}{x}.$$

§ 16. Скорость вытекающей воды сначала растет, а затем убывает; где-то она становится максимальной, а именно, при снижении воды до высоты $a : \left(\frac{m^2 - n^2}{n^2}\right)^{n^2 : (m^2 - 2n^2)}$; на это же указал на основании опыта Мариотт в трактате «О движении вод» (ч. 3, разд. 3, опыт 5). Максимальная скорость — это та скорость, которая соответствует высоте

$$\frac{m^2 a}{m^2 - 2n^2} \times \left[\left(\frac{n^2}{m^2 - n^2}\right)^{n^2 : (m^2 - 2n^2)} - \left(\frac{n^2}{m^2 - n^2}\right)^{(m^2 - n^2) : (m^2 - 2n^2)}\right];$$

последняя величина после преобразования становится равной $\frac{m^2 a}{m^2 - n^2}\left(\frac{n^2}{m^2 - n^2}\right)^{n^2 : (m^2 - 2n^2)}$.

Из этих формул понятно, что время, за которое скорость от нуля доходит до максимума, является совершенно неощутимым, даже когда отверстие умеренно мало, а труба не очень длинна;

но оно становится заметным, когда дело обстоит иначе, что мы наблюдаем в бьющих фонтанах, к которым воды доставляются по длинным путям. А о том, что касается времен, будет изложено преимущественно в следующей части и одновременно там будет показано, как мало воды выбрасывается из очень широких сосудов раньше, чем вода начнет вытекать с максимальной скоростью.

Природа скоростей может быть лучше понята с помощью приложенной фиг. 17, где, если AB представляет всю высоту жидкости над отверстием в начале вытекания, то кривые $A1CB$, $A2CB$, $A3CB$, $A4CB$ выражают шкалы соответствующих высот, до которых вытекающая жидкость могла бы подняться со своей скоростью при различных размерах отверстия. А именно, шкала приближается к рисунку $A1CB$, когда отверстие находится в малом отношении к сечению сосуда, и к рисунку $A2CB$, когда берут дно с просверленным большим отверстием; если же отношение отверстия к сечению трубки равно отношению 1 к 2, то шкала подобна $A3CB$ (в этом случае максимальная скорость оказывается меньше, чем в каком-либо ином, а именно, она представляет такую скорость, которая соответствует высоте $\frac{2a}{c}$, где под c следует понимать число, логарифм которого равен единице, т. е. высоте несколько меньшей, чем $\frac{3}{4}\,a$), и, наконец, шкала становится подобной $A4CB$, когда от дна почти ничего не остается.

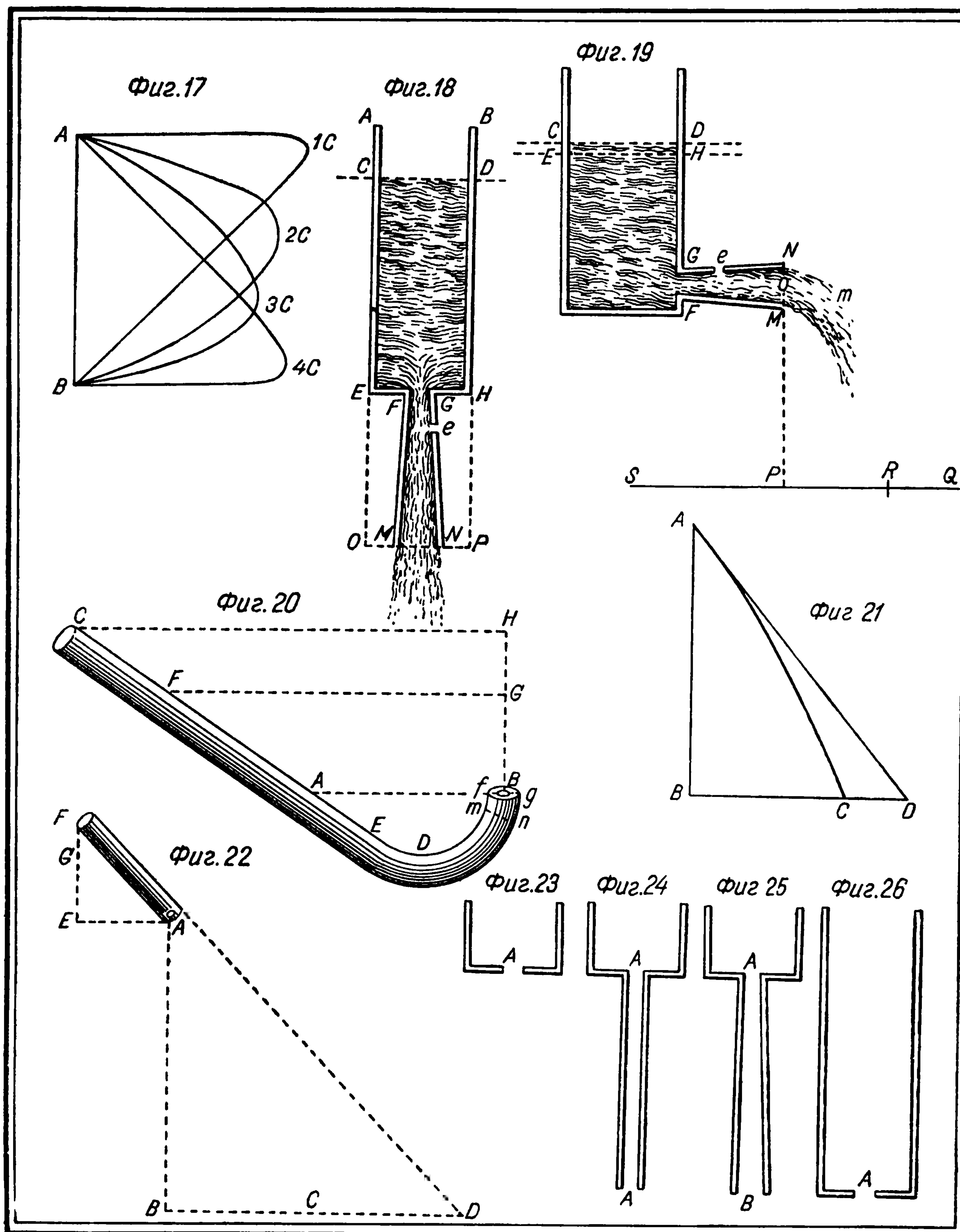
§ 17. Поясним теперь на некотором примере то, что было указано выше в § 10, а именно, что если только отверстие не является очень широким, то без очень ощутимой погрешности его можно рассматривать при вычислении как бесконечно малое, и в силу этого принять $z=x$, как это было сказано в §§ 10 и 15. Повидимому, этому обстоятельству придавали значение лишь немногие авторы, когда полагали, что никогда не следует принимать во внимание размера отверстия, каким бы большим последнее ни было взято, что, конечно, представляется смешным. Во всяком случае до сих пор, насколько я знаю, никто правильно не учитывал размера отверстия в связи с данным вопросом. Итак, пред-

ставим себе цилиндр, диаметр которого лишь вчетверо больше диаметра отверстия (такого рода большие отверстия обычно редко встречаются в гидравлических устройствах), и вообразим, что поверхность воды снизилась лишь на сотую часть всей первоначальной высоты я допускаю, что она снизилась лишь немного, так как в самом начале вода не может обладать каким-либо движением, не говоря уже о таком движении, чтобы вытекающая вода могла с помощью собственного движения подняться на всю высоту). Приведенные выше условия дают $m = 16n$, $m^2 = 256\,n^2$, а также $x = \frac{99}{100}\,a$, откуда получается

$$z = \frac{128}{127}\left(\frac{99}{100} - \left(\frac{99}{100}\right)^{255}\right) a = \frac{92}{100}\,a;$$

последнее, конечно, несколько отличается от величины x, т. е. от $\frac{99}{100}\,a$, однако не очень сильно, и разность становиться намного меньше, когда отверстие меньше и когда несколько больше снижается поверхность воды. Итак, настоящая теория дает для начала истечения меньшую скорость, чем прежние теории; наоборот, к концу истечения вода выбрасывается с большей скоростью, чем это следует из общепринятых начал.

§ 18. До сих пор мы рассматривали движение воды, вызываемое собственной ее тяжестью. Допустим теперь, что вода была выброшена, помимо силы тяжести, посторонней силой, причем вытекающей воде была сообщена такая скорость, что при ней она могла бы подняться на гораздо большую высоту, чем если бы движение было вызвано одной лишь тяжестью воды; пусть затем указанная выше посторонняя сила внезапно исчезла, и вода была предоставлена самой себе. Опыт показывает, что когда это происходит, то скорость воды очень быстро уменьшается и вскоре становится такой, что она заметно не превышает той скорости, какая получилась бы лишь благодаря тяжести воды. Так, иногда мы наблюдаем в бьющих фонтанах (об истинной причине этого явления и его величине я буду говорить особо), что воды подскакивают на высоту, которая превышает обычную высоту втрое,



Фиг.17
A
B
1C
2C
3C
4C
Фиг.18
A
B
C
D
E
F
G
H
e
O
M
N
P
Фиг. 19
C
D
E
H
G
e
N
O
m
F
M
S
P
R
Q
Фиг.20
C
H
F
G
A
f
B
g
m
n
E
D
Фиг 21
A
B
C
D
Фиг.22
F
G
E
A
B
C
D
Фиг.23
A
Фиг.24
A
Фиг 25
A
B
Фиг.26
A

вчетверо или больше; после того как это произойдет, указанный скачок сразу исчезает, и высота воды, насколько об этом можно судить по восприятию, не превышает обычной. Однако я имею в виду трубы, пробуравленные не очень большими отверстиями, ибо когда отверстие гораздо больше, то скачок воды уменьшается не столь быстро. Итак, исследуем теперь, в какой мере теория находится в согласии с указанными выше явлениями и прибавим к этому точные меры их, которые отсюда получатся. А для того чтобы исследовать данный вопрос в общем виде, мы снова допустим, что сечение цилиндра относится к сечению отверстия, как m к n; что вода выталкивается с такой скоростью, с какой она могла бы подняться на высоту α; что в этот же самый момент времени высота воды над отверстием равна a, причем теперь только собственная тяжесть выталкивает воду; что затем поверхность воды в цилиндре снижается на вертикальную высоту $a-x$, так что оставшаяся высота равна x, и что тогда скорость выбрасываемой воды становится такой, какая соответствует высоте z. При вышеизложенных допущениях воспользуемся общим дифференциальным уравнением § 9, которое имеет следующий вид:

$$n^2Ndz - m^2zydx + \frac{m^2n^2zdx}{y} = -m^2yxdx,$$

где снова, как это было указано в § 13, $y = m$, $N = mx$; это уравнение в нашем частном случае приобретает следующий вид:

$$\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)zdx + xdz = -\frac{m^2}{n^2}xdx;$$

последнее, будучи умножено на $x^{\frac{-m^2}{n^2}}$ и затем проинтегрировано таким образом, чтобы, положив $x = a$, получить $z = \alpha$, даст следующее искомое окончательное уравнение:

$$z = \left(\frac{m^2}{2n^2 - m^2} + \frac{\alpha}{a}\right)a^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}} \times x^{\frac{m^2-n^2}{n^2}} - \frac{m^2}{2n^2 - m^2}x,$$

или

$$z = \frac{m^2a}{2n^2 - m^2}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2}{n^2}} - \frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2-n^2}{n^2}}\alpha.$$

Если эту высоту сравнить с той, какая была указана в § 14, то получается, что избыток одной над другой равен $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2-n^2}{n^2}}\alpha$. На основе последнего подтверждаются все те явления, которые были только что указаны. А именно, упомянутый выше избыток, если m является числом, гораздо большим, чем n, становится тотчас же неощутимым, как только вода хоть сколько-нибудь снизится, т. е. спустя очень короткий промежуток времени, но он полностью все-таки не исчезает, пока продолжается истечение, и, наконец, он постоянно является тем более заметным, чем больше отношение числа m к n приближается к их равенству. Так, например, пусть диаметр трубы в 10 раз больше диаметра отверстия, и вода выталкивается при посредстве такой силы, что она могла бы со своей скоростью подняться на высоту, вчетверо превышающую высоту a, т. е. высоту воды над отверстием. Спрашивается, на какую высоту будет в состоянии подняться вытекающая вода со своей скоростью после того, как поверхность воды в трубе снизится на одну тысячную долю a, если тем временем вода будет побуждаться к истечению только собственной тяжестью, и затем, какая получилась бы аналогичная высота, если бы вода не обладала начальной скоростью. При этом мы имеем $m = 100n$, $m^2 = 10\,000n^2$, $x = \frac{999}{1000}a$, $\alpha = 4a$. Отсюда в первом случае получается

$$z = \left[\frac{10\,000}{9998}\left(\frac{999}{1000} - \left(\frac{999}{1000}\right)^{9999}\right) + 4\left(\frac{999}{1000}\right)^{9999}\right]a,$$

или

$$z = \frac{99\,915}{100\,000}a + \frac{18}{100\,000}a,$$

во втором же случае получается $z = \frac{99915}{100\,000}a$.

Из приведенного примера явствует, насколько малым и прямо неощутимым является избыток первой высоты над второй и насколько быстро уменьшается упомянутый выше скачок воды, так как все изменение происходит, пока поверхность воды снижается на тысячную долю высоты a, каковое время в обычных

гидравлических машинах не может не быть очень коротким. Далее, подтверждается и то, что было сказано ранее в § 17, а именно, что приблизительно $z = x$, если отверстие даже умеренно мало, так как в настоящем случае, когда движение начинается с покоя, разность между z и x составляет лишь пятнадцать стотысячных частей высоты a. Так как в то же время высота z оказывается чуть-чуть больше x, то ясно, что после того как вода некоторое время вытекала, вытекающая вода в состоянии подняться на большую высоту, чем высота воды над отверстием.

§ 19. После того как мы таким образом вывели из нашей общей теории то, что относится к движению жидкости из вертикально расположенных цилиндров, рассмотрим еще наклонно расположенные трубы, которые в фонтанах обычно бывают очень длинными. При последних имеется та особенность, что ускорение движения происходит не так внезапно, как в том случае, когда цилиндры вертикальны, и таким образом нашим чувствам представляется возможность заметить соответствие теории с действительным движением вод.

§ 20. Представим себе как-либо изогнутую, но все-таки цилиндрическую трубу, сечение которой попрежнему относится к сечению отверстия как m к n. Пусть движение начинается с покоя, и пусть вертикальная высота воды над отверстием с начала движения равна a. Пусть некоторое количество воды вытекло, и вертикальная высота оставшейся воды над отверстием равна x; пусть длина трубы, которая в этот же момент наполнена, равна ξ, внутренняя вода в это время (все частицы которой, как я здесь допускаю, уносятся движением, параллельным оси трубы) обладает скоростью, соответствующей высоте v. Если при указанных выше допущениях мы воспользуемся тем же ходом рассуждения, что и раньше, а именно, определим приращение потенциального подъема, пока капелька вытекает, как мы это делали в § 6, и положим его равным действительному снижению, то получится такое уравнение:

$$\xi dv - \frac{m^2}{n^2} v d\xi = -x d\xi,$$

или

$$\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)vd\xi+\xi dv=-xd\xi;$$

интеграл этого уравнения таков:

$$v=\xi^{\frac{m^2}{n^2}-1}\int -x\xi^{-\frac{m^2}{n^2}}d\xi.$$

Это становится ясным после умножения всех членов уравнения на $\xi^{-\frac{m^2}{n^2}}$. Так, например, пусть труба будет прямой и пусть она так наклонена к горизонту, что синус угла с горизонтом относится к полному синусу как 1 к g; тогда $\xi=gx$, откуда

$$v=\frac{n^2a}{2n^2-m^2}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}-\frac{x}{a}\right).$$

Так как это уравнение не отличается от уравнения § 13, данного для вертикальных цилиндров, то отсюда следует, что в обоих случаях скорость воды одинакова после того, как вертикальные снижения поверхности воды становятся одинаковыми. Следовательно, в соответствующих друг другу местах схожие ускорения здесь и там находятся в отношении вертикальных высот, причем имеется лишь то различие, что в наклонной трубе ускорения оказываются более слабыми, а именно, в отношении 1 к g. Стало быть, в очень наклонных трубах эти ускорения могут быть легко восприняты чувствами, что невозможно в вертикальных трубах в силу чрезмерной скорости этих изменений. Сверх того, из того обстоятельства, что с удлинением трубы увеличиваются трения, сама собой явствует невозможность того, чтобы скорости в результате этого не уменьшались; на данное обстоятельство должны обратить внимание те лица, у которых появится желание произвести опыты по данному вопросу.

О вытекании вод из вертикально расположенных цилиндров, заканчивающихся другими более узкими, равным образом вертикальными трубами

§ 21. Опытом установлено, что из двух совершенно равных и одинаково расположенных цилиндров, из которых один снабжен взамен отверстия более узкой трубой, быстрее опорожняется тот цилиндр, у которого снизу приделана труба, причем тем быстрее, чем больше сечение трубы увеличивается от места ее прикрепления по направлению к ее концу, о чем подробно сообщил Гравезанд [[33]] в «Математических элементах физики» (кн. 2, гл. 8). В нижеследующей задаче мы разберемся во всем этом вопросе.

Задача

§ 22. Пусть имеется вертикально расположенный цилиндрический сосуд $AEHB$ (фиг. 18), просверленный в FG, причем с помощью этого просвета он сообщается с конической трубой $FMNG$, из устья которой MN воды и вытекают. Требуется определить скорость поверхности воды CD после того, как эта поверхность опустилась из положения AB в положение CD, причем начальная скорость равна нулю.

Решение

Пусть начальная высота воды над MN, а именно $NG+HB$, равна a; высота поверхности воды над MN в положении CD (т. е. $NG+HD$) равна x; длина присоединенной трубы, или NG, равна b; сечение отверстия $MN=n$; сечение отверстия $FG=g$; сечение верхнего цилиндра равно m; пусть скорость поверхности воды в CD будет такой, какая соответствует высоте v. Тогда в общем уравнении § 8 будет

$$y=m \text{ и } N=m(x-b)+\frac{bm^2}{\sqrt{gn}};$$

после выполнения расчета выявится, что эти подстановки находятся в соответствии с § 6, а остальные положения являются

теми же, что и раньше. Таким образом, уравнение § 8 переходит в следующее:

$$m(x-b)\,dv+\frac{bm^2}{\sqrt{gn}}\,dv-\frac{m^3vdx}{n^2}+mvdx=-mxdx.$$

Если последнее разделить на m и положить $x-b+\frac{mb}{\sqrt{gn}}=z$, то это уравнение дает

$$\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)vdz+zdv=-zdz-bdz+\frac{mbdz}{\sqrt{gn}};$$

после умножения на $z^{-\frac{m^2}{n^2}}$ это приводит к

$$\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)z^{-\frac{m^2}{n^2}}vdz+z^{1-\frac{m^2}{n^2}}dv=-z^{1-\frac{m^2}{n^2}}dz-bz^{-\frac{m^2}{n^2}}dz+\frac{mbz^{-\frac{m^2}{n^2}}dz}{\sqrt{gn}};$$

после интегрирования и прибавления постоянной C получается

$$z^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}v=C-\frac{n^2}{2n^2-m^2}z^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}}-\frac{n^2b}{n^2-m^2}z^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}+\frac{mn^2b}{(n^2-m^2)\sqrt{gn}}z^{\frac{n^2-m^2}{n^2}};$$

здесь значение постоянной величины C определяется, исходя из того, что в начале вытекания $\left(\text{т. е. когда } x=a \text{ или } z=a-b+\frac{mb}{\sqrt{gn}}\right)$ будет $v=0$, так как движение (скорость) не может возникнуть мгновенно. Следовательно, отсюда величина C становится равной

$$\left[\left(a-b+\frac{mb}{\sqrt{gn}}\right)\times\frac{n^2}{2n^2-m^2}+\frac{n^2b\sqrt{gn}-mn^2b}{(n^2-m^2)\sqrt{gn}}\right]\times\left(a-b+\frac{mb}{\sqrt{gn}}\right)^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}.$$

Из приведенных выше уравнений можно, конечно, определить все. Но так как вычисление оказывается несколько громоздким, если только сечение верхнего сосуда, обозначенное через m, не будет столь велико, что по сравнению с сечениями g и n оно может быть принято бесконечным, то мы рассмотрим только этот последний случай, тем более, что от этого не получится заметной погрешности, хотя бы число $\frac{m}{n}$ или $\frac{m}{g}$ оказалось величиной среднего размера.

§ 23. Поэтому если мы положим $m=\infty$ и одновременно воспользуемся первым дифференциальным уравнением предыдущего параграфа, а также положим в последнем $v=\frac{n^2}{m^2}s$, чтобы, таким образом, с помощью значения буквы s определить высоту, до которой может подняться благодаря своей скорости вода, вытекающая из устья MN, то мы будем иметь

$$\frac{n^2}{m}(x-b)\,ds+\frac{bn^2}{\sqrt{gn}}\,ds-msdx+\frac{n^2}{m}sdx=-mxdx,$$

а так как $m=\infty$, а также легко предвидеть, что между s и x и между ds и dx будет существовать конечное отношение, то после отбрасывания членов, которые должны быть отброшены, это же самое уравнение преобразуется в $-msdx=-mxdx$, или в $s=x$, которое равным образом было уже доказано в § 10. Но в интересах дела я решил его здесь заново доказать, так как настоящий случай мог бы показаться отличным от того, о котором говорится в предшествующем параграфе. Раз это понятно, нет необходимости подробно объяснять упомянутые § 21 явления в данной области, указанные Гравезандом. Действительно, отсюда выясняется, что через составной сосуд $AEFMNGHB$ (фиг. 18) вода вытекает не иначе, чем через простой сосуд $AOMNPB$, когда отверстие MN очень мало, и что в этом случае скорость поверхности воды CD больше, чем если бы вода вытекала через сосуд $AEFGHB$, при условии, что отверстие $MN=FG$, и гораздо больше, когда MN больше FG, что имеет место, когда сечение трубы расширяется по направлению книзу. Следует, однако, отметить, что в начале движения вода снижается медленнее, чем это было определено указанным выше образом, и что упомянутое правило осуществляется не раньше, чем поверхность CD снизится на некоторое малое расстояние, что, однако, совершается за короткое время; изменения, которые происходят в данном случае в начале движения, мы рассмотрим в следующей части.

§ 24. Таким же образом следовало бы произвести вычисление и в случае, если бы в сосуд, который мы теперь все время считаем

обладающим бесконечным сечением, была вставлена не вертикальная, а горизонтальная трубка, как на фиг. 19, или же в каком либо ином направлении; во всех случаях было бы установлено, что вскоре после того, как поверхность воды в главном сосуде немножко снижается, она вытекает через отверстие MN почти с той скоростью, какая соответствует высоте названной поверхности над отверстием. Отсюда явствует, что при неизменных высоте воды над трубкой GN и отверстии FG количество воды, вытекающей за данное время, увеличивается с увеличением сечения отверстия MN. Таким образом, мы здесь доказали то, что, как это было указано в конце § 4 первой части, на опыте установил Фронтин, а именно, что через стакан узаконенного размера, а также положения расходуется воды больше должного, если к нему тут же присоединяются трубы большего размера. И конечно, при прочих равных условиях, должны были бы расходоваться количества воды, приблизительно пропорциональные отверстиям MN, если бы не существовало множества помех, которые сильно уменьшают это количество, о чем в ближайшем я буду говорить. Эти помехи могут привести к тому, что и расширенное наружное отверстие будет очень слабо проводить водный ток; однако некоторое количество будет всегда через него проходить.

§ 25. Из вышеизложенного ясно, что скорость, с которой поверхность воды в обоих рассматриваемых случаях снижается, зависит, при прочих равных условиях, от сечения отверстий MN. Но изложенное основывается на допущении, что вода повсюду прилегает к стенкам трубок GN и вытекает заполненным отверстием MN, каковое допущение уже не могло бы иметь места, если бы упомянутое отверстие чрезвычайно увеличилось. Далее также очевидно, что когда воды вытекают по вертикальной трубе (фиг. 18), то с увеличением длины этой трубы их вытекание ускоряется. Но длина трубы может быть настолько увеличена, что в конце концов воды перестанут быть сплошными в трубе и скорее даже разделятся на столбы, что случается, когда труба имеет длину более чем в 32 фута или даже меньшую, если одно-

временно она расширяется по направлению к MN. Так, если отверстие MN вдвое больше другого отверстия FG, то длина трубы не может быть больше 8 футов без риска, что этим может быть вызвано разделение вод в верхней части трубы, что я докажу особо. Но есть сверх того и иная причина, помимо чрезмерной длины трубы, которая может вызвать разделение воды, а именно, высота воды $CEHD$ может оказаться меньше той, какая необходима, чтобы вода могла достаточно быстро проникнуть в трубу, вследствие чего получается, что вместе с водой сверху втекает воздух, пока поверхность воды не получит форму водопада или полой воронки, так что не все отверстие FG будет закрываться водой. В результате этого, конечно, получается, что вода вытекает в меньшем количестве, однако не с меньшей скоростью, как это позднее полагал некий итальянский автор по имени Карло Фонтана [34], который по этому поводу написал на своем отечественном языке следующее: «...mâ se non vi fosse, tant'acqua, che bastasse à mantenere piena detta canna, l'acqua attraherà l'aria dentro di se in tanta quantità, quanto gli mancherá l'acqua intermettendosi fra l'acqua dá ogni banda; mà la velocità dell' acqua mancherá tanto, quanto sarà l'altezza di tutta l'aria raccolta insieme che sarà essa canna» [35].

Причину того, что, как я сказал, скорость воды не может вследствие этого уменьшиться, всякий поймет, если примет в соображение, что иначе п о т е н ц и а л ь н ы й п о д ъ е м не может равняться д е й с т в и т е л ь н о м у с н и ж е н и ю; это может быть подтверждено с помощью легкого опыта; именно, изогнув конец MN трубы с тем, чтобы воды вытекали горизонтально, на основании дальности броска можно установить скорость воды. А каким образом можно по желанию устроить, чтобы при совершенной неизменности всех прочих обстоятельств воздух примешивался к водам около края трубы, на этот счет нужно иметь в виду следующее. Пусть будет устроено очень малое отверстие в трубе недалеко от входа FG (фиг. 18 и 19); если во время протекания воды заткнуть это отверстие пальцем, то будут протекать чистые воды; если же отнять палец, то через это отверстие скоро начнет

вторгаться воздух и будет смешиваться с протекающей водой. Если это понять, то легко будет изложить причину тех явлений, которые наблюдаются в печах или в дымоходах; а именно, дым устремляется вверх, так как он легче воздуха, что было установлено на основание опытов, проведенных над дымом в вакууме, где его наблюдали опускающимся вниз. Таким образом, с поднимающимся дымом обстоит так же, как со снижающейся водой; а последняя на фиг. 18 вытекает через отверстие MN тем быстрее, чем оно шире и чем ниже оно расположено; стало быть, и дым тем быстрее будет проходить через печь, и тем больший огонь разгорится в очаге, чем выше тянется дымоход и чем больше он будет расширяться кверху, если только не будет слишком сильным, каковые оба явления подтверждаются на опыте. Сверх того, далее, я сам наблюдал, что если где-либо печь продырявить, то дым нисколько не стремится выходить через это отверстие, а скорее воздух врывается через него с большим натиском и, смешиваясь с дымом, поднимается вверх в печи. Не иначе врывается и воздух в трубу $FGNM$ (фиг. 18 и 19) через малое отверстие e, как мы указали. При этом, конечно, дым поднимается в меньшем количестве или во всяком случае труднее, и огонь ослабевает.

Сверх того, имеются главным образом две причины, одна — посторонняя и другая — свойственная природе вещей, которые могут сильно замедлить движение воды на фиг. 18 и 19. Первой из них является прилипание воды к стенкам трубы, а второй — то обстоятельство, что когда труба увеличивается по своей ширине, то скорость воды, нигде не остающаяся постоянной, в каждом месте трубы изменяется, и если считать, что это изменение происходит в результате бесконечно малых импульсов быстрее движущейся воды по отношению к менее быстро движущейся воде, то ясно, что в отдельные моменты времени под действием этих импульсов неупругих тел теряется нечто из потенциального подъема, вследствие чего неизбежно вытекание вод уменьшается.

§ 26. Под конец я скажу теперь кое-что об изогнутых сосудах, из которых воды полностью не вытекают; но для краткости мы

рассмотрим цилиндрическую трубу, а именно такую, что часть ее, через которую поверхность воды не проходит, является прямой.

Задача

Итак, пусть имеется цилиндрическая труба *CEDB* (фиг. 20), часть которой *CE*, насколько этого достаточно, является прямой, а остальная часть *EDB* как-либо изогнута. Пусть вся эта труба наполнена водой, которая должна вытечь через отверстие *B*, и пусть поверхность воды перейдет из *C* в *F*; требуется найти высоту, соответствующую скорости воды в *F*.

Решение

Проведем вертикальную прямую *BH* и горизонтальные прямые *CH*, *FG*, *AB*, и пусть синус угла *HCE* относится к полному синусу [36] как 1 к g. Если мы теперь внимательно продумаем этот вопрос, то увидим, что настоящая задача содержится в другой более общей, которую мы рассмотрели выше в § 20, где мы получили следующее уравнение:

$$v = \xi^{\frac{m^2}{n^2}-1} \int -x\xi^{-\frac{m^2}{n^2}}\xi;$$

здесь для настоящего нашего случая под v подразумевается искомая высота, соответствующая скорости поверхности воды в положении F, под ξ — длина $BDEF$ и под x высота — BG, а под $\frac{m}{n}$ — показатель отношения мѐжду сечениями трубы и отверстия B. Если же обозначить длину $BDA = \alpha$, то будет $x = \frac{\xi - \alpha}{g}$, откуда теперь получается

$$v = \xi^{\frac{m^2}{n^2}-1} - \int \left(\frac{\xi - \alpha}{g}\right) \xi^{-\frac{m^2}{n^2}} d\xi.$$

Обозначим длину всей трубы $BDEC$ через β; тогда будет

$$\int -\left(\frac{\xi-\alpha}{g}\right)\xi^{-\frac{m^2}{n^2}}d\xi = \frac{n^2\alpha}{g(n^2-m^2)}\left(\xi^{\frac{n^2-m^2}{n^2}} - \beta^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right) -$$

$$-\frac{n^2}{g(2n^2-m^2)}\left(\xi^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}} - \beta^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}}\right)$$

и поэтому

$$v = \frac{n^2\alpha}{g(n^2-m^2)}\left(1-\left(\frac{\beta}{\xi}\right)^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right) - \frac{n^2\xi}{g(2n^2-m^2)}\left(1-\left(\frac{\beta}{\xi}\right)^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}}\right),$$

что и требовалось найти.

Пояснение

§ 27. Так как эти уравнения являются несколько громоздкими, мы не будем задерживаться на общем их рассмотрении, а исследуем лучше те частные их случаи, которые приводят к сокращению вычисления и которые не могут быть определены из этого последнего уравнения.

Если мы допустим, что в B не имеется никакой крышки, то будет $m = n$ и (что должно получиться в отдельности для данного случая, а равно и для следующего, который будет скоро рассмотрен)

$$v = \frac{b-\xi+\alpha\log\xi-\alpha\log\beta}{g};$$

тогда скорость будет наибольшей в A, а именно: она будет такой, какая соответствует высоте

$$\frac{b-\alpha+\alpha\log\alpha-\alpha\log\beta}{g}.$$

Наконец, точка E, соответствующая наибольшему снижению, получается с помощью следующего уравнения:

$$\xi-\alpha\log\xi=\beta-\alpha\log\beta.$$

Другой случай, требующий отдельного вычисления, это тот, когда $m^2 = 2n^2$, при котором получается

$$v = \frac{\alpha\xi-\alpha\beta-\xi\beta\log\xi+\xi\beta\log\beta}{g\beta},$$

а если положить, приняв c за число, логарифмом которого является единица,

$$\xi = c^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}},$$

то этим путем определится место наибольшей скорости, для которой производящая высота (altitudo generatrix) равна $c^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}\beta - \alpha$, между тем как наибольшее снижение, которое пропорционально всей вытекающей воде, определяется, если положить

$$\alpha\xi - \alpha\beta - \xi\beta \log \xi + \xi\beta \log \beta = 0.$$

Не сомневаюсь, что это в точности соответствовало бы опыту, если бы только прилипание воды к стенкам трубы не замедляло движения; полагаю, однако, что исход опытов может оказаться таким, что для знающего человека, имеющего представление об упомянутых выше помехах, они в достаточной мере выявят правильность сделанных предположений.

§ 28. В заключение я изложу правильное истолкование некоего явления, которое на первый взгляд представляется весьма парадоксальным. А именно, после того как из всего сказанного до сих пор явствует с полной достоверностью невозможность того, чтобы воды вытекали со значительно большей скоростью, чем та, какая соответствует высоте воды над отверстием, тем не менее они могут это делать со значительно большей скоростью, в особенности, если отверстия велики (сравни с тем, что было сказано мною о максимальных скоростях в § 16); многим, вероятно, покажется удивительным, что порою в фонтанах на момент времени вода делает гораздо более высокий скачок, чем, казалось бы, он мог бы быть сделан согласно нашим законам. Но только отсюда, конечно, не следует, чтобы последние вследствие этого сколько-нибудь потеряли в своей силе: они этим скорее прекрасно подтверждаются. Разрешение же парадокса заключается в том, что до сих пор мы рассматривали сплошные воды, неразделенные каким-либо воздушным вакуумом [37].

И г-н Де-ла-Гир [38] сделал правильное наблюдение, что подобного рода иррегулярные скачки могут иметь место только в том случае, если вместе с водой в трубу, вблизи ключа, проник воздух, что зачастую и бывает, как я это отметил в § 25. Но этот воздух уносится вместе с водой до вытечного отверстия, через которое он скоро прорывается; а пока это происходит, водяная масса приобретает натиск, который используется только для выбрасывания вод, и этим путем вызывает огромный скачок. Я скоро изложу более ясно причину этого явления, а также соответствующие измерения, после того как предварительно приведу слова, которые по этому поводу стоят в «Истории королевской Академии наук в Париже» за 1702 г. «Иногда наблюдают, — говорится в цитируемом месте, — что вода, выходящая через насадку, поднимается втрое или вчетверо выше, чем это позволяет высота водоема, а затем быстро возвращается к той высоте, которую ей предписывают законы гидростатики. Но как могла она так подняться в одно мгновение? Г-н Де-ла-Гир относит это за счет заключенного в трубе воздуха, который, будучи сжат и превращен в пружину водой, постоянно опускающейся вниз, затем расширяется, толкая воду вверх и сообщает ей эту мгновенную скорость».

Итак, г-н Де-ла-Гир правильно заметил, что скачок вызывается воздухом, и нет никакого сомнения, что он нашел бы истинную причину того, каким образом воздух может это сделать, если бы он более внимательно исследовал явление, которого он коснулся мимоходом, и он, конечно, легко бы усмотрел, что внутри вод воздух не испытывает никакого давления, помимо давления со стороны вышележащей воды (а в текущих водах он даже и этого не испытывает, как я это покажу ниже в части двенадцатой), и, стало быть, сжатый воздух не может выгонять идущей впереди него воды сильнее, чем если бы на его месте находилась вода. Действительно, я предвидел (а позднее я часто показывал это на очень легком опыте), что выше обычного выбрасывается

не та вода, которая находится впереди воздуха, а та, которая идет вслед за воздухом, что я сейчас и поясню.

Итак, пусть на фиг. 20 имеется цилиндрический водопровод *CADB*, как он обычно устраивается, и пусть он весь заполнен водой, кроме малой части *mnB*, заполненной воздухом. Проведем горизонтальную и вертикальную прямые *CH* и *HB*. Для краткости допустим, что тяжесть воздуха можно принять нулевой по сравнению с тяжестью воды, так что прохождение воздуха через отверстие *B* нисколько не мешает течению воды, хотя, между прочим, можно было бы легко учесть инерцию воздуха, если бы только мы не стремились избежать пространности там, где мы не ищем какой-либо точности. Пусть длина трубы *CADf* или *CADm* (ибо промежуток *mf*, заполненный воздухом, мы считаем очень малым) равна β; *mf* или $ng=\delta$; $HB=a$; сечение трубы равно *m*; сечение отверстия $B=n$. Наконец, допустим, что, когда поверхность находится в *mn*, вода не обладает никаким движением, и определим соответствующую скорости высоту, какую имеет поверхность *mn*, когда она приходит в положение *fg*. Пусть упомянутая высота равна *v*; тогда потенциальный подъем всей воды в этот самый момент точно так же равен *v*; действительное же снижение, согласно § 7, равно третьей пропорциональной всей массы воды, частицы воды *mngf* и вертикальной высоты *HB*, т. е. $\frac{\delta}{\beta}\alpha$; следовательно, $v=\frac{\delta}{\beta}\alpha$. Эта именно высота сразу, быстрее сказанного, уменьшается, и вода побуждается вытечь через отверстие *B*, как я это доказал в § 18; однако в первый момент времени вода сохранит приобретенное ею движение, и, таким образом, ближайшая к отверстию капля будет выброшена со скоростью, которая должна соответствовать высоте $\frac{m^2\delta}{n^2\beta}a$. А эта высота может быть не только втрое или вчетверо больше *a*, но и сколь угодно большой; во всяком случае со стеклянными трубами я устраивал скачки в десять или в двадцать раз выше *a*. Так, например, пусть $\delta=100$ футов, $\beta=1$ дюйму, а диаметр трубы — вдесятеро больше диаметра,

какой имеет отверстие; таким образом, будет $\frac{m^2\delta}{n^2\beta}=\frac{10\,000}{1200}$, так что при этих условиях первая капля после устранения сопротивления со стороны воздуха должна подскочить на высоту, в восемь раз превышающую обычную высоту *a*. Существует, впрочем, много помех и притом очень существенных, которые противодействуют чрезмерным скачкам. А именно, кое-что из движения теряется вследствие натиска поверхности воды *mn* на стенки *fg*; затем так же вследствие огромного трения, испытываемого водой, столь быстро проносящейся через отверстие, которое должно быть очень малым; прилипание воды к стенкам трубы также сильно мешает достижению водой всей возможной скорости. На столь длинном пути прилипание очень значительно.

Но в то же время не может быть никакого сомнения в том, что приведенное выше объяснение рассматриваемого явления правильно, и произведенные мною опыты в полной мере совпадают с этим объяснением. Далее, на основе этой теории правильно истолковывается и другая сторона этого явления, а именно, что указанный скачок является как бы мгновенным, и после кратчайшего отрезка времени он представляется уже нашим чувствам не выше обычного. Так, если в настоящем, только что представленном случае мы исследуем на основе несколько измененного закона § 18 (ибо там речь идет только о вертикально расположенных сосудах), сколько воды должно вытечь для того, чтобы скачок оказался больше обычного не свыше, чем на тысячную его часть (что минимально и поддается наблюдению в подобного рода опытах), если в начале он был в 8 раз больше него, то мы найдем это количество воды столь малым, что никоим образом нельзя заметить время, в течение которого подобное количество выбрасывается.

Опыты, относящиеся к части третьей. Предварительные замечания

В настоящей части имеется, конечно, много такого, и притом вообще весьма важного, что едва ли может быть непосредственно проверено на опыте. Действительно, так как до настоя-

щего времени авторы не исследовали в вытекающих жидкостях никакого иного движения, помимо тех, какие получаются при очень малых отверстиях, и так как поэтому теория, данная нами для любых сечений отверстий, является новой, то именно ее подтверждение было бы более всего полезно. Но я не вижу, каким образом можно наблюдать скорость вытекающей воды в вертикальных цилиндрах, которыми мы больше всего были заняты, в особенности, когда отверстие очень велико (ведь в противном случае можно было бы иметь некоторое суждение о скоростях на основании времени вытекания). Поразмыслив над этим, я в конце концов решил, что для нашей цели могут послужить §§ 16 и 20, в первом из которых была определена максимальная скорость воды, вытекающей из вертикально расположенных цилиндров, а во втором было доказано, что вытекание воды из наклонно расположенных цилиндров и из вертикальных цилиндров тождественны, если в тех и других берут одинаковые вертикальные высоты. Поэтому мы с удобством воспользуемся наклонно расположенными цилиндрами с тем, чтобы на основании наибольшей величины броска воды можно было на опыте получить максимальную скорость воды или соответствующую ей высоту. Этим именно путем может быть точно исследована та максимальная скорость, какая имеется в действительности, хотя бы отверстия были произвольно большими; и стало быть, если окажется, что наблюденная скорость находится в соответствии с нашими законами, то уже не может остаться никакого сомнения в правильности всей теории.

Однако раньше, чем я перейду к этому делу, необходимо будет предпослать ему механическую теорему, которая следует ниже.

Лемма

Пусть AB (фиг. 21) является вертикальной прямой, BD — горизонтальной; прямая же AD пусть имеет любое направление, по которому, как мы предполагаем, в A брошено тело, описывающее параболическую дугу AC, касательной к которой в A

является прямая AD. Тогда высота, соответствующая скорости, с какой тело было брошено в A, будет равна $\frac{BC^2 \times AD^2}{4AB \times BD \times CD}$, а если AD будет горизонтальной, т. е. если угол BAD будет прямым, то эта же высота будет равна $\frac{BC^2}{4AB}$.

А теперь я изложу то, что наблюдал на опыте.

О максимальных скоростях жидкостей, вытекающих из очень больших отверстий

Опыт 1

К §§ 16 и 20. Цилиндрическую трубу FA (фиг. 22) длиной в 4 фута я поставил наклонно к горизонту и в том же положении закрепил; сечение же трубы находилось к сечению отверстия в A в отношении 2 к 1, причем диаметр трубы равнялся приблизительно семи линиям. Произведя затем с помощью равных отрезков измерение прямых FE, AB и BD (закон которых сам по себе явствует из рисунка), я нашел их равными 81, 619 и 740.

После указанной подготовки я наполнил трубу водой, заткнув тем временем пальцем отверстие A; после того как я сразу отнял палец, все воды за очень короткое время вытекли; однако я мог заметить, что первые и последние воды упали ближе к вертикальной прямой AB, чем средние; наиболее же далеко отброшенные капли упали в место C, причем после многократно повторенного опыта я нашел, что BC содержало в себе 235 тех отрезков, которыми я раньше воспользовался.

Если определить высоту EG, на которую могли бы подняться капли, выброшенные с максимальной скоростью, на основе предпосланной леммы, то мы найдем, что $EG = 56$ отрезкам, а на основании §§ 16 и 20 она должна была бы быть равной 62, если бы трение воды и ее прилипание к стенкам трубки не создавали помех для движения. Более хорошего соответствия я не ожидал.

Опыт 2

Расположив все попрежнему, но уменьшив лишь наполовину отверстие A, так что сечение трубы оказалось вчетверо больше сечения просвета, я нашел, что $BC = 252$. Отсюда на основании опыта получается, что $EG = 68$; согласно же теории оно должно было бы быть равным 70. Эти числа расходятся между собой меньше, чем предыдущие, так как в данном случае было гораздо меньшим сопротивление трения в силу уменьшившейся скорости внутренней воды.

Итак, оба эти опыта действительно отлично подтверждают теорию.

О скорости воды, устремляющейся из очень широкого сосуда

К § 17. В указанном выше параграфе мы утверждаем, что если сосуд очень широк, то вскоре после некоторого небольшого снижения внутренней поверхности воды последняя устремляется со скоростью, которая все время соответствует высоте воды над отверстием. Если же предоставить воде вытекать в каком-либо направлении (ведь в очень широких сосудах направление струи не может как-либо изменить скорости) и в какой-либо момент времени наблюдать, на каком расстоянии от вертикальной прямой струя падает на горизонт, и на этом основании, пользуясь изложенным раньше законом, определить высоту, соответствующую скорости вытекающей воды в указанный момент времени, то опыт покажет, что эта высота равна высоте воды над центром отверстия, если только исключить первые капли, которые в силу § 16 должны вытечь с меньшей скоростью и действительно так вытекают. При этом помехи, о которых мы неоднократно упоминали, не вызывают какого-либо заметного ослабления вытекания, если только диаметр отверстия равен по меньшей мере двум или трем линиям, а диаметр сосуда не меньше нескольких дюймов, и, наконец, если высота воды не слишком велика, как, например, не равна большому числу футов.

Все вышеизложенное я наблюдал неоднократно; но такого рода опыты слишком просты и не заслуживают пространного описания.

О сосудах, снабженных вертикальными трубами

К § 22 и 23. Опыты с ними предпринял знаменитый Гравезанд в «Математических элементах физики»; я их повторил. Те из них, которые относятся к настоящему вопросу, сводятся преимущественно к следующему.

На фиг. 23, 24, 25, 26 имеются отдельные равные между собой вытечные отверстия, обозначенные буквой A; лишь B несколько больше их в отношении 16 к 25; сечения же цилиндров, равно как их высоты, между собой равны, за исключением последнего цилиндра, высота которого вчетверо больше. Приделанные к двум средним цилиндрам трубы имеют длину, втрое превышающую длину цилиндров. После наполнения этих сосудов водой производилось наблюдение над ее вытеканием.

I. По началу поверхность воды на фиг. 23 опускается не быстрее, чем на рис. 24; однако после того как здесь и там вытекает некоторое количество воды, движение воды в составном сосуде становится много быстрее, чем в простом. На то и на другое я наперед указал в конце § 23. Но лучше и точнее можно разобраться в этом вопросе с помощью дифференциальных уравнений, данных нами в §§ 22 и 23. Если мы воспользуемся ими для определения первых приращений движения как в простом цилиндре фиг. 23, так и в составном сосуде фиг. 24 и для этой цели допустим, что сечения цилиндра и отверстия относятся между собой как m к n, то приращение, которое мы назовем dv, в простом сосуде будет относиться к приращению в составном сосуде как $1+\frac{3m}{n}$ к 4, и, стало быть, в первом случае оно будет значительно большим, чем во втором. Следовательно, если бы мы имели возможность точно проследить первое движение, то мы должны были бы заметить, что по началу более скорым является то движение, которое происходит в простом цилиндре. Но так как в § 16 и далее в § 23 было доказано, что, после того как

поверхности воды в обоих сосудах несколько снизятся, они становятся в обоих сосудах почти соответствующими высотами $\frac{n^2}{m^2}x$, где под x следует понимать высоты воды над отверстиями, из которых она вытекает; отсюда следует, что на фиг. 24 вода скоро начнет снижаться значительно быстрее, чем на фиг. 23. Так, стало быть, теория полностью согласуется с данными наблюдениями.

II. Поверхность воды на фиг. 26 снижается значительно быстрее, чем на фиг. 24, так что скорость в случае фиг. 24 является как бы средней между случаями фиг. 23 и 26. Здесь, значит, опять-таки ясно, что и первые ускорения в цилиндре фиг. 24 происходят значительно медленнее, чем в 26. Итак, в этом отношении теория показывает то, что дало наблюдение; но, конечно, рассчитанная разность далеко не достаточна, чтобы отсюда могла возникнуть такая разность, какую я наблюдал; согласно § 23, после того как в обоих цилиндрах поверхность немного снизилась, она уже не должна была бы быть заметной. Наблюдающийся остаток (разности) должен быть отнесен за счет сопротивления, возникающего вследствие трения воды на фиг. 24. Действительно, по трубе AA вода проходит с большой скоростью; поэтому как вследствие повышения скорости, так и вследствие уменьшения сечения сосуда движению воды оказывается очень большое сопротивление.

III. И, наконец, если исключить первые мгновения времени, то поверхность воды быстрее всего снижается в цилиндре фиг. 25 и заметно быстрее, чем на фиг. 26.

Последнее находится, конечно, в соответствии с тем, что было доказано в § 23. Вскоре после общего начала движения, т. е. при предположении, что высоты воды над вытечными отверстиями почти равны, скорости на фиг. 25 и 26 должны были бы относиться друг к другу примерно как сечения отверстий B и A, т. е. как 25 к 16. То обстоятельство, что фактически наблюдается меньшая разность скоростей, опять-таки следует отнести за счет сопротивления со стороны трения, помимо другой причины, которая была указана в конце § 25.

О подобных же сосудах, в которые вделаны горизонтальные трубы

К § 24. Когда воды текут из очень широкого сосуда, подобного *CDG* (фиг. 19), через горизонтальную трубу *GM*, более широкую в конце *NM*, чем в начале *GF*, то они проходят через отверстие *GF* (опять-таки если исключить первые капли) с большей скоростью, чем если бы труба отсутствовала или если бы она была цилиндрической. Это утверждал и Фронтин, без сомнения установивший это на опыте, но другие современные ученые это отрицают.

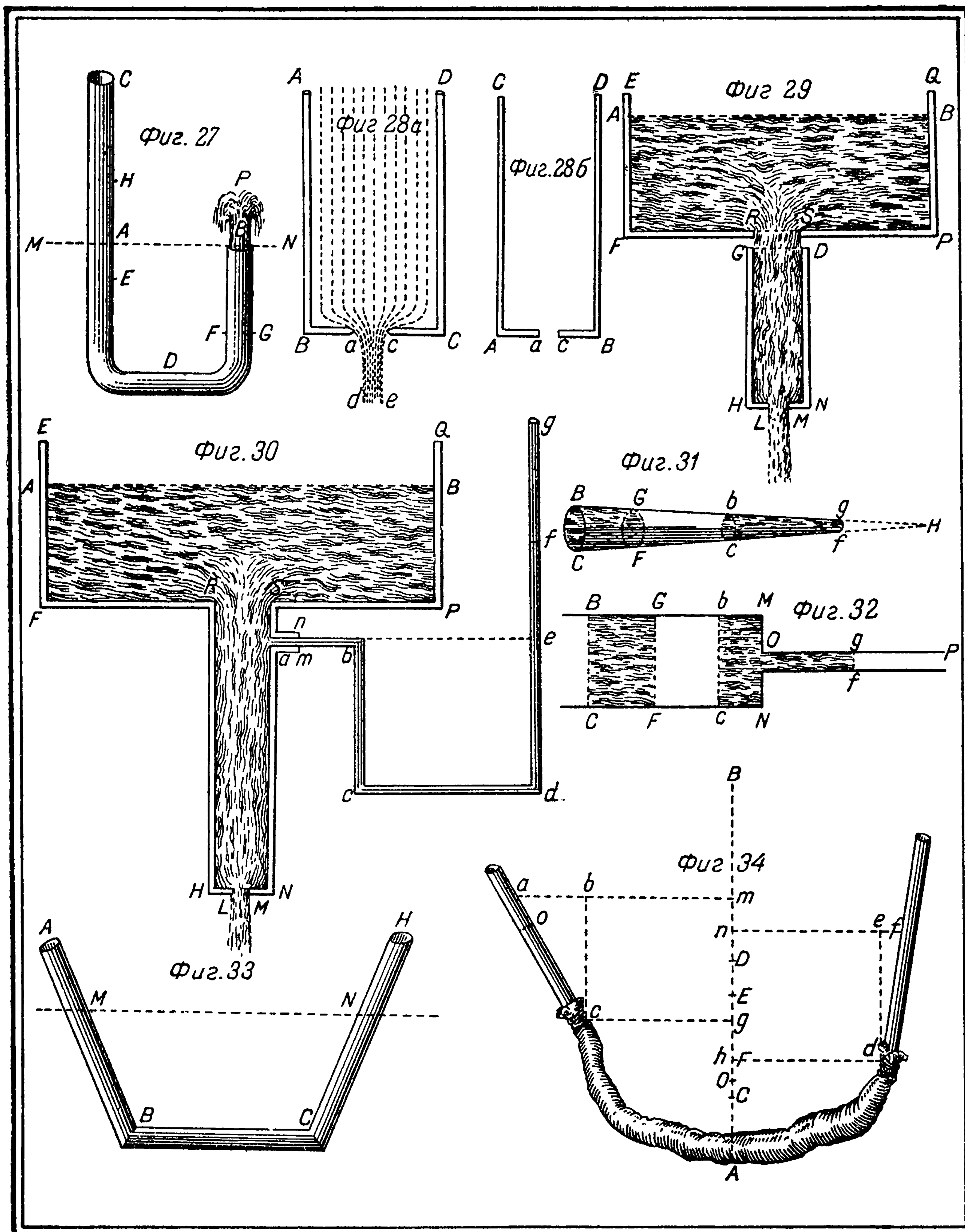
Поэтому я решил, что этот вопрос стоит исследовать на опыте. Высота сосуда, которым я воспользовался, над осью трубы была равна $5^1/_3$ английским дюймам, длина трубы *GN* была равна 2 дюймам 5 линиям, диаметр отверстия *GF* был равен 3.36 линии, диаметр вытечного отверстия *MN* — 5.48 линии; таким образом, сечения отверстий находились между собой в отношении приблизительно 3 к 8; ширина сосуда была достаточно велика, чтобы ее можно было признать бесконечно большой по сравнению с сечением трубы. Я хотел привести здесь все размеры, дабы каждый мог повторить этот опыт. Наполнив этот сосуд водой, я наблюдал величину броска воды и с помощью последнего, выполнив все необходимые измерения, произвел вычисление высоты, которая должна была соответствовать скорости воды, вытекающей как из *GF*, так и из *NM*. Последнюю я нашел равной приблизительно 11 линиям и поэтому другую — равной 6 дюймам $6^2/_9$ линии; эти же высоты я нашел еще и с помощью иного рода опыта. А так как высота в 6 дюймов и $6^2/_9$ линии больше $5^1/_3$ дюймов, то этим подтверждается наша теория об ускорении внутренней воды благодаря расширению трубы по направлению к ее концу, хотя, как я это наперед отметил под влиянием преимущественно двух изложенных в § 25 соображений, здесь еще далеко от того, чтобы ускорение было действительно таким, каким оно должно было бы быть согласно § 24, если бы были устранены помехи, которые при вычислении совершенно не были приняты во внимание.

К § 25. В этом параграфе я мимоходом отметил, что можно различными путями устроить так, чтобы к воде, протекающей по трубам, примешивался воздух. А в результате этого получится, что воды будут вытекать, правда, в меньшем количестве, но не с меньшей скоростью. Для того чтобы проверить то и другое, я, во-первых, сделал по маленькому отверстию в трубках *AA* и *AB* (фиг. 24 и 25) неподалеку от их начала. Следствием этого явилось то, что воды протекали по трубам с некоторым шумом и вытекали возмущенными, а поверхности снижались значительно медленнее обычного. Затем я точно так же немного просверлил трубу фиг. 19 недалеко от *G* и снова наблюдал, что внутренняя поверхность снижается несколько медленнее, в чем я удостоверился, отсчитывая количество колебаний некоторого маятника, в течение которых поверхность снижалась на заданное расстояние. Что же касается вытекающих вод, то по временам я наблюдал, что воды вытекали сплошь через все отверстие и тогда они были менее прозрачны, чем обычно, бросок же они делали обыкновенный или немного больший обычного. Однако чаще всего вода проносилась вместе с воздухом; первая — в нижней части трубки у стороны *FM*, а второй — в верхней части *GN*. В этом случае воды были чисты и выбрасывались не с меньшей, чем обычно, скоростью, но даже со значительно большей, возможность чего я вполне ясно заранее предвидел. По этому вопросу я изложу в следующей части другой опыт, поставленный с большей точностью.

Быть может где-нибудь представится место доказать, что воды, смешанные с достаточным количеством воздуха, вытекают приблизительно в таком же количестве, в каком они вытекали бы по трубке, которая была бы срезана в том месте, где она просверлена, что, как я заметил, тоже находится в соответствии с опытом.

Об изогнутых трубах

К § 27. Проведя на стене горизонтальную прямую *MN* (фиг. 27), я поставил наполненную целиком водой цилиндрическую трубу *CDB*, имеющую с обеих сторон параллельные колена, таким образом, чтобы один из краев *B* приходился на уровне горизонтальной


Фиг. 27
Фиг 28а
Фиг.28б
Фиг 29
Фиг. 30
Фиг. 31
Фиг. 32
Фиг. 33
Фиг 34

прямой MN и чтобы вместе с тем колена стояли вертикально; отверстие C я одновременно заткнул пальцем и этим предотвратил возможность вытекания.

Отняв затем палец, я наблюдал максимальную высоту BP, до которой поднимались вытекающие воды; в других же случаях я наблюдал место E, до которого снижается поверхность воды. Этот опыт я проводил при двух различных условиях, а именно: сначала я не накладывал в B никакой покрышки, а затем надевал покрышку с просверленным отверстием, сечение которого относилось к сечению трубки как 1 к 2. Размеры при этом были следующие: $CA = 345$, $ADB = 530$, $BF = 33$ и $AE = 88$ частям длины, 375 которых составляли длину лондонского фута. Таковы они были в первом случае, во втором же, при неизменных прочих условиях, я наблюдал $BP = 64$ и $AE = 54$. Попутно отмечу здесь, что, желая исследовать иным путем максимальное снижение AE, я по окончании опыта наклонял трубку до тех пор, пока, казалось, вода вот-вот готова уже вытечь из B, и в этот момент я измерял расстояние поверхности от ранее отмеченного места A. Это расстояние, которое, как я полагал, должно быть тождественно с максимальным снижением AE, оказалось значительно меньше ожидаемого. Отсюда я установил, что часть воды, которая во время опыта уже протекала через B, попадала затем обратно в трубу.

После проведенных таким образом наблюдений я определил величины BP и AE путем вычисления, изложенного в § 27, положив, во-первых, $m = n$ и затем $m^2 = 2n^2$, и получил в первом случае $BP = 79$, каковая величина на опыте не превысила 33, а максимальное снижение AE я нашел приблизительно равным 250, опыт же дал для него 88. Затем для случая $m^2 = 2n^2$ получилось число, почти вдвое больше наблюденного, и AE оказалось равным 186, между тем как наблюдение дало 54 частицы длины. Эти огромные расхождения я отношу частью за счет прилипания воды к стенкам трубы, каковое прилипание в подобного рода случаях может, конечно, дать невероятный эффект, ибо я пользовался трубой, имевшей едва более двух линий в диаметре, и нет сомнения, что я получил бы лучшее соответствие с более широкой

трубой. Вместе с тем представляется правдоподобным, что и искривление трубки в нижней ее части отнимает кое-что у движения.

К § 28. Я воспользовался той же изогнутой трубкой, которую только что описал, но при этом я поместил в B покрышку, в которой было пробито очень малое отверстие. Я сделал так, чтобы трубка была вся заполнена водой, за исключением малой части ее FGB: в этом положении я задержал воду, приложив палец к отверстию G. Когда палец был отнят, вода стала снижаться, и когда она достигла положения HDB, то несколько капель было выброшено из отверстия B с таким бурным натиском, что они поднялись на высоту более 10 футов, хотя высота HA едва превышала $^1/_2$ фута. Между тем вследствие малого размера отверстия вода при прохождении через отверстие встречала столь большое сопротивление, что после ослабления натиска вода не только не поднималась на высоту AH (на которую она, однако, должна была бы постепенно подняться, если бы были устранены все помехи), но едва выжималась по прошествии значительного времени одна или другая капля, так что я склонен думать, что если бы при отсутствии натиска столь большой бросок должен был бы быть вызван одним лишь естественным давлением воды, то он мог бы получиться лишь при высоте по крайней мере в 100 футов.

Затем я еще наблюдал, что скачок воды уменьшается тем сильнее, чем меньшее пространство GB оставляется до опыта; все это находится в соответствии с теорией. Производить измерения было излишне, так как вследствие чрезмерных помех бросок воды, конечно, не мог быть столь большим, каким он был бы в случае их устранения. Однако для того чтобы доказать на опыте, что и размеры находятся в согласии с формулами, я взял более широкую трубу CDB, дабы исключить в большей части помехи со стороны прилипания; часть DFB была очень мала, и меньше прежнего была часть GB, которую при опыте я оставлял свободной от воды, и, наконец, в покрышке было пробито не слишком малое отверстие. И тогда я наблюдал, что бросок оказался не намного меньше высоты $\frac{m^2\delta}{n^2\beta}a$, которую я дал для

этого процесса. Больше того, я помню, что наперед я в точности предсказал присутствовавшему при этом другу высоту броска после того, как я взвесил, сколько примерно следует при расчете положить на помехи.

Аналогичный внезапный взрыв воды, который должен быть вызван подобной же причиной, можно получить и с источниками, выбрасывающими воды через трубу при вполне заполненном отверстии вытекания. Действительно, если быстро приставить палец к отверстию трубы таким образом, чтобы часть отверстия осталась открытой, то тотчас же можно увидеть, что воды станут выбрасываться с большим натиском и что затем скоро тонкая водяная нить вернется к прежним пределам скорости. Можно также заметить, что воды будут выбрасываться с тем большим натиском и тем дальше, чем меньший просвет оставит палец, и что при одном и том же размере оставленного просвета тем больше необычный бросок растягивается (как бы ни был он постоянно мал) и тем заметнее он становится для глаз, чем длиннее труба, так что если бы в фонтанах, к которым воды приносятся из водоема по очень длинным трубам, последние не были очень широкими и воды вытекали из полного отверстия, то не сомневаюсь, что при этих условиях сильный бросок продолжался бы в течение заметного промежутка времени, а затем он постепенно возвращался бы к обычной величине. Все это согласуется с тем, что мы указали в §§ 28 и 18.

Помню, что этот опыт я когда-то произвел, и притом впервые, в присутствии знаменитых гг. Де Мопертюи и Клеро [39], с которыми я раньше случайно вступил в беседу об этих водных вопросах. И хотя бы здесь не было совершенно воздуха, за счет которого можно было бы отнести (данное явление), тем не менее в действительности это явление не отличается от того, какое наблюдал г-н Де-ла-Гир, и оба они происходят вследствие того, что движение воды, содержащейся в трубе, или во всяком случае часть этого движения не может исчезнуть без того, чтобы отсюда не получилось какого-либо эффекта, каковой и создается огромным броском воды.

ГИДРОДИНАМИКИ
ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

О различных временах, которые могут быть затрачены на вытекание воды

§ 1. Вопрос об определении времени, за которое вытечет заданное количество воды, если воды вытекают из заданного сосуда через известное отверстие с определенными в любом положении скоростями, может показаться многим совершенно геометрическим, т. е. не требующим никакого физического рассмотрения. Однако опыт показывает обратное, ибо через отверстия, устроенные в тонких пластинках, воды вытекают в гораздо меньшем количестве, чем это получилось бы на основе простого рассмотрения скоростей, причем в большинстве случаев уменьшение происходит в отношении 1 к 2 (однако при различных обстоятельствах получаются различные отношения). Это дало повод Ньютону утверждать в первом издании «Математических начал естественной философии», что вода вытекает из сосуда с такой скоростью, какая должна была бы создаваться половиной высоты над отверстием, каковому заключению противоречат все опыты, произведенные непосредственно над скоростями. Исследуя затем источник этого расхождения, сам великий муж нашел, что он заключается в сжатии водяной струи, каковое сжатие обычно скоро образуется ниже отверстия. Я наблюдал и другое изменение струи, то схожее с вышеуказанным, то обратное. А именно, когда воды вытекают не через простое отверстие, а через трубочку, то струя опять-таки

сжимается, если трубка сужается по направлению к наружному концу, и расширяется, если трубка расходится. О сжатии водяной струи, вытекающей по суживающимся трубкам, очень точные опыты привел Джованни Полени [40] в книге «О водоемах» (стр. 15 и след.). Знаменитый муж наблюдал, что сжатие струи бывает тем большим, чем больше внутренний просвет конической трубы при неизменных наружном просвете и длине трубы. Последнее и является причиной того, что при прочих равных условиях одинаковое количество воды вытекало тем медленнее, чем большим был внутренний просвет, хотя помехи со стороны прилипания воды к стенкам трубы все время оказывали меньшее действие. Эти уменьшения помех имели своим результатом то, что в том месте, где струя была максимально сжата, воды протекали с большей скоростью, и тем не менее они выделялись наружу более скупо. О правильности этого заключают на основании наблюдения над периодами вытекания и сечениями струй в том месте, где они максимально сжимаются. Поэтому так как суть дела заключается именно в этих изменениях струи, то будет в интересах дела более подробно исследовать и объяснить эти явления.

§ 2. Возьмем, например, вертикальный цилиндр, снабженный отверстием посредине горизонтально расположенного дна; внутреннюю же воду мы представим себе разделенной на горизонтальные слои. При наличии указанных условий мы полагали, что движение каждого слоя является одинаковым, а именно таким, что слои сохраняют горизонтальное положение, причем, однако, я указывал, что это допущение не может быть распространено на ближайшие к отверстию слои; но так как отсюда не может произойти заметной ошибки в отношении скорости вытекающих вод, то я полагал, что незачем принимать в расчет это обстоятельство. Но теперь, когда с наклонным движением внутренней воды связаны другие явления, каковым в особенности является движение в вышеуказанных ближайших к отверстию слоях, мы его вкратце рассмотрим.

§ 3. Мне кажется, что движение внутренней воды следует представить себе таким, какое имело бы место, если бы вода про-

ходила по бесчисленным расположенным друг возле друга трубочкам, причем средние из них спускались бы приблизительно по прямой линии от поверхности до отверстия, остальные же — по линиям, постепенно изгибающимся вблизи отверстия, как это показывает фиг. 28а. Из этой фигуры видно, что отдельные частицы опускаются этим путем почти по вертикальному направлению, пока не доходят близко ко дну, и что тогда их движение постепенно отклоняется по направлению к отверстию, так что ближайшие ко дну частицы перемещаются по направлению к отверстию почти горизонтальным движением, другие же — более вертикально. Подобного рода движения я зачастую мог наблюдать глазами, когда в воде плавали частицы воска, именуемого испанским. А отсюда понятно, что отдельные частицы, находящиеся у отверстия, не могут сохранить неизменным первоначальное свое направление и в то же время не могут изменить его таким образом, чтобы получить движение прямо параллельное оси, а скорее произойдет то, что струя вытекающей воды будет сокращаться до de, где она, таким образом, станет заметно тоньше, чем в самом начале у отверстия ac. Однако этого сжатия вертикально текущей струи не следует смешивать с другим сжатием, вызываемым ускорением воды. Затем также ясно, что струя по необходимости сжимается вследствие напора, производимого друг на друга этими частицами, двигающимися в неодинаковых направлениях [[41]]. А благодаря этому сжатию получается результат, который при других обстоятельствах содержал бы в себе противоречие, что вода, только что выступившая наружу, продолжает ускоряться ниже отверстия и, таким образом, возрастает **потенциальный подъем**. Мы оставляем без внимания, как сюда не относящееся, другое общее для всех падающих тел ускорение, которое мы и в дальнейшем не будем принимать во внимание. Если меня не вводит в заблуждение изложенное выше заключение, то в дальнейшем настоящий вопрос надлежит исследовать следующим образом.

I. Надлежит рассматривать водяную струю до того места, где скорости частиц больше не изменяются; хотя последнее никогда

не осуществляется с полной строгостью, однако следует считать, что это имеет место поблизости от отверстия, например в *de*. А если это так, и если мы примем, что воды вытекают из сосуда *ABCD* через отверстие *ac*, тогда вместо простого сосуда *ABCD* следует представлять себе другой сложный сосуд *ABadecCD*.

Следовательно, все то, что в предыдущей части было предпослано об определении повсюду скоростей, все это полностью будет иметь место и в данном случае, если вместо представленного сосуда вообразить себе сосуд, снабженный, как я сказал, сжатой трубочкой. Но эта поправка не может вызвать заметного изменения в отношении предпосланного нами метода определения скоростей вытекающей воды ввиду короткости трубки *adce*, но может вызвать весьма заметное изменение в отношении ее количества, так как следует считать, что воды вытекают не столько через отверстие *ac*, сколько через *de*.

II. Таким образом, в различных местах струи скорости будут находиться в обратном отношении к размерам соответствующих сечений. Так как в очень широких сосудах скорость в *de* соответствует всей высоте воды, а вместе с тем и опытами установлено, что сечения *ac* и *de* находятся между собой приблизительно в отношении $\sqrt{2}$ к 1, то Ньютон полагал, что это подтверждает его теорию, утверждающую, что вода вытекает из действительного отверстия с такой скоростью, какая соответствует половине высоты воды над отверстием, хотя при дальнейшем продвижении скорость воды возрастает. Такая теория, мне кажется, слишком приближается к предвзятому мнению; ведь отношение между отверстиями *ac* и *de* не всегда одинаково, и этим путем нельзя объяснить движения вод из сосуда, к которому присоединена трубочка. Словом, сжатие струи является совершенно случайным; его можно полностью устранить, если приделать к отверстию маленькую цилиндрическую трубочку или если только увеличить толщину пластинки, в которой имеется отверстие, и тогда без всякой поправки останутся в силе изложенные в предыдущей части теоремы как относительно скоростей, так и относительно количеств.

III. Но из приведенного выше изложения, касающегося сжатия струи, явствует, что последнее не может не изменяться от различных сопутствующих обстоятельств. Так, опыты показывают, что оно уменьшается при увеличении толщины стенок отверстия. Имеет ли в данном случае какое-нибудь влияние высота воды над отверстием, этого я в точности не знаю. Я полагал бы, что вообще при увеличении высоты внутренней воды сжатие несколько возрастает, хотя легко предвижу, что оно все же будет незначительным. Правдоподобно также, что сжатие струи, в особенности вертикальной, будет при прочих равных условиях тем меньшим, чем в большем отношении будет находиться сечение отверстия к сечению цилиндра, ибо движение внутренней воды, расположенной очень близко ко дну сосуда, становится при этих условиях менее наклонным; таким образом, если бы отверстие заняло все сечение цилиндра, то, конечно, не могло бы получиться никакого утончения струи. Рекомендую обратить внимание на это обстоятельство тем, которые, быть может, подумают, что при определении скоростей следует принимать в расчет указанное сжатие. Ведь когда отверстие не на много меньше сечения сосуда, то не может получиться никакого заметного сжатия, а когда отверстие мало, то опять-таки не возникает почти никакой разницы по отношению к скоростям, будет ли отверстие несколько увеличено или уменьшено.

§ 4. Почти так же обстоит дело и при горизонтально текущих водах, не говоря уже о других направлениях. Действительно, и здесь вода совершенно так же со всех сторон притекает к отверстию; ведь она даже снизу поднимается к отверстию, чтобы получить возможность вытечь наружу, что зачастую и происходит, как я это сам наблюдал. Следовательно, по той же причине происходит такое же утончение струи; это тем легче заметно на глаз, что в данном случае не имеет места другое утончение, которое должно было бы произойти вследствие ускорения вышедшей уже наружу воды. Поэтому, если кто-нибудь решит произвести наблюдение над сжатием струи, то, по моему мнению, он поступит лучше, если воспользуется струями, выте-

кающими горизонтально, а не по какому-либо иному направлению.

§ 5. А как велико сжатие, т. е. какое отношение получается между величиной отверстия и минимальным сечением горизонтально вытекающей струи, это можно определить, либо измеряя фактически диаметры, соответствующие указанным величинам, либо устанавливая среднее количество воды за определенное время при заданных скоростях вытекания. Однако скорость следует выводить не столько из высоты воды над отверстием, сколько из величины броска, так как помехи, то большие, то меньшие, никогда не дают воде возможности приобрести ту скорость, какую она должна была бы получить в силу теории, совершенно не принимающей во внимание указанных помех.

§ 6. Из вышесказанного, полагаю, теперь достаточно ясно, что будет существовать совершенное согласие между количеством вытекающей воды и ее скоростью, если только вместо имеющегося в сосуде отверстия взять иное, уменьшенное в такой мере, что оно не будет превышать сечения максимально сжатой струи. При этом будет также безразлично, в каком месте струи или на какой глубине от поверхности воды будет решено установить это отверстие, в ac или в de, так как скорости всегда будут приблизительно соответствовать всей высоте воды над тем местом, в котором мы представляем себе отверстие. Величину этого воображаемого отверстия я в последующем буду называть *сечением сжатой водяной струи*.

§ 7. А если бы то сечение, о котором мы только что говорили, находилось в постоянном отношении к отверстию, то при исследовании надлежало бы в том же отношении уменьшить мысленно отверстие в сосуде и после этого произвести расчет воды, вытекающей за данное время. Таким образом, если бы это отношение положить равным $\frac{1}{\alpha}$ и обозначить величину отверстия через n, то следовало бы считать, что сечение плотной струи равно $\frac{n}{\alpha}$ [42].

А так как при различных обстоятельствах оно изменяется, то a priori для него никаких правил дать нельзя; изменяется же оно больше всего в зависимости от толщины пластинки, в которой имеется отверстие, от ее увеличения или уменьшения. Некоторое влияние, хотя и малое, могут иметь величина сечения отверстия, ширина сосуда, причем влияние могут иметь как абсолютные их величины, так и относительные, а также, быть может, высота воды над отверстием. Между прочим, если взять пластинку тонкой, сосуд очень широким и отверстие с диаметром, доходящим до 4 или 6 линий, то отношение между отверстием и сечением сжатой струи обычно ненамного отступает от того, какое установил Ньютон, а именно как $\sqrt{2}$ к 1. Другие, однако, зачастую наблюдали его большим, а иные и меньшим.

§ 8. Но каковым бы оно ни было в действительности, мы во всех случаях будем его обозначать, как и раньше, через $\frac{\alpha}{1}$. На этой же основе мы построим теперь и исчисление для времен; но для краткости мы будем рассматривать лишь цилиндрические сосуды и для них будем исследовать главным образом два рода времен: первый — определяющий момент максимальной скорости, и второй — соответствующий опорожнению; в том и другом случае мы будем допускать, что движение начинается с покоя.

§ 9. Итак, пусть имеется поставленный вертикально наполненный водой цилиндрический сосуд и пусть высота воды в начале вытекания равна a, сечение цилиндра равно m, сечение отверстия — n, сечение плотной струи — $\frac{n}{\alpha}$; пусть вода вытекала уже в течение времени t и пусть тогда оставшаяся высота воды над отверстием равна x; пусть в этот же момент времени поверхность внутренней воды имеет скорость, соответствующую высоте v; тогда сама скорость равна $\sqrt{v}$, а элемент времени dt пропорционален элементу пространства — dx, деленному на скорость $\sqrt{v}$, откуда $dt = \frac{-dx}{\sqrt{v}}$.

Но значение v было определено в части третьей, где мы пользовались теми же обозначениями, что и теперь. А так как для

правильного измерения выделяющихся вод необходимо вместо n подставить сечение сжатой струи $\frac{n}{a}$, то отсюда следует, что подобную же подстановку следует сделать в значении самого v; таким образом устанавливается, что

$$v = \frac{n^2 a}{2n^2 - m^2\alpha^2}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2\alpha^2}{n^2}} - \frac{x}{a}\right).$$

А если это значение подставить в уравнение $dt = \frac{-dx}{\sqrt{v}}$, то получается

$$dt = -dx : \sqrt{\frac{n^2 a}{2n^2 - m^2\alpha^2}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2\alpha^2}{n^2}} - \frac{x}{a}\right)}.$$

Пользуясь этим уравнением, можно определить все искомые времена с помощью приближений или рядов, если только известно значение α в отдельных точках. Но мы примем, что α имеет постоянное значение, так как в настоящем случае нет ничего такого, от чего оно могло бы измениться, за исключением различных высот и скоростей жидкости, которые, поскольку это можно воспринять чувствами, мало или же нисколько на него не влияют.

§ 10. Для того чтобы искомое уравнение можно было представить с помощью рядов, рассмотрим величину

$$1 : \sqrt{\frac{n^2 a}{2n^2 - m^2\alpha^2}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2\alpha^2}{n^2}} - \frac{x}{a}\right)}$$

в следующем виде:

$$\left(\frac{n^2 x}{m^2\alpha^2 - 2n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2\alpha^2}{n^2} - 2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

и последний множитель, согласно обычным правилам, разложим в следующий ряд:

$$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2\alpha^2}{n^2} - 2} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2m^2\alpha^2}{n^2} - 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3m^2\alpha^2}{n^2} - 6} + \ldots,$$

в результате чего теперь получится несколько измененный вид уравнения

$$dt = -\frac{dx\sqrt{m^2\alpha^2 - 2n^2}}{n\sqrt{a}} \times \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2\alpha^2}{n^2} - \frac{5}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 4}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2m^2\alpha^2}{n^2} - \frac{9}{2}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3m^2\alpha^2}{n^2} - \frac{13}{2}} + \ldots\right].$$

Это уравнение следует проинтегрировать таким образом, чтобы при $x = a$ имело место $t = 0$. Тогда получается

$$t = \left[2 + \frac{n^2}{2m^2\alpha^2 - 3n^2} + \frac{3n^2}{16m^2\alpha^2 - 28n^2} + \ldots\right] \times$$

$$\times \frac{\sqrt{(m^2\alpha^2 - 2n^2)\,a}}{n} - \left[2\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n^2}{2m^2\alpha^2 - 3n^2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2\alpha^2}{n^2} - \frac{3}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{3n^2}{16m^2\alpha^2 - 28n^2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2m^2\alpha^2}{n^2} - \frac{7}{2}} + \ldots\right] \times \frac{\sqrt{(m^2\alpha^2 - 2n^2)\,a}}{n},$$

где $2\sqrt{a}$ выражает время, которое затрачивается телом, свободно падающим с высоты a. Если в этом уравнении положить

$$x = a : \left(\frac{m^2\alpha^2 - n^2}{n^2}\right)^{n^2 : (m^2\alpha^2 - 2n^2)},$$

что представляет собой высоту воды, когда скорость является максимальной (согласно § 16 части третьей и § 8 части четвертой), то получится время, которое проходит от начала истечения до момента максимальной скорости; если же положить $x = 0$, то получится время, за которое сосуд полностью опорожняется, и, наконец, если положить x равным какой-либо произвольной величине c, то t выразит время, какое поверхность тратит на то, чтобы снизиться на высоту $a - c$. Посмотрим теперь, что должно произойти в тех случаях, когда сосуд очень велик и, стало быть, число m содержит в себе другое число n очень много раз.

§ 11. Пусть сначала $\frac{m}{n}$ будет бесконечно большим числом; тогда высота воды, соответствующая точке максимальной скорости, будет

$$a:\left(\frac{m^2\alpha^2-n^2}{n^2}\right)^{n^2:(m^2\alpha^2-2n^2)}=a:\left(\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right)^{n^2:\,m^2\alpha^2};$$

но так как $\frac{m^2\alpha^2}{n^2}$ является бесконечно большим числом, то можно будет считать, что

$$\left(\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right)^{n^2:\,m^2\alpha^2}=1+\left(\log\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right):\frac{m^2\alpha^2}{n^2}.$$

Последнее можно доказать следующим образом. Допустим, что дана бесконечно большая величина A и что аналогично нашему примеру имеется $A^{1:A}$, тогда всякий легко увидит, что эта величина несколько больше единицы, причем лишь на бесконечно малый избыток, который мы обозначим через z. Таким образом мы будем иметь

$$A^{1:A}=1+z;$$

возьмем логарифмы обеих частей; тогда будет $\frac{\log A}{A}=\log(1+z)=z$ (ввиду бесконечно малого значения z). Следовательно, мы имеем

$$A^{1:A}=1+\frac{\log A}{A},$$

поэтому аналогично, как мы сказали,

$$\left(\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right)^{n^2:\,m^2\alpha^2}=1+\left(\log\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right):\frac{m^2\alpha^2}{n^2}.$$

Далее, так как последняя величина, прибавляемая к единице, бесконечно мала, получим

$$a:\left(\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right)^{n^2:\,m^2\alpha^2}$$

или

$$a:\left[1+\left(\log\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right):\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right]=a-a\left(\log\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right):\frac{m^2\alpha^2}{n^2}.$$

Следовательно, расстояние, на которое поверхность воды снижается за период времени от состояния покоя до возникновения наибольшей скорости, равно

$$a\left(\log \frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right) : \frac{m^2\alpha^2}{n^2}, \quad \text{или равно } \frac{2n^2a}{m^2\alpha^2} \log \frac{m\alpha}{n} .$$

Это уравнение показывает, что в бесконечно широком сосуде снижение воды бесконечно мало, когда вода достигла уже максимальной степени скорости. Несмотря на это, можно было бы усомниться, вытекает ли за это время конечное количество воды, так как цилиндр, построенный на бесконечно большом основании, хотя бы он имел бесконечно малую высоту, может иметь бесконечно большую величину. Но из нашего уравнения следует, что и эта величина является бесконечно малой, а именно равной

$$\frac{2n^2a}{m\alpha^2} \log \frac{m\alpha}{n} .$$

И действительно, это прекрасно согласуется с явлениями, которые мы в течение всего дня наблюдаем при вытекании воды из водоемов через простое отверстие. А именно, когда мы затыкаем отверстие пальцем и затем, быстро отняв палец, предоставляем водам вытекать по горизонтальному направлению, то мы не видим, чтобы на землю упала хотя бы одна капля в промежутке между самым дальним броском и тем местом, которое соответствует отверстию по отвесному направлению.

§ 12. Подобно тому, как в предшествующем параграфе мы определили величины, хотя и бесконечно малые, снижения внутренней воды и вытекающей воды, пока вода не достигает максимальной степени скорости, так ныне мы сделаем это же по отношению к малому промежутку времени. Я утверждаю, что для этого достаточно, чтобы в уравнении § 10, выражающем время, в обоих рядах ограничиться лишь одним первым членом, что станет ясно, если кто-нибудь распространит вычисление на два (первых) члена. Таким образом, искомый малый промежуток времени будет

$$t = \left(2 - 2\sqrt{\frac{x}{a}}\right) \times \frac{\sqrt{(m^2\alpha^2 - 2n^2)\,a}}{n} ;$$

если вместо x здесь подставить относящееся сюда выражение, найденное в предыдущем параграфе, то будет

$$t=\left[2-2\sqrt{1-\left(\log\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right):\frac{m^2\alpha^2}{n^2}}\right]\times\sqrt{\left(\frac{m^2\alpha^2-2n^2}{n^2}\right)a},$$

или, если положить

$$1-\left(\log\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right):\frac{2m^2\alpha^2}{n^2}$$

вместо соответствующей величины, стоящей под знаком радикала, то это дает

$$t=\left[\left(\log\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right):\frac{m^2\alpha^2}{n^2}\right]\times\sqrt{\left(\frac{m^2\alpha^2-2n^2}{n^2}\right)a},$$

и, наконец, если отбросить величину $2n^2$ под знаком радикала, то получится

$$t=\frac{2n\sqrt{a}}{m\alpha}\cdot\log\frac{m\alpha}{n}.$$

Таким образом, этот промежуток времени бесконечно мал, ибо, как известно, логарифм бесконечно малой величины в бесконечное число раз меньше самой этой величины. Но когда таким образом вода сразу с самого начала истечения начинает выбрасываться с максимальной скоростью, то некоторым, быть может, с первого взгляда покажется удивительным, что за мгновение времени создается конечное движение. Никто, однако, не признает нелепым, что бесконечная масса, каковой и является количество воды, содержащейся в бесконечно большом сосуде, способна за бесконечно малый промежуток времени создать конечное движение, сделав это только за счет действия тяжести.

§ 13. Если сверх того при указанном выше бесконечно обширном размере сосуда мы пожелаем определить время опорожнения, которое, конечно, будет бесконечно большим, то надо будет, как это было указано ранее, в уравнении § 10 положить $x=0$, используя при этом лишь первый член ряда, и снова принять $m\alpha$ вместо $\sqrt{m^2\alpha^2-2n^2}$; тогда получится

$$t=\frac{2m\alpha}{n}\sqrt{a}.$$

Наконец, время, которое затрачивается на то, чтобы поверхность (жидкости) снизилась на высоту $a - c$, выразится, при аналогичном допущении, с помощью следующего уравнения:

$$t = \frac{2m\alpha}{n}(\sqrt{a} - \sqrt{c}).$$

§ 14. Вышеприведенные уравнения, хотя и неточно, но очень близко удовлетворяют в том случае, когда сосуд имеет не бесконечный, но все-таки очень большой размер. Больше того, они лишь очень немного отклоняются от истины, когда число m даже умеренно превышает число n. Да будет позволено сказать здесь несколько слов об опыте, на который я указал в конце § 11, и да будет оказано снисхождение нашему изложению за то, что оно преимущественно занято пояснением и проверкой того, что установлено опытом в области движения. А в названном выше параграфе я утверждал, что когда вода вытекает по горизонтальному направлению, то первая же капля сразу приобретает полную дальность броска. Это же, конечно, дает теория для очень широких сосудов. Но естественно, в средних по своим размерам сосудах некоторое количество капель должно было бы вытечь с меньшим напором раньше, чем наступит момент максимальной скорости, и эти капли должны были бы упасть в некотором среднем месте между максимальным броском и той точкой, которая соответствует отверстию по вертикали. Я наблюдал, что так именно это и происходит в случае сосудов, сечения которых превышают примерно в 10 раз величину отверстия. Но когда однажды я произвел опыт с сосудом в $^1/_2$ фута высотой, сечение которого примерно в 100 раз превышало величину отверстия, то, насколько я мог видеть, ни малейшая даже частица не отстала заметно от полного броска воды. Итак, посмотрим, какое же количество воды должно было бы в данном случае вытечь до момента максимальной скорости. Это количество будет равновеликим тому, какое содержит цилиндр того же сечения в высоте

$$a - a : \left(\frac{m^2\alpha^2 - n^2}{n^2}\right)^{n^2 : (m^2\alpha^2 - 2n^2)}$$

(см. конец § 10), и эта минимальная высота почти не отличается от следующей гораздо более краткой, а именно $\frac{2n^2a}{m^2\alpha^2}\log\frac{m\alpha}{n}$ (см. § 11), где в данном случае под $\frac{n}{m}$ следует понимать $^1/_{100}$, а под α — — $^1/_2$ фута; вместо α можно подставить $\sqrt{z}$ (ибо мы не стремимся здесь к максимальной точности), а под log подразумевается гиперболический логарифм. Таким образом, получается

$$\frac{2n^2a}{m^2\alpha^2}\log\frac{m\alpha}{n}=\frac{1}{20\,000}\left(\log 100+\frac{1}{2}\log 2\right);$$

это равно 0.0002475 футов или 0.00297 дюймов. Так как я нашел, что сечение сосуда равно $6^1/_5$ кв. дюймов, то я пришел к выводу, что искомое количество воды, которое должно было бы вытечь раньше, чем образуется наибольший бросок, равно приблизительно $^1/_{52}$ куб. дюйма или, если допустить, что средняя капля составляет 6 куб. линий, то более чем 5 каплям. Однако при проведении опыта я не наблюдал ни одной капли, причина чего, как я подозреваю, заключается в том, что первые капельки, хотя и выброшенные, продолжают все-таки подталкиваться следующей за ними водой, ибо вторые капельки движутся слишком быстро, чтобы первые могли тем временем от них оторваться. Результатом этого является то, что малый промежуток времени от начала истечения до максимального выброса (каковой, согласно § 13, приблизительно равен $\frac{2n\sqrt{a}}{m\alpha}\log\frac{m\alpha}{n}$, где под $2\sqrt{a}$ здесь подразумевается время, за которое тело снижается на высоту $^1/_2$ фута, т. е. приблизительно $^2/_{11}$ сек.) не превышает $^1/_{158}$ части секунды.

Быть может, известное влияние имеет то обстоятельство, что невозможно достаточно быстро отнять палец от отверстия. Но особенно большое значение имеет в данном случае то обстоятельство, что наибольшая часть той воды, которая выливается до достижения максимальной скорости, подходит к максимальному броску таким образом, что невозможно заметить какого-либо различия между частями, и, таким образом, едва ли хоть одна

капелька могла бы отделиться от потока с заметным промежутком, если бы она и могла свободно отойти от следующей за ней воды.

§ 15. До сих пор речь шла о водах, вытекающих через отверстия. Перейдем теперь к вытеканию вод из сосудов через конусы, сужающиеся или расширяющиеся. Если воды вытекают через сужающиеся трубы, то те же соображения, которые были изложены в § 3 о сходящемся движении частиц для простых отверстий, указывают, что водяная струя ниже отверстия еще сожмется, частицы воды ускорятся, таким образом, количество воды, вытекающей за заданное время, будет меньше того, на какое указывают размеры отверстия вытекания и скоростей, если совершенно не принимать во внимание сжатия струи. Но в более длинных трубах это сжатие обыкновенно мало. В расходящихся трубах все происходит наоборот; струя перед отверстием расширяется, движение воды замедляется, и за заданное время вытекает большее количество воды, чем это следовало бы при отсутствии указанного расширения из наблюденного размера отверстия и из наблюденных скоростей воды, вытекающей из этого отверстия. Наконец, водяная струя, вытекающая из цилиндрических труб, не сокращается и не расширяется. Таким образом, следует обращать надлежащее внимание на эти сокращения или расширения при оценке количества воды, вытекающей за заданное время; этим вопросом мы займемся попутно в конце настоящей части.

Теперь желательно подвергнуть проверке те изменения в вытекании вод, которые происходят с начала движения. Однако для краткости мы не будем при этом уделять внимания изменениям струи. Ведь это явление по своей природе не таково, чтобы его можно было достаточно точно подтвердить на опыте, да эти изменения и не имеют в данном случае большого значения. Но само по себе это явление заслуживает того, чтобы его внимательно исследовать, дабы правильно понять его природу.

О сосудах, к которым присоединены трубы, у нас уже была речь в предыдущей части в §§ 31, 32, 33, причем в § 31 мы дали даже общие уравнения, каково бы ни было отношение между

сечениями сосуда и трубы; но эти уравнения чрезвычайно сложны и требуют весьма утомительного вычисления. В нижеследующем параграфе я рассмотрел допущение, что сосуд повсюду имеет бесконечно большое сечение по сравнению с трубой. Там я указал, что вода вытекает с такой скоростью, с какой она могла бы подняться на всю высоту воды над отверстием вытекания. Однако в конце этого параграфа я определенно отметил, что в начале движения вода снижается медленнее, чем это было определено указанным выше образом, и что указанное правило вступает в силу не ранее, чем поверхность снизится на некоторое малое расстояние, что само по себе ясно, так как не может же в трубе мгновенно из состояния покоя создаться максимальная скорость, хотя она и образуется в сосуде, просверленном простым отверстием.

Продумав изложенное, я решил исследовать первоначальные изменения и выразить их в определенных мерах. Но для этой цели очень мало пригоден упомянутый выше закон, совершенно не принимающий во внимание этих начальных изменений, хотя вообще он в точности верен для бесконечно широкого сосуда. Ведь все изменения, которые предшествуют состоянию максимальной скорости, образуются в то время, как поверхности снижаются на бесконечно малое расстояние. Однако это снижение, если только сосуд является бесконечно большим в геометрическом смысле, не только не осуществляется за бесконечно малое время, как в случае простого отверстия, но осуществляется за бесконечно большое время, и в течение этого периода вытекает бесконечное количество воды, между тем как через отверстие при тех же условиях вытекает бесконечно малое количество ее. А для того чтобы добраться до этого, мне пришлось из общего уравнения § 23 части третьей вывести иное уравнение, чем простейшее $s = x$, если принять s для высоты, соответствующей скорости вытекающей воды, а x — для высоты воды над вытечным отверстием. Всякий поймет, что для нашей цели это должно быть выполнено таким образом, чтобы имел место учет приращений скорости, чего раньше не требовалось.

§ 16. Итак, пусть, как в § 22 части третьей, имеется цилиндр *AEHB* (фиг. 18); пусть он считается бесконечно широким и полным воды и имеет присоединенную трубу *FMNG* конечной толщины в виде усеченного конуса, с сечением, возрастающим или убывающим по направлению к отверстию *MN*, через которое вытекают воды. Пусть, как и там, начальная высота воды над отверстием *MN*, т. е. $NG+HB$, равна a; высота поверхности воды в положении *CD* над *MN*, т. е. $NG+HD$, равна x; длина присоединенной трубы, или *NG*, равна b; сечение отверстия *MN* равно n; сечение цилиндра, являющееся бесконечным, равно m; и пусть, наконец, скорость поверхности воды в положении *CD* будет такой, какая соответствует высоте v, каковая высота будет, конечно, бесконечно малой. При вышеуказанных условиях мы в § 22 части третьей пришли к уравнению

$$m(x-b)\,dv+\frac{bm^2}{\sqrt{gn}}\,dv-\frac{m^3}{n^2}\,vdx+mvdx=-mxdx;$$

ясно, что теперь в этом уравнении можно пренебречь первым членом $m(x-b)\,dv$ по сравнению со следующим $\frac{bm^2}{\sqrt{gn}}\,dv$, равно как и четвертым членом $mvdx$ по сравнению с третьим $-\frac{m^3}{n^2}\,vdx$ и, таким образом, принять

$$\frac{bm^2}{\sqrt{gn}}\,dv-\frac{m^3v}{n^2}\,dx=-mxdx.$$

Если в этом уравнении снова пренебречь первым членом, что может быть сделано, если только не требуется определить и те изменения, которые происходят в течение первого, хотя и бесконечно малого, снижения, то получится обычное правило потенциального подъема вытекающей воды до полной высоты воды. Но теперь для нашего исследования, при котором мы хотим определить именно эти первые изменения, следует сохранить указанный член и исследовать последнее уравнение в полном его объеме.

Для отделения друг от друга неизвестных величин положим

$$\frac{m^2}{n^2}v - x = s, \qquad \text{или} \qquad v = \frac{n^2}{m^2}(s + x),$$

а также $dv = \frac{n^2}{m^2}(ds + dx)$; тогда получится

$$dx = \frac{-n^2 b\, ds}{n^2 b - ms\sqrt{gn}};$$

последнее следует проинтегрировать таким образом, чтобы, положив $x = a$, получить $v = 0$, а отсюда $s = -a$; таким образом, получается

$$x - a = \frac{n^2 b}{m\sqrt{gn}} \log \frac{n^2 b - ms\sqrt{gn}}{n^2 b + ma\sqrt{gn}},$$

а если вместо s подставить принятую для него величину $\frac{m^2}{n^2}v - x$, то получается

$$x - a = \frac{n^2 b}{m\sqrt{gn}} \log \frac{n^4 b - m^3 v\sqrt{gn} + mn^2 x\sqrt{gn}}{n^4 b + mn^2 a\sqrt{gn}};$$

здесь в величине, стоящей под знаком логарифма, можно снова в числителе отбросить член $n^4 b$, ибо он в бесконечное число раз меньше члена $mn^2 x\sqrt{gn}$, а равно в знаменателе можно отбросить член $n^4 b$, который точно так же в бесконечное число раз меньше другого члена $mn^2 a\sqrt{gn}$. Этим путем получается

$$x - a = \frac{n^2 b}{m\sqrt{gn}} \log \frac{n^2 x - m^2 a}{n^2 a}.$$

Отсюда, если число, логарифм которого равен единице, обозначить через c, имеем

$$v = \frac{n^2 x}{m^2} - \frac{n^2 a}{m^2} \times c^{\frac{m(x-a)\sqrt{gn}}{n^2 b}},$$

или, если положить $a - x = z$, так что z будет обозначать расстояние, на какое поверхность воды уже снизилась, можно будет уравнению придать следующий вид:

$$v = \frac{n^2(a - z)}{m^2} - \frac{n^2 a}{m^2} : c^{\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}},$$

из которого опять ясно, что если бы отношение z к b представляло собой даже очень малую величину, то знаменатель второго члена оказался бы бесконечно большим и было бы $v = \frac{n^2(a-z)}{m^2} = \frac{n^2x}{m^2}$; но, конечно, дело обстоит иначе, пока снижение z бесконечно мало, каковой случай мы теперь и рассматриваем.

§ 17. После всего вышеизложенного теперь легко определить, на какое малое расстояние должна снизиться жидкость, пока она приобретает максимальную скорость, а именно, для этого следует положить $dv = 0$ или

$$-\frac{n^2dz}{m^2} + \frac{na}{mb}\sqrt{\frac{g}{n}} : c^{\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}} = 0,$$

т. е.

$$z = \frac{nb}{m}\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log\left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}\right).$$

Это количество, будучи умножено на высоту цилиндра m, дает количество вытекающей тем временем воды, а именно

$$nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log\left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{e}{n}}\right);$$

последняя величина, как я отметил выше в § 15, является бесконечно большой, хотя есть степень логарифма, а подобного рода бесконечное число меньше корня любой заданной степени из той же бесконечной величины, стало быть, $\log\infty$ меньше $\infty^{\frac{1}{n}}$, каким бы значительным ни было избранное число n. И я указываю на это с той целью, чтобы, таким образом, стало понятно, почему получается так, что если на основании подлинной бесконечной величины мы делаем заключение об очень больших числах, то указанное выше количество воды оказывается достаточно малым. Сверх того вот следствия этой формулы.

I. Если присоединенная труба — цилиндрическая, то получается $z = \frac{nb}{m}\log\frac{ma}{nb}$. Таким образом, при прочих равных условиях эта величина пропорциональна длине присоединенной трубки,

что, вообще говоря, и верно; действительно, следует считать, что с изменением значения b величина $\log \frac{ma}{nb} \sqrt{\frac{g}{n}}$, в силу бесконечно большого значения $\frac{m}{n}$, не изменяется.

II. Для одного и того же отверстия g и при прочих точно так же равных условиях величина z пропорциональна корню квадратному из размера наружного отверстия; и если одну и ту же трубу присоединять к сосуду, то более узким отверстием, то более широким, то количество воды в первом случае будет относиться к количеству воды во втором, как квадрат более широкого отверстия относится к квадрату более узкого отверстия.

III. Наконец, следует иметь в виду, что все приведенное выше рассуждение имеет силу для всех направлений трубы, в чем убедится всякий, кто правильно продумает § 22 части третьей. Таким образом, можно применить и горизонтальную трубу или трубу, наклоненную в каком-либо ином направлении или же как угодно изогнутую, на что, в особенности, следует обратить внимание при организации опытов. Во всех случаях под b следует понимать длину трубы, а под a — вертикальную высоту воды над наружным отверстием.

§ 18. Перехожу теперь ко времени, за которое происходят указанные выше изменения от покоя до максимальной скорости. Я утверждаю, что при исчислении подобного рода времен можно просто положить $v = \frac{n^2}{m^2} a$. Ведь остальные величины в последнем уравнении § 16 исчезают, сколь бы малой ни была взята высота z, лишь бы она находилась хотя бы в минимально заметном отношении к той бесконечно малой высоте, которая соответствует максимальной скорости, а именно к $\frac{nb}{m} \sqrt{\frac{n}{g}} \times \log\left(\frac{ma}{nb} \sqrt{\frac{g}{n}}\right)$. Отсюда следует, что вышеупомянутое время, которое я обозначу через t, равно

$$\frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{ga}} \times \log\left(\frac{ma}{nb} \sqrt{\frac{g}{n}}\right);$$

следовательно, оно бесконечно велико, хотя это же самое время совершенно незначительно, когда сечение сосуда не является бесконечным, а сколь угодно большим, что опять-таки следует объяснить природой логарифмической бесконечности.

§ 19. Так как высоту скорости, как мы это видели в предыдущем параграфе, можно прямо считать равной $\frac{n^2}{m^2}a$, т. е. равной максимальной скорости, когда поверхность снижается на наименьшую еще заметную часть того бесконечно малого снижения, после которого имеется налицо полная максимальная скорость, то отсюда следует, что в большей части изменения от покоя до состояния максимальной скорости являются неощутимыми, т. е. бесконечно малыми, и даже не только в большей части, но все, за исключением одной бесконечно малой части. Стало быть, дело происходит следующим образом. С самого начала скорость полностью отсутствует, а после того как вода снизится на бесконечно малое расстояние, скорость уже есть, но еще не максимальная. Затем, пока вода снижается на другой промежуточек, опять-таки, конечно, бесконечно малый, но бесконечно больший предшествующего, она продолжает двигаться со своей скоростью, получая бесконечно малые приращения, и тогда только она действительно достигает максимальной скорости. А так как эти последующие изменения, как бесконечно малые, не могут быть восприняты чувствами, то мы по-иному истолкуем те теоремы, которые мы дали в § 17, рассматривая взамен изменений от покоя до точки максимальной скорости те же изменения до заданной степени скорости.

§ 20. Итак, исследуем, на какой промежуточек z должна снизиться поверхность воды от положения покоя, сколько воды должно вытечь и, наконец, сколько времени должно пройти, чтобы внутренняя вода двигалась с такой скоростью, какая должна получиться при свободном падении с данной высоты, которую мы обозначим через $\frac{n^2}{m^2}e$, так что e будет обозначать подобную же высоту для скорости вытекающей воды. Для этого

нужно в последнее уравнение § 16 подставить $\frac{n^2 e}{m^2}$ вместо v; тогда получится

$$\frac{n^2 e}{m^2} = \frac{n^2 (a - z)}{m^2} - \frac{n^2 a}{m^2} : c^{\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}};$$

отсюда можно вывести

$$\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}} = \log \frac{a}{a - e - z};$$

если же здесь допустить, что e заметно меньше a, то можно отбросить стоящую под знаком логарифма букву z; тогда получится

$$z = \frac{nb}{m}\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log \frac{a}{a - e}.$$

Это уравнение дает промежуток, являющийся бесконечно малым, на который снижается поверхность воды, пока скорость вытекающей воды от покоя доходит до такого размера, какой соответствует высоте e. Этот промежуточек относится к указанному в § 17 промежутку, т. е. к тому промежутку, на котором возникает максимальная скорость, как $\log \frac{a}{a - e}$ относится к $\log \frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}$, так что первый из них оказывается в бесконечное число раз меньше второго, хотя и этот является точно так же бесконечно малым.

Далее, если найденную величину z умножить на m, то получается количество воды, вытекающей до тех пор, пока достигается та скорость, которая соответствует высоте e, каковая величина, стало быть, равна

$$nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log \frac{a}{a - e};$$

таким образом, последняя имеет конечный размер, причем этот размер тем больше, чем длиннее берут трубу и чем больший ожидается бросок.

Наконец, время, за которое это же происходит, если правильно избрать подлежащие отбрасыванию члены, оказывается равным

$$2\sqrt{\frac{nb^2}{ag}\log\frac{a}{a-e}}.$$

Таким образом, оно является конечным, но весьма малым, и ни при каком опыте бесспорно не должно продолжаться свыше секунды.

§ 21. Все вышеизложенное я хотел тщательно исследовать и изложить как потому, что с этим связано объяснение многих явлений, обычно наблюдаемых при вытекании вод, так и для того, чтобы правильно представить себе те изменения, которые совершенно неощутимы для чувств. Многие, не исследовав точно в текущих водах перехода от бесконечного к конечному или обратно — от конечного к бесконечному, не могли выпутаться из большого числа затруднений, которые, вообще говоря, легко поддаются разрешению, если вместо почти бесконечного сосуда, каковых совершенно не существует, взять очень обширный сосуд, или же, что во многих случаях оказывается достаточным, умеренно обширный сосуд; тогда формулы окажутся приблизительно верными и в зависимости от характера вопроса то больше, то меньше приблизятся к истине. Об этом я кое-что разъясню в нижеследующих опытах. Но между тем и так уже достаточно ясно из теории, а это главным образом я и решил разъяснить, почему из простого очень обширного сосуда вода вытекает сразу со всей скоростью и почему иначе обстоит дело с водами, выливающимися из сосуда через трубу. Точные же меры, касающиеся этих вопросов, должны быть выведены из уравнений.

§ 22. Наконец, что касается времени опорожнения, то ясно, что если сечение сосуда хотя бы умеренно превышает сечение присоединенной трубы, то без заметной ошибки его можно принять равным $\frac{m\alpha}{n}\theta$, где под θ следует понимать время, за какое тело, падающее свободно от покоя, проходит высоту, какую вода с начала течения имела над внешним отверстием трубы, а для

$\frac{ma}{n}$ следует взять отношение, какое существует между сечением сосуда и сечением струи, сжатой или расширенной. Но помехи, которые при этом случайно появляются, сильно увеличивают это время, и если бы потребовалось определить время, за какое поверхность воды снизится на заданную высоту, то его следует принять равным $\frac{ma}{n}(\theta - T)$, взяв для T то время, какое тело затрачивает при свободном падении с высоты, какую имеет вода над отверстием в конце течения.

Опыты, относящиеся к части четвертой

Так как большая доля этой части посвящена сжатию струи воды, текущей через отверстие, сделанное в тонкой пластинке, то я решил провести тщательные опыты над этим сжатием, но не прибегая к измерению диаметров, каковой метод по моим наблюдениям не может быть осуществлен с достаточной точностью, а исследуя действительные скорости на основании величины броска и количеств воды, вытекающих за заданные времена. При опытах я пользовался метрономом, который в течение минуты делал 144 удара, и таким образом определял промежутки времени.

К теории сжатия водяных струй

Опыт 1

Я применил тонкостенную цилиндрическую трубу, диаметр которой был равен 4 дюймам 3 линиям в английских мерах; труба имела отверстие в стенке, т. е. на цилиндрической поверхности. Диаметр отверстия был $4\frac{52}{125}$ линий. Воды вытекали горизонтально из вертикально поставленного цилиндра, и в начале вытекания высота воды над центром отверстия была равна 4 дюймам 8 линиям и та же высота в конце вытекания была равна 3 дюймам, а все вытекание продолжалось в течение одиннадцати ударов метронома, что дает время приблизительно в $4^1/_2$ сек.

Далее, повторяя чаще этот опыт и производя наблюдение как высоты отверстия над горизонтально поставленной доской, так и дальности броска в начале истечения и в конце его, я увидел из леммы, изложенной в начале опытов предыдущей части, что скорость вытекающей воды в месте максимально сжатой струи была всегда такой, насколько, конечно, об этом можно было судить на основании чувств, какая должна была соответствовать высоте воды над местом, находящимся на той же высоте, что и отверстие.

Итак, если мы допустим, что сжатие водяной струи было повсюду одинаковым, и если мы к этому случаю применим последнее уравнение § 13, а именно

$$t=\frac{2m\alpha}{n}\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right),$$

то надо будет положить $t=4^1/_2$ сек.; $\frac{m}{n}=133$; $2\sqrt{a}$ (т. е. время, затрачиваемое телом, падающим свободно с начальной высоты воды) равным 0.1483 и $2\sqrt{c}$ (т. е. аналогичное время для конечной высоты воды) равным 0.1246. В результате будет $4^1/_2=$ $=3.15\ \alpha$, откуда $\alpha=1.43$. Отсюда следует тот вывод, что сечение отверстия находилось к сечению сжатой струи в отношении 143 к 100. Это отношение чуть больше отношения $\sqrt{2}$ к 1, или 141 к 100. Но если бы можно было очень точно наблюдать скорости, то нет сомнения, что они оказались бы несколько меньшими тех, какие должны соответствовать всей высоте воды. Если принять во внимание это обстоятельство, то становится ясным, что значение α следует немного уменьшить. Итак, из всего этого опыта можно сделать тот вывод, что вернее всего вышеупомянутое отношение равнялось отношению $\sqrt{2}$ к 1.

Опыт 2

Далее я захотел исследовать на опыте, является ли сжатие одинаковым при любом направлении, и решил, что для этой цели следует поставить дело таким образом, чтобы помимо изменения

указанного направления все остальные обстоятельства были совершенно одинаковыми. Этого я достиг следующим образом.

Я воспользовался тем же цилиндром, что и раньше, но вставил его в призматический вертикально расположенный ящик таким образом, чтобы ось цилиндра была горизонтальна, и укрепленный указанным образом цилиндр вращал так, чтобы центр отверстия, предназначенного для вытекания вод, занимал то высшее место, то среднее, то низшее. В первом случае воды вытекали вертикально вверх, во втором случае — горизонтально, в третьем случае — вертикально вниз. В каждом из этих случаев я добивался того, чтобы высоты воды в ящике над центром отверстия были совершенно одинаковы. Результат был следующий.

Я наблюдал, что за одинаковое время поверхность воды в ящике во всех случаях снижалась на одинаковые расстояния. Таким образом, в выбрасываемых вверх струях верхняя вода заметно не задерживает следующей за нею нижней, что я установил также и другим способом, а именно: когда я на малом расстоянии от отверстия, например, на расстоянии 3 линий, перехватывал какой-нибудь монетой водяную струю любого направления, так что струя падала перпендикулярно на монету, то вытекание воды не замедлялось. Далее, и в струях, падающих вертикально вниз, идущая впереди вода не увлекает за собой следующей за нею воды. Самое же сжатие струи во всех случаях одинаково, если не принимать во внимание замедления и ускорения вод, выбрасываемых вверх или вниз. Эти последние дают тот результат, что на некотором расстоянии от отверстия струя либо утолщается, либо утоньчается. Ибо речь идет о том виде сжатия, которое вызывается наклонным движением частиц в области отверстия.

Опыт 3

Тем же прибором, изготовленным вышеуказанным образом, я воспользовался для того, чтобы выяснить, изменяется ли при прочих равных условиях сжатие при увеличении высоты воды над отверстием. Для этой цели я воткнул во внутреннюю стенку

ящика две иглы, расположив их по вертикали: первая из них возвышалась над отверстием на 13 дюймов 10 линий, а другая — на 12 дюймов $1^3/_5$ линии в английских мерах; сечение ящика относилось к сечению отверстия как 404 к 1; я также наблюдал, что поверхность воды снижалась от верхней иглы до нижней после 24 ударов автомата, что дает время в 10 сек.

А если то же время определить на основе допущения, что струя совершенно не сжималась и что в то же время воды вытекали со всей той скоростью, какой они должны были бы обладать, согласно теории, при отсутствии какой-либо помехи, то получается, что оно равно $6^7/_8$ сек.

Таким образом, отсюда можно заключить, что сечение отверстия относилось к с е ч е н и ю с ж а т о й с т р у и как 10 к $6^7/_8$, т. е. что $\alpha = 1.45$, между тем как в первом опыте для того же отверстия получилось, с учетом всех привходящих обстоятельств, $\alpha = 1.41$.

После того как я произвел вышеописанные опыты, оставалось еще исследовать, будут ли воды вытекать с полной скоростью, в чем я сильно сомневался, так как при увеличении скоростей воды одновременно растут и помехи, вследствие чего последние могут оказаться значительными при больших высотах воды, между тем как при меньших высотах они таковыми не являются.

Итак, применив все возможное старание (а это в особенности требуется для точности опыта), я добился того, чтобы воды вытекали по совершенно горизонтальному направлению, и произвел измерения как дальности броска, так и высоты отверстия над горизонтальной доской. После выполнения расчета я увидел, что когда высота воды была равна 13 дюймам 10 линиям, или 166 линиям, то воды вытекали или скорее протекали через с е ч е н и е с ж а т о й с т р у и со скоростью, которая соответствовала высоте $158^1/_2$ линий; таким образом, при расчете следует скорость уменьшать в отношении корней квадратных из этих высот; при этом в этой же приблизительно пропорции уменьшается значение α, которое, таким образом, оказывается не-

сколько меньшим 1.42, или опять-таки 1.41; стало быть, это позволяет сделать вывод, что одно произвольное изменение высоты воды не изменяет сжатия струи.

Опыт 4

Я имел цилиндрическую трубу высотой в 4 дюйма, сечение которой по оси представлено с помощью *CABD* (фиг. 28б); сечение цилиндра относилось к сечению отверстия *ac* как 100 к 1. Этот цилиндр, будучи наполнен водой, опорожнился за $21^1/_2$ сек. Следует при этом отметить, что водам надлежит давать возможность вытекать не раньше, чем в них перестает наблюдаться какое бы то ни было вихревое движение, ибо в противном случае вода скоро начинает вертеться в вихре, который оказывается достаточно быстрым во время вытекания, и вытекание сильно замедляется, причем замедление оказывается тем сильнее, чем быстрее внутренняя вода вращается по кругу. Далее, так как вода никогда полностью не вытекает, то я наблюдал время вытекания до тех пор, пока вода начинала вытекать по каплям.

Этот опыт показывает, что в данном случае сжатие воды было меньшим, чем в отношении $\sqrt{2}$ к 1. Я ожидал, что время опорожнения составит по меньшей мере 23 сек., но результат оказался несколько иным; позднее я заметил, что причиной этого являются удлиненные края отверстия, образовавшие, как видно из фиг. 28б, как бы очень короткую трубочку, которая противодействовала сжатию водяной струи; между тем ширина этих краев не достигала $^2/_3$ линии.

Опыт 5

Я сделал так, чтобы воды из очень широкого сосуда вытекали горизонтально через трубочку; трубка была очень короткая, а именно: она не превосходила по длине 3 линий, в диаметре же она имела почти 5 линий.

За время $11^1/_4$ сек. из нее вытекло заданное количество воды, которое должно было бы вытечь за время 10 $^2/_3$ сек., если бы струя не была сжата и не существовало бы никаких иных помех.

Я полагал, что не стоит определять действительных скоростей: никто не сомневается в том, что они были такими, какими они должны быть, чтобы за наблюденное время через наблюденное отверстие вытекло заданное количество воды, если совершенно не принимать во внимание сжатия струи.

Сверх того я применил другие трубочки иного диаметра и длины и наблюдал, что количества воды, вытекающей за заданное время с заданными скоростями, находились в правильном соответствии с вытечными отверстиями; скорости же тем больше отставали от полной скорости, соответствующей всей высоте воды, чем уже и чем длиннее была трубка, а также чем выше была вода.

К теории вод, вытекающих по трубам

Опыт 6

Цилиндрические сосуды, сечения которых по оси представлены на фиг. 24 и 25, имели высоту в 4 английских дюйма и присоединенные к ним трубки длиной в 1 фут; сечения цилиндров относились к сечениям отверстий A как 110 к 1; отверстие же B относилось к отверстию A приблизительно как 25 к 16; время опорожнения наполненных ранее цилиндров составляло для случая фиг. 24 $6^1/_2$ сек., а для случая фиг. 25 — приблизительно $4^1/_3$ тех же единиц.

В приведенных выше случаях сечения сосудов находились в достаточно большом отношении к сечениям присоединенных трубок, чтобы их можно было признать как бы бесконечно большими; поэтому, согласно правилам, указанным нами в различных местах, вода должна была вытекать через наружные отверстия со скоростями, соответствующими всей высоте воды, если только отбросить первые моменты течения, которые в данном случае настолько коротки, что их невозможно заметить. А ввиду того что, как я уже отмечал в разных местах, о количестве воды, вытекающей через трубки за заданное время, следует судить просто на основании скоростей и величины отверстий, то, согласно правилу, изложенному в § 22, я нашел, что время опорожнения в первом случае равно $4^1/_3$ сек., а во втором — почти 3 сек.

То обстоятельство, что на опыте были наблюдены несколько большие времена, следует отнести на фиг. 24 преимущественно за счет прилипания воды к стенкам трубы, а на фиг. 25 сверх того за счет другой причины, указанной в § 24 части третьей.

Следует отметить другие явления в этих сосудах, а именно: когда сосуды уже близки к опорожнению, воспринимается некий звук от воздуха, который тогда примешивается к воде в верхнем отверстии. Этот звук можно, естественно, принимать в качестве последнего момента вытекания. Далее, легко может случиться, что воде дают возможность вытекать раньше, чем она придет в состояние полного покоя (ибо вслед за наполнением воды приводятся в движение и вовлекаются в вихрь); тогда вытекание сильно замедляется, и внутри образуется род водоворота, а также к вытекающей воде непрерывно примешивается воздух. Таким образом, вытекание может быть сколь угодно замедлено, если до своего истечения воды вовлекаются в вихрь.

Опыт 7

Я воспользовался призматическим сосудом, в который была горизонтально воткнута трубочка, как на фиг. 19. Отверстие GF имело в диаметре в точности 5 линий, другое — NM $6^1/_2$ линий. Таким образом, сечения отверстий GF и NM находились между собой в отношении 100 к 169; сечение же сосуда превышало сечение отверстия NM в 201 раз. Длина трубки GN составляла 4 дюйма.

Затем я наполнил сосуд до линии CD, высота которой над осью трубы составляла 13 дюймов 10 линий. После открытия отверстия NM воды стали вытекать, и поверхность снизилась до EH за время $8^1/_3$ сек.; разность высот CE или OH составила 2 дюйма и 8 линий.

Произведя расчет по правилу § 22, где не принимаются во внимание ни помехи, ни изменения струи, мы видим, что вышеупомянутое время снижения должно было быть приблизительно равно $5^1/_2$ сек. Таким образом, данным путем можно установить, что общая средняя скорость относилась к полной скорости, ука-

зываемой теорией, как $5^1/_2$ к $8^1/_3$, или, приблизительно, как 2 к 3; отсюда можно также заключить, что вода вытекала из отверстия со скоростью, соответствующей $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, или $^4/_9$ долям высоты воды над отверстием MN; через другое же отверстие GF вода вытекала со скоростью, соответствующей приблизительно $\frac{5}{4}$ той же высоты.

Итак, отсюда снова явствует, что вытекание вод ускоряется при расширяющейся форме сечения трубы, хотя бы ни отверстие, где труба вделана в сосуд, ни положение трубы не подвергались изменению.

Далее, я наблюдал на горизонтально расположенной доске PQ дальность броска PQ для высоты oP, равнявшейся 4 дюймам 8 линиям. Я нашел, что $PQ = 9$ дюймам 6 линиям.

Из этого наблюдения следует, что если оставить в стороне расширение струи, то воды в NM должны были обладать скоростью, какая соответствует высоте в 4 дюйма 10 линий, между тем как, согласно вышеизложенному опыту, она определенно обладала скоростью, соответствующей высоте почти в 6 дюймов 2 линии. Это наблюдение подтверждает то, что я говорил в § 15, а именно, что в расширяющихся трубах водяная струя расширяется, как в m, и ее движение замедляется. В настоящем же случае, для того чтобы связать оба эти наблюдения, надо будет сказать, что струя расширилась таким образом, что ее сечение стало относиться к сечению отверстия NM, как вторая из вышеупомянутых скоростей к первой, т. е. как $\sqrt{74}$ к $\sqrt{58}$. Следовательно, диаметры расширившейся струи и отверстия относились друг к другу как 1000 к 941.

Опыт 8

Я произвел еще другой опыт, который, хотя он и не имеет сюда отношения, я тем не менее изложу. А именно, в начале трубы вблизи отверстия GF (фиг. 19) я пробуравил отверстие e почти в 2 линии и снова наблюдал снижение поверхности от CD до EN при вытекании воды через NM; одновременно я исследовал величину броска.

Я наблюдал два следующих явления, которые на первый взгляд кажутся почти противоречащими друг другу; снижение от CD до EH происходило медленнее, чем это было при первом опыте, и продолжалось теперь 10 сек., тем не менее бросок PQ оказался большим при той же высоте oP, а именно: теперь он составил уже 10 дюймов 10 линий.

Оба эти явления я объясню следующим образом: благодаря отверстию e, которое было сделано вблизи GF и которое открывает свободный доступ для воздуха, разрывается связь, которую при иных условиях имеют между собой воды в трубе, вследствие чего в том месте, где имеется малое отверстие e, воды протекают совершенно так же, как если бы труба в этом самом месте была разорвана; но они текли бы, как я показал в разных местах, медленнее, если бы труба $GNMF$, как расходящаяся, стала короче. То обстоятельство, что воды могут протекать хотя и в меньшем количестве, но все-таки с большим напором через неизмененное отверстие NM, то здесь противоречия нет и причиной этого является смешение воздуха с водой; ибо воздух непрерывно врывается в трубу через малое отверстие e и вместе с водой вытекает через NM. Наконец, то явление, что при открытом отверстии e воды фактически быстрее протекают через MN, чем при закрытом, можно по-моему объяснить только тем обстоятельством, что внешние помехи меньше воздействуют на воду, разреженную воздухом, чем на естественную.

К теории вод, вытекающих из очень широких сосудов от точки покоя до заданной степени скорости

Опыт 9

Когда воды вытекают из очень широкого сосуда через отверстие, сделанное в тонкой пластинке, то первая же капля сразу вырывается со всей той скоростью, какая соответствует высоте воды над отверстием.

Это находится в соответствии с изложенной в § 11 теорией, согласно которой, если сосуд является действительно бесконечным

или хотя и не является бесконечным в геометрическом смысле, но все-таки очень широким, то все равно с начала вытекания нельзя наблюдать ни одной частицы, которая не вытекала бы с максимальной скоростью. Это явление я объяснил в § 14 для некоторого там же рассмотренного частного случая следующим образом. Когда, согласно теории, одна или две частицы воды должны были заметно отстать от максимального броска, я указал, что столь малое количество воды не может отделиться от идущей вслед за ней воды вследствие взаимного притяжения водяных частиц, или вследствие их сцепления.

Опыт 10

Когда же воды вытекали из очень широкого сосуда через горизонтально вставленную в него трубу, то я наблюдал, что раньше, чем вытекающая струя делала максимальный бросок *от* Q (см. фиг. 19), достаточно заметное количество воды падало на горизонтально подставленную доску посередине P и Q; это количество было тем больше, чем длиннее труба GN и чем больше она расходится по направлению к N, и, наконец, эта вода распределяется неравномерно, а именно, она гораздо обильнее падает на место, более отдаленное от точки P, чем на место, более близкое к ней. Что же касается времени, в течение которого происходят все эти изменения, то я нашел, что оно очень коротко и таково, что ощутить его величину невозможно.

Все эти явления в полной мере удовлетворяют предложениям, данным нами, начиная с § 11 и до конца этой части. Однако выставленные там же величины не могут быть в точности подтверждены опытами, в особенности указанные в §§ 15, 16 и 17, в которых приводятся формулы, выражающие количество воды, вытекающей за время, проходящее от покоя до максимального броска. Причина этого заключается, во-первых, в том, что первые капли, которые должны были бы упасть на доску поблизости от точки P, не отделяются свободно от следующей за ними воды, во-вторых, в том, что ближайшее к струе oQ количество воды (которое, согласно той же теории, образует наибольшую ее

часть) не может быть увлечено, и, наконец, тем, что движение вод по трубам обычно сильно замедляется вследствие внешних помех, в особенности, если трубы расширяются и, таким образом, реальное движение является весьма отличным от того движения, какое было бы присуще водам, если бы были устранены все помехи. Измерение остальных, указанных нами величин подвержено меньшему количеству затруднений и притом легче преодолимых. Они приведены в § 20 и выражают главным образом количество воды, которое вытекает, начиная с первого момента движения, до тех пор, пока вода достигает заданной степени скорости.

Хотя в силу только что изложенных соображений, в особенности в случае расширяющихся труб, можно лишь в очень малой степени ожидать совершенного согласия теории с опытами, тем не менее я достиг в своих опытах таких результатов, что легко представил бы себе, что получилось бы полное согласие, если бы можно было устранить все помехи, а также взаимное сцепление водяных частиц. А я провел опыты как с расширяющейся трубой, так и с цилиндрической. Каждый из этих опытов я теперь изложу.

Опыт 11

На фиг. 19 в сосуд была горизонтально вставлена труба, имевшая форму усеченного конуса. Я наполнил сосуд водой до CD таким образом, чтобы высота ее над осью трубы составляла 433 равных отрезков длины, которыми я пользовался в течение всего опыта. При указанной высоте я на опыте определил точку Q, соответствующую максимальному броску; при этом оказалось, что $PQ = 287$ отрезкам в то время, как высота oP была равна 146 отрезкам. Таким образом, я увидел, что как благодаря сцеплению воды, так и благодаря форме трубы движение воды оказалось весьма замедленным, что в этих случаях и должно иметь место, как я на это несколько раз указывал. Если бы ничто не противодействовало движению, то PQ было бы равно 503 отрезкам.

После этого я поставил на горизонтальную доску чашу, края которой приходились в S и R; сначала я пустил в эту чашу воду, а затем всю воду из нее вылил. Измерив PR, я нашел, что оно равно 206 отрезкам.

Наконец, диаметр GF был равен 13 отрезкам и $MN = 17$ отрезкам; длина же трубы была равна 125 отрезкам.

После того как все это было подготовлено, причем в это время я затыкал пальцем отверстие MN, я сразу отнял палец; воды стали выливаться, и некоторая часть их попала в чашу. Эту воду я тщательно собрал в стеклянном цилиндре, диаметр которого был равен $8^1/_2$ отрезкам. Этот цилиндр оказался заполненным до высоты в 210 отрезков; таким образом, количество воды, попавшей в чашу, оказалось равным 11 922 куб. отрезкам.

Согласно же § 20, это количество должно было быть равно $nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log\frac{a}{a-e}$, где под n подразумевается сечение отверстия NM, т. е. 227 кв. отрезков, под g — сечение отверстия GF, равное 133 кв. отрезкам; далее, b обозначает длину трубы, которая была равна 125 отрезкам; под a собственно подразумевается высота поверхности CO над осью трубы, но в данном случае следует, конечно, скорее понимать высоту, соответствующую скорости частицы воды, попадающей в точку Q, т. е. 141 отрезок; аналогично также для e следует принять высоту, соответствующую скорости частицы воды, попадающей в точку R, а именно 73 отрезка. Наконец, сокращенное наименование log обозначает гиперболический логарифм. После всех указанных численных подстановок получается

$$nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log\frac{a}{a-e} = 227 \times 125 \times \frac{17}{13} \times \log\frac{141}{68} = 26\,830.$$

Таким образом, количество воды, определенное на опыте, относилось к количеству ее, которое указывается теорией, если не принимать в рассмотрение помех, как 11 922 к 26 830; хотя эти числа и немало отличаются друг от друга, тем не менее они прекрасно подтверждают теорию, что сейчас я ясно и покажу.

В выражении $nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log\frac{a}{a-e}$ мы подставим вместо a высоту, соответствующую максимальной скорости вытекающей воды, какая фактически имела место на опыте, а не ту скорость, какая имела бы место, если бы были устранены все помехи, а именно: мы взяли $a = 141$, в теории же $a = 433$. Если бы было взято это последнее значение, то при сохраненном значении высоты e, равной 73 отрезкам, получилось бы, что $nb\sqrt{\frac{n}{g}}\log\frac{a}{a-e}$ приблизительно равнялось бы 6700, каковое число теперь намного меньше числа, полученного из опыта, в то время как раньше оно было слишком большим. Но таковым оно становится, если допустить, что высота e сохраняет свое значение. Но, конечно, подобно тому, как высота a была увеличена от 141 до 433, совершенно так же следует увеличить и высоту e, и обе высоты следовало бы увеличить в одном и том же отношении, если бы помехи оказывали сопротивление первым каплям в такой же мере, как и последующим. Но при прочих равных условиях частицы встречают тем меньшее сопротивление, чем медленнее они движутся, поэтому и частицы, падающие ближе границы R, замедляются в меньшей мере, чем частицы, переходящие через эту границу. Отсюда легко понять, что высоту e следует увеличить в меньшем отношении, чем другую a; правда, это отношение я могу указать не иначе, как à posteriori, т. е. устроив так, чтобы теория оказалась в соответствии с опытом. Этим путем устанавливается, что следует положить $e = 120$, каковое число оказывается вполне удовлетворительным, если надлежащим образом учесть все окружающие обстоятельства.

Итак, мне кажется очевидным, что исход опыта оказался таким, что он вполне согласуется с теорией. Подобного рода примеры в полной мере доказывают, что мы изложили истинные законы движений в жидких телах, и я избрал их из бесчисленного множества других, так как они не имеют никакой связи и сродства с общепринятым правилом, которое утверждает, что жидкость повсюду вытекает со скоростью, соответствующей всей

высоте жидкости над отверстием, и так как они не могут быть объяснены на основе обычных начал. Впрочем, так как в настоящем опыте движение воды было замедленным, то я решил произвести другой опыт, при котором все помехи сильно уменьшаются, с тем, чтобы, таким образом, стало очевидным, что числа из опыта и из закона тем в большей мере согласуются друг с другом, чем меньшими становятся помехи.

Опыт 12

Итак, теперь я воспользовался цилиндрической трубой, через которую протекание является более легким и по той же причине более обильным. Сверх того имелся ящик, в который была вставлена гораздо более широкая труба, и, наконец, высота содержащейся в ящике воды над осью трубы была намного меньше, чтобы воды протекали с меньшей скоростью, и таким образом встречались менее значительные помехи. Все прочее оставалось попрежнему.

Таким образом, высота воды над осью трубы была равна 130 отрезкам, $oP = 553$, $PQ = 453$, $PR = 297$, диаметр GF или $MN = 19$ отрезкам и длина трубы была равна 130 отрезкам.

Я наблюдал, что вода, попавшая в чашу, заполнила цилиндр, имевший в диаметре $8^1/_2$ отрезков, до высоты в 281 отрезок, стало быть, ее объем составил 15 950 куб. отрезков. В данном случае следует положить $a = \frac{453^2}{4 \cdot 553} = 93$ отрезкам, $e = 40$ отрезкам, $n = g = 284$ кв. отрезкам и $b = 130$. После этих подстановок получается

$$nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log \frac{a}{a-e} = 284 \times 130 \times \log \frac{93}{53} = 20\,760;$$

на опыте этому числу, как мы видели, соответствует 15 950. Последнее число составляет почти $^4/_5$ первого и, таким образом,

очень сильно приближается к нему, между тем как в предыдущем примере, ввиду приведенных выше причин, числа разнились более чем в 2 раза.

Таким образом, теперь в полной мере явствует, что лишь за счет внешних помех следует отнести то обстоятельство, что опыты не в точности соответствуют формулам; но в то же время эти опыты таковы, что они не могли бы лучше доказать надежность этих формул.

ГИДРОДИНАМИКИ
ЧАСТЬ ПЯТАЯ

О движении вод из постоянно заполненных сосудов

§ 1 [43]. Сосуды поддерживаются полными, если к ним непрерывно подливают столько же воды, сколько вытекает; но подливание может происходить либо в том же направлении, в каком движется поверхность воды, и с той же скоростью в отдельные моменты времени, т. е. как если бы постоянно создавалась новая поверхность, которой уже присуща скорость ближайшей воды, либо сбоку и без напора; при этом как бы постоянно создается новая поверхность, не обладающая никаким движением и приводящаяся в движение ниже расположенной водой. Остальные способы подливания новых вод, каковых имеется бесчисленное множество, я обойду молчанием.

В рассматриваемых нами двух случаях всеми признается, что скорость истечения воды определяется высотой поверхности над отверстием; но легко наперед предвидеть, что этот закон может иметь силу лишь для бесконечно широкого повсюду сосуда [44]. В остальных же сосудах следует ожидать, что движение, начавшееся с покоя, будет постепенно и едва заметно ускоряться во времени и, наконец, спустя бесконечно большое время вытекающие воды приобретут полную скорость. На деле же в большинстве случаев ускорения создаются столь быстро, что только в течение очень малого промежутка времени отсутствует полная скорость. Правда, иначе дело обстоит в очень длинных водо-

проводах, в которых приращения скоростей не укрываются от глаз и могут быть наблюдаемы в раздельные друг от друга моменты времени.

Но как бы ни обстояло с этим делом, ввиду того что математическая точность никогда не может показаться неуместной, я решил исследовать и проследить движение вод от его начала до какого-нибудь заданного предела.

§ 2. Все свойства этого движения могут быть сведены преимущественно к трем уравнениям: 1) между количеством выброшенной воды и соответствующей скоростью, 2) между временем и скоростью и 3) между количеством воды и временем. Если имеется одно из этих уравнений, то остальные отсюда сами собой вытекают.

Постараемся поэтому исследовать более тщательно только первое из них. Но при этом мы вспомним о том, что было указано в предыдущей части о сжатии струи, вытекающей из простых отверстий или из сходящихся труб, и о расширении ее, когда она выбрасывается через расходящиеся трубы. А в § 3 части четвертой мы указали, что струю надлежит принимать во внимание до того места, где скорости частиц (если мысленно отвлечься от тех изменений, которые вызываются в частицах тяжестью вне сосуда) уже не изменяются, и что всю эту часть струи следует считать как бы движущейся внутри сосуда, т. е. как если бы поверхность струи до этого места затвердела. Следовательно, в дальнейшем, когда будет речь о сосуде, через который вытекают воды, под ним надо будет подразумевать идеальный сосуд, у которого отверстие вытекания является сечением струи, не подверженной в дальнейшем никакому изменению, разве только вызываемому снижением или подъемом струи.

Задача

§ 3. Определить скорость воды, вытекающей из постоянно полного сосуда, после того как заданное количество воды уже вытекло.

Решение

Имеется два способа подливания воды, преимущественно заслуживающих рассмотрения, из которых каждый требует иного разрешения задачи [15], а именно: либо допускается, что вода втекает в сосуд вертикально и притом таким образом, что она притекает в точности с такой же скоростью, какую имеет поверхность воды, либо же вода притекает сбоку и, таким образом, она лишена натиска, с помощью которого она могла бы сама собой следовать за поверхностью воды, и в конце концов должна быть приводима в движение.

Случай I

Для того чтобы в первом случае найти уравнение между количеством выброшенной воды и соответствующей скоростью, надлежит с изменением одного лишь обстоятельства пойти по тому же пути, по которому мы следовали в первых параграфах третьей части.

Итак, пусть, как и в § 6 третьей части, имеется предложенный сосуд *aimb* (фиг. 15 и 16), который путем подливания воды поддерживается постоянно заполненным до *cd*; через отверстие же *pl* воды вытекают. Допустим еще, что уже вытекало такое количество воды, какое может содержаться в построенном над отверстием *pl* цилиндре высоты x, и что последняя капля вытекла с такой скоростью, с какой она могла бы подняться до высоты *qs* или v. При этих условиях следует составить уравнение между x и v.

Пусть кривая *CGI* представляет собой шкалу сечения, а именно такую, что если через *HL* обозначить высоту над отверстием, то *HG* будет выражать сечение сосуда в этом месте. Проведем затем третью кривую *tru*, ордината которой *Hr* повсюду постоянно равна третьей пропорциональной *GH* и *PL*, т. е. ордината которой $Hr = PL^2 : GH$.

Назовем площадь $DCIL = M$, площадь $DtuL = N$; тогда п о т е н ц и а л ь н ы й п о д ъ е м воды, содержащейся в сосуде, после того как вышеуказанное количество уже вытекло согласно § 2 части третьей), равен $\frac{N}{M}v$. Представим себе, дальше, что вытекла

частица *plon* и что поверхность *cd* снизилась до *ef*; тогда высота скорости для частицы *plon* будет равна $v+dv$. Если теперь построить параллелограмм *LxyO*, сторона которого $LO=lo$, а другая сторона $Lx=PL$, то потенциальный подъем той же воды в положении *efmlonpie* будет равен третьей пропорциональной площади *EFLONPIE* (которая, с другой стороны, равна M, так как *PLON* выражает величину капли *plon*, в то время как *CDFE* выражает очень малое количество *cdfe*, равное указанной капле), площади *wuxyOLF* (которая равна $N-DtwF+LxyO$, откуда, если положить PL или $Lx=n$, $CD=m$, $LO=lo=dx$, то будет $Dt=\frac{n^2}{m}$ $DF=\frac{n}{m}dx$, а отсюда малая площадь $DtwF=$ $=\frac{n^3}{m^2}dx$, площадь $LxyO=ndx$ и, наконец, площадь $wuxyOLF=$ $=N-\frac{n^3}{m^2}dx+ndx\Big)$ и высоте $v+dv$. Таким образом, упомянутый только что потенциальный подъем равен $\Big(N-\frac{n^3}{m^2}dx+$ $+ndx\Big)\times(v+dv)$: M; или, если отбросить дифференциалы второго порядка, $\frac{N}{M}v+\frac{N}{M}dv-\frac{n^3}{m^2M}vdx+\frac{n}{M}vdx$, так что приращение потенциального подъема, которое прибавилось к воде в то время, как вытекла капля *plon*, будет равна $\frac{N}{M}dv-$ $-\frac{n^3}{m^2M}vdx+\frac{n}{M}vdx$, где площади N и M вследствие непрерывного подливания воды имеют постоянный размер. В настоящем первом случае мы не рассматриваем потенциального подъема частицы *cdfe*, которая притекает в то время, как другая равная частица *plon* вытекает, так как этот подъем не вызывается внутренней силой, ибо мы не предполагаем, что нижняя вода влечет за собой частицу *cdfe*, а скорее считаем, что последняя постоянно подливается какой-то внутренней силой, причем это происходит не с большей и не меньшей скоростью, чем та, какой обладает поверхность.

Таким образом, все подлежащее здесь рассмотрению приращение составляет, как мы сказали,

$$\frac{N}{M}dv - \frac{n^3}{m^2M}vdx + \frac{n}{M}vdx.$$

Но это приращение должно равняться действительному снижению центра тяжести; это снижение, если положить $DL = a$, оказывается, согласно § 7 части третьей, равным $\frac{nadx}{M}$; таким образом, получается следующее уравнение:

$$\frac{N}{M}dv - \frac{n^3}{m^2M}vdx + \frac{n}{M}vdx = \frac{nadx}{M},$$

отсюда

$$dx = Ndv : \left(na - nv + \frac{n^3}{m^2}v\right).$$

Если же последнее проинтегрировать таким образом, чтобы v и x одновременно обращались в нуль, то оно дает

$$x = \frac{m^2N}{n^3 - nm^2}\log\frac{m^2a - m^2v + n^2v}{m^2a},$$

каковое уравнение, если положить c для числа, логарифмом которого является единица, эквивалентно другому уравнению:

$$v = \frac{m^2a}{m^2 - n^2} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nm^2}{m^2N}x}\right).$$

Это решение подходит, конечно, для первого случая, когда вода вливается путем движения сверху, соединенного со снижением ближайшей поверхности.

Случай II

Если же теперь допустить, что частица $cdfe$ непрерывно подливается сбоку, тогда она вследствие своей инерции противодействует движению ниже расположенной воды, благодаря чему ее потенциальный подъем входит в расчет иным образом. В этом случае следует раньше рассмотреть потенциальный подъем водяной массы $cdmlpic$ с прибавлением к ней капли,

которая должна в скором времени притечь. Затем надлежит выяснить потенциальный подъем той же воды в положении *cdmlonpic*, а именно — после того как капля уже вытекла, и их разность следует приравнять к действительному снижению $\frac{nadx}{M}$. А потенциальный подъем всей вышеупомянутой воды до приливания частицы и ее же после подливания определяется следующим образом. Потенциальный подъем воды $cdmc = \frac{Nv}{M}$, а потенциальный подъем частицы, готовой к подливанию, является нулевым, так как будучи подлита сбоку, она не обладает еще движением, общим с ниже расположенной массой. Следовательно, потенциальный подъем той и другой воды (который, стало быть, получается, если умножить массу соответственно на ее потенциальный подъем и разделить сумму произведений на сумму масс) равен $\left(M \times \frac{Nv}{M} + ndx \times 0\right) : (M + ndx) = \frac{Nv}{M + ndx}$. А после того как частица ndx была уже подлита сверху, она приобрела движение, общее с ближайшей ниже расположенной водой, и, таким образом, потенциальный подъем той же воды в положении *cdmlonplic* оказывается равным третьей пропорциональной к площади $CDLONPIC\,(M + ndx)$, к площади $DtuxyOLD\,(N + ndx)$ и к высоте $v + dv$, т. е. равным $\frac{(N + ndx)(v + dv)}{M + ndx}$, превышение которого над предшествующим потенциальным подъемом равно $\frac{Ndv + nvdx + ndxdv}{M + dx}$, а если отбросить дифференциалы второго порядка, то равно $\frac{Ndv + nvdx}{M}$. Таким образом, получается следующее уравнение $\frac{Ndv + nvdx}{M} = \frac{nadx}{M}$, которое, будучи истолковано как и предыдущее и будучи доведено до конца, дает

$$x = \frac{N}{n} \log \frac{a}{a - v},$$

откуда

$$v = a\left(1 - c^{-\frac{nx}{N}}\right),$$

каковое решение имеет силу для подливания сбоку.

Пояснение 1

§ 4. Приведенные выше уравнения сильно различаются между собой. Различие это тем более, чем меньше сечение сосуда; но если верхнее сечение сосуда в cd как бы бесконечно велико по сравнению с сечением отверстия, то n по сравнению с m исчезает, тогда как в первом, так и во втором случае получается

$$v = a\left(1 - c^{-\frac{nx}{N}}\right).$$

Таким образом, при указанном выше допущении движение становится в обоих случаях тождественным, что каждый без труда мог бы наперед предугадать. Но при прочих равных условиях движение при первом подливании оказывается всегда более быстрым, чем при втором.

Будет уместно объяснить здесь это обстоятельство и с физической стороны, для того чтобы мы могли более ясно разбираться в каждом отдельном случае.

Пусть в интересах более краткого изложения вместо произвольного и имеющего любое направление сосуда взят вертикальный цилиндр с отверстием в дне, а именно $GMND$ (фиг. 29), и пусть затем имеется сосуд $EFPQ$, просверленный в RS. Представим себе, что отверстия RS и GD совершенно равны и расположены точно одно под другим на очень малом расстоянии, так что воды, вытекающие из верхнего сосуда, полностью втекают в подставленный под ним цилиндр.

Воды начинают вытекать из обоих сосудов, но при этом предполагается, что из верхнего сосуда они постоянно вытекают с такой скоростью, какую имеет поверхность воды в подставленном цилиндре.

Ясно, что таким образом выполняется первое условие подливания. Исследуем же явления этого движения с тем, чтобы посмотреть, находятся ли они в соответствии с тем, что было изложено выше.

Итак, будем рассматривать верхний сосуд как бы бесконечно большим, дабы воды, вытекающие через RS, имели в отдельные моменты времени скорость, соответствующую высоте PB или FA. Таким образом, надо будет представить себе, что указанная выше высота PB сначала бесконечно мала, ибо тогда воды должны вытекать с бесконечно малой скоростью, а затем она постепенно растет и притом постоянно все больше и больше, пока спустя босконечно большое время движение не станет равномерным. Спрашивается, сделается ли высота воды PB в конце концов бесконечной или же она не перейдет известного предела. Это можно выяснить следующим образом.

Пусть высота GH или RH (ибо их не следует считать отличными друг от друга) равна a, $AF = x$, сечение отверстия $LM = n$, сечение отверстия $RS = m$. А так как, что ясно, оба сосуда находятся во взаимной связи и, можно считать, образуют один сосуд, то спустя бесконечное время (согласно § 23 части третьей) скорость воды в LM будет равна $\sqrt{a+x}$, а в RS будет равна $\sqrt{x}$ (последнее становится ясным, если теперь эти сосуды рассматривать, как отдельные, ибо можно без погрешности представить себе и то и другое). Но скорости должны находиться в обратном отношении к сечениям отверстий [46]. Таким образом, $\sqrt{a+x} : \sqrt{x} = m : n$, откуда $(a+x) : x = m^2 : n^2$, или $a : x = (m^2 - n^2) : n^2$. Следовательно,

$$x = \frac{n^2 a}{m^2 - n^2} \text{ и } a + x = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2}.$$

Итак, мы видим, что высота, соответствующая скорости воды в LM, оказывается при этом равной $\frac{m^2 a}{m^2 - n^2}$ после того, разумеется, как вылетело уже бесконечное количество воды. Но раньше мы имели для той же высоты выражение

$$v = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nm^2}{m^2 N} x}\right),$$

где, если допустить $x = \infty$ (ибо за бесконечное время вытекает бесконечное количество), показательный член исчезает, если только m больше, чем n, и таким образом получается точно так же $v = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2}$. Это совпадение является удивительным, так как пути, которыми мы шли, весьма отличны друг от друга. Вообще же, если m не больше n, то движение никогда не становится установившимся, хотя бы и спустя бесконечно большое время, ибо тогда скорость увеличивается до бесконечности, так как в противном случае высота скорости никогда не превзошла бы высоты $\frac{m^2 a}{m^2 - n^2}$. Поэтому об этих случаях мы не будем говорить.

Пояснение 2

Здесь встает и другой заслуживающий внимания вопрос, а именно, каким может быть механический способ подливания с тем, чтобы верхний сосуд во время всего течения оставался постоянно заполненным до должной высоты. Эта задача представлялась бы трудной вследствие непостоянства искомой высоты, если бы в данном случае не нашлось особого приема, который я сейчас изложу.

А основывается он на том, что на очень малом пространстве $RSDG$ вода не допускает никакого сжатия — ни положительного, ни отрицательного, так как, согласно допущению, она движется со скоростью, общей с очень близко расположенной к ней водой, так что ни одна частица не стремится ни подтолкнуть, ни задержать другой частицы.

Итак, пусть изготовлены оба сосуда, о которых я говорил выше, и пусть труба, присоединенная к верхнему сосуду (ведь раньше мы только ради проведения доказательства допустили, что она отделена от сосуда), имеет в верхней своей части a (фиг. 30) малое отверстие, которому соответствует трубочка am; в эту трубочку пусть будет вставлена изогнутая стеклянная труба $abcdg$ после предварительной обмазки краев mn воском. Пусть затем будет проведена горизонтальная прямая ae и отме-

чена точка e. После вышеуказанных приготовлений следует сделать так, чтобы в течение всего опыта верхний край воды постоянно оставался в точке e. Для этого необходимо, чтобы сначала поверхность воды была очень близка ко дну FP, чтобы затем она непрерывно повышалась и чтобы, наконец, хотя бы и спустя бесконечное время, она не переступала высоты $\frac{n\alpha^2}{m^2-n^2}$; притоком же воды легко будет управлять таким образом, чтобы поверхность сильно не отклонялась от точки e, если только обстоятельства не сложатся так, что уже с самого начала воды будут приливаться слишком быстро.

Если же мы заметим, что поверхность в трубочке поднялась выше e, то надо задержать немного приток; как это сделать, я покажу особо, в противном же случае нужно подливать воды более обильно.

Этот род опыта, который я зачастую производил, не вызывает никакого затруднения, но для того чтобы в этот опыт не вкралось какой-либо ошибки, надлежит исследовать действие капиллярной трубки. Это действие можно найти, если, заткнув отверстие LM, предварительно смочив трубу, заполнить цилиндр водой до верхнего края и при этом установить, что поверхность воды в трубке доходит до f, т. е. до более высокого места, чем e; эту именно точку f нужно подставить вместо той, которую мы только что назвали, с тем, чтобы отвлечься от природы капиллярных трубок.

Итак, указанным выше путем правильно достигается подливание до нормы, принятой в нашем допущении, и, таким образом, затем могут быть произведены опыты. А после того как мы достаточно пространно изложили этот вопрос, нет, полагаю, необходимости в указании, что мы исследуем только нижний цилиндрический сосуд, а верхний сосуд служит только для того, чтобы цилиндр поддерживался наполняемым, каким это нам необходимо, и, стало быть, что под m следует подразумевать не сечение верхнего сосуда, а сечение отверстия RS, которое собственно и представляет собой поверхность воды, так как воды выше RS служат только для надлежащего притока воды в нижний цилиндр.

Пояснение 3

§ 6. Я не должен оставить здесь неотмеченным, что таким образом мы имеем случай, относящийся к гидравлической статике, о каковой науке я упоминал в § 8 части первой; мы знаем теперь, с какой скоростью вода должна протекать в a с тем, чтобы давление ее на стенки трубы было в точности равно нулю. В то время как я это писал, я уже открыл общие гидравлико-статические законы и не без удовольствия увидел, что этот случай или следствие, выведенное здесь из специальных соображений, получает аналитическое решение на основе общей теории. Таким образом, повсюду все находится во взаимной связи и доказывает законное применение основных начал.

Пояснение 4

§ 7. Теперь следует кое-что о другом способе подливания воды. Представим себе вместо любого сосуда цилиндр $RHNS$, и пусть он поддерживается постоянно наполненным путем подливания достаточного количества воды сбоку; это может быть осуществлено ıерез трубочку ma. Хотя это не осуществляется без движения, однако так как последнее является горизонтальным, то оно скоро полностью прекращается и само по себе не вызывает течения в цилиндре, а равно его и не замедляет. Но имеется сверх того иной способ, который по нашему мнению при правильном проведении вычисления приводит к тому же. А именно, если мы считаем, что сосуд $EFPQ$ бесконечно обширен, и представляем себе, что его дно постоянно покрыто водой, но так, что высоту воды в верхнем сосуде можно считать бесконечно малой, то верхний сосуд будет вбирать воду из приделанной к нему трубы; и тогда отсюда не возникнет иного движения, кроме движения от бокового приливания, если только отверстие RS будет все время оставаться прикрытым. Но легко может случиться, что там образуется некоторый водопад, если отверстие LM широко, а трубка $RSNH$ длинна. Что этот второй способ должен вызывать тот же эффект в движении вод, что и первый, об этом вся-

кий может заключить на основании того, что при обоих способах инерция воды, поступающей в трубу, должна полностью преодолеваться нижней водой. Но это же можно доказать à priori, если движение, которое должно отсюда возникнуть, исследовать на основе уравнения 8 части третьей, которое имеет следующий вид:

$$Ndv - \frac{m^2vydx}{n^2} + \frac{m^2vdx}{y} = -yxdx.$$

А это уравнение будет приурочено к настоящему случаю, если вместо m, x и $-dx$ подставить соответственно n, a и $\frac{ndx}{y}$ (что ясно из сопоставлений этих величин) и одновременно допустить, что y является бесконечно большим. В этом случае третий член уравнения исчезает и получается совершенно такое же выражение, как мы уже раньше нашли:

$$Ndv + nvdx = nadx.$$

После того как в приведенных выше пояснениях мы показали свойства обоих движений, насколько это позволяет простое физическое рассмотрение дела, а также их различие и вместе с тем изложили способ их вывода на основе механического закона, остается еще показать остальные более замечательные явления, что теперь я и сделаю.

Следствие 1

§ 8. Пусть в сосуде $RSNH$ дно совершенно отсутствует; тогда отверстие LM будет равно отверстию RS. Последнее может быть и больше первого, а именно, если стенки сосуда расходятся. В этих случаях высота v в уравнении

$$v = \frac{m^2a}{m^2 - n^2} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nm^2}{m^2N}x}\right)$$

не имеет никакого предела и становится бесконечной, если количество выбрасываемой воды, обозначенное через nx, является бесконечным.

Это, конечно, само по себе явствует из уравнения, когда n больше m; если же сечения отверстий между собой равны, то

следует прибегнуть к дифференциальному уравнению § 3, из которого было выведено нижеследующее уравнение, а именно:

$$\frac{N}{M}\,dv - \frac{n^3}{m^2M}\,vdx + \frac{n}{M}\,vdx = \frac{n}{M}\,adx;$$

если в последнем положить $n=m$, то оно дает $Ndv = nadx$, т. е. $v=\frac{nax}{N}$, где v, очевидно, бесконечно, если x бесконечно.

§ 9. Если же в рассматриваемом сосуде имеется дно, а в последнем отверстие, сечение которого, обозначенное через n, меньше сечения отверстия RS, обозначенного через m, то v имеет значение, которого, правда, оно никогда не достигает, но к которому оно тем не менее очень сильно приближается и подходит столь быстро, что спустя весьма короткий промежуток времени течения, какой еще может быть воспринят чувствами, оно от него заметно не отличается, если только в данном случае не применяются умышленно для этого придуманные противодействующие сосуды. Этот предел таков:

$$v = \frac{m^2a}{m^2-n^2}.$$

Таким образом, в случае второго пояснения § 5 крайний предел PB есть $v-a=\frac{n^2a}{m^2-n^2}$. Я поясню на примере очень быстрое приближение скорости к крайнему своему пределу после того, как дам еще уравнение между v и временем, соответствующим высоте v.

Следствие 3 [47]

§ 10. В случае того подливания, которое мы называем боковым, предельная высота $v=a$, каково бы ни было соотношение между отверстиями обоих сосудов.

Следствие 4

§ 11. Если сосуд цилиндрический и его длина принимается равной b, то (см § 3) $N=\frac{n^2b}{m}$. Надлежит при этом отметить, что не следует смешивать значений букв a и b, ибо первая обозна-

чает высоту верхнего отверстия над нижним, а вторая — длину канала. Следовательно, эти значения согласуются между собой лишь в том случае, когда ось сосуда является прямолинейной и вертикальной. Если же ось является извилистой или хотя бы не вертикальной, то они отличаются друг от друга. Я счел желательным определенно это отметить, дабы кто-нибудь не был введен в заблуждение рисунками сосудов, оси которых я повсюду представил прямыми и вертикальными.

Итак, если для цилиндрических сосудов положить $N = \frac{n^2}{m} b$, то для вертикального подливания получается

$$v = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2} \times \left(1 - c^{\frac{n^2 - m^2}{n^2 b} x}\right),$$

а для другого, бокового, получается

$$v = a\left(1 - c^{-\frac{mx}{nb}}\right).$$

Задача

§ 12. Определить скорость воды, вытекающей из постоянно полного сосуда, после того как вытекание продолжалось заданное время.

Решение

Если сохранить все допущения и обозначения, которые мы применили в § 3, и если сверх того положить, что время, протекающее с начала течения, равно t, то нам надо будет заменить данные в названном параграфе уравнения другими, выражающими соотношение между t и v, исключив величины x и dx. Но элемент малого промежутка времени dt пропорционален весьма малому пробегаемому при этом промежутку пространства dx, разделенному на скорость $\sqrt{v}$. Поэтому положим $dt = \frac{\gamma dx}{\sqrt{v}}$, и таким образом уравнение

$$dx = N dv : \left(na - nv + \frac{n^3}{m^2} v\right),$$

данное для вертикального подливания, которое должно производиться с необходимой скоростью, превратится в следующее:

$$dt = N\gamma dv : \left(na\sqrt{v} - nv\sqrt{v} + \frac{n^3}{m^2} v\sqrt{v}\right); \tag{I}$$

другое же, служащее для бокового подливания, а именно:

$$dx = Ndv : (na - nv),$$

после подобной же подстановки перейдет в

$$dt = N\gamma dv : (na\sqrt{v} - nv\sqrt{v}). \tag{II}$$

А эти уравнения, будучи проинтегрированы должным образом, дают для первого из них

$$t = \frac{mN\gamma}{n\sqrt{(m^2a - n^2a)}} \times \log \frac{m\sqrt{a} + \sqrt{(m^2v - n^2v)}}{m\sqrt{a} - \sqrt{(m^2v - n^2v)}}, \tag{α}$$

а для другого, которое получается из первого, если положить $m = \infty$,

$$t = \frac{N\gamma}{n\sqrt{a}} \times \log \frac{\sqrt{a} + \sqrt{v}}{\sqrt{a} - \sqrt{v}}, \tag{β}$$

что и требовалось определить.

Пояснение

§ 13. Если сосуд, о котором идет речь, является цилиндрическим, как угодно закрученным и наклоненным, и если длина его принята равной b, то при той же высоте a поверхности воды над отверстием получается снова, как в § 11, $N = \frac{n^2}{m} b$.

А ввиду того, что, как известно, $2\gamma\sqrt{A}$ выражает время, какое затрачивается телом, падающим свободно из покоя с высоты A, то ясно, что величина $\frac{2mN\gamma}{n^2\sqrt{a}}$ $\left(\text{равная } 2\gamma\sqrt{\frac{b^2}{a}}\right)$ выражает время, за какое тело, начинающее двигаться свободно из покоя, снижается на высоту $\frac{b^2}{a}$. Возьмем это время в качестве общей меры и поло-

жим его равным θ; тогда уравнение (α) для цилиндрических сосудов или труб преобразуется в следующее:

$$t = \frac{n\theta}{2\sqrt{(m^2 - n^2)}} \times \log \frac{m\sqrt{a} + \sqrt{(m^2v - n^2v)}}{m\sqrt{a} - \sqrt{(m^2v - n^2v)}};$$

другое же, обозначенное через (β), станет таким:

$$t = \frac{n\theta}{2m} \times \log \frac{\sqrt{a} + \sqrt{v}}{\sqrt{a} - \sqrt{v}}.$$

Из обоих этих уравнений явствует, что воды не могут не приобрести почти полную скорость за кратчайшее время, причем это происходит тем скорее, чем шире труба, чем она короче и чем более она вертикальна. А эти ускорения не могут быть каким-либо образом замечены, если только не устраиваются очень длинные водопроводы, и тогда за короткое время просматриваются почти все степени ускорения. То и другое я поясню теперь на примере.

I. Требуется определить время, за какое жидкость, вытекающая из постоянно полного вертикального цилиндра длиной в 16 английских футов, с диаметром, впятеро превышающим диаметр отверстия, приобретает скорость, соответствующую высоте $\frac{99}{100}a$, причем это надо сделать, исходя из того допущения, к которому относится второе уравнение. Таким образом, имеется $\frac{n}{m} = \frac{1}{25}$, $v = \frac{99}{100}a$, $b = a$, откуда время, затрачиваемое телом, падающим свободно с расстояния $\frac{b^2}{a}$, или θ, равно 1 сек. Отсюда получается $t = \frac{1}{50}\log 399$, т. е. почти $^1/_9$ части 1 сек., каковое малое время, конечно, не поддается восприятию. Если же принимается заметное время, то изменения высот v становятся неощутимыми. Если подобное же время (а именно, за какое создается скорость, равным образом соответствующая $\frac{99}{100}$ той высоты, какая образуется по истечении бесконечного времени) требуется определить на основе первого допущения, т. е. если

требуется определить время, за какое получается $v = \frac{99}{100} \times \left(\frac{m^2 a}{m^2 - n^2}\right)$. то оно оказывается несколько большим первого, но на неощутимый избыток. Отсюда ясно, что при подобного рода сосудах воды вообще не могут достаточно быстро вливаться в верхний сосуд, чтобы удовлетворить принятому допущению. Поэтому, исходя из принятых допущений, можно проверить опытом только следующие положения. Действительно ли высота BP (фиг. 30) так велика, какой она была принята на основании § 5 этой части; тогда точки e или f при течении сохранят то положение, какое они занимали до течения при заткнутом отверстии LM и почти полном отсутствии воды в верхнем сосуде.

II. Теперь требуется снова определить это же время при втором допущении, если труба будет того же сечения и будет снабжена тем же отверстием, но будет расположена наклонно и будет иметь длину в 184 туазов или 1104 парижских футов, причем высота поверхности воды над вытечным отверстием будет составлять 16 парижских футов. Таким образом, получится $b = 1104$ и $\frac{b^2}{a} = 76\,176$, а также приблизительно $\theta = 72$ сек., откуда искомое время оказывается средним между 8 и 9 сек., что, конечно, в достаточной мере заметно. Но если бы понадобилось определить время, за какое высота v окажется равной лишь $^1/_4$ высоты a, то будет найдено, что оно равно $\frac{72}{50} \times \log 3$, т. е. приблизительно равно $1^1/_2$ сек.

Я не знаю, находится ли это в соответствии с тем, что наблюдал Мариотт, согласно его сообщению в трактате «О движении вод» (ч. 5, раздел 1), где он упоминает о некоем фонтане, находящемся в Шантильи, к которому воды подводятся по каналу длиной в 184 туаза, если только я об этом правильно заключил из предыдущего, и максимальная высота поверхности воды над вытечным отверстием, обозначенная через a, составляла 16 футов. Диаметр водопровода был равен 5 дюймам, отверстие же имело диаметр в 1 дюйм. Из изложения Мариотта вытекают как будто значительно меньшие ускорения, чем следующие из наших фор-

мул. Не знаю, следует ли это отнести за счет того, что воды имели, быть может, иной выход, помимо того, о котором здесь была речь, или же за счет того, что во время начала течения водопровод не был заполнен водой, что, как я полагаю, позднее оказывает большое влияние. Если ни того, ни другого не было, то, полагаю, явления, которые наблюдал Мариотт и которые ежедневно можно вновь наблюдать, вполне согласуются с нашими вычислениями. Между прочим, вот подлинные слова Мариотта: «Сверх того, — говорит он, — с этим особенным броском случалось, что если закрыть отверстие рукой на промежуток времени в 10 или 12 сек. и затем его открыть, то вода не тотчас же вырывается, но бросок, понемногу повышаясь, поднимается до 3 дюймов, а затем до 1 фута и, наконец, с последовательными заметными промежутками, до 2 футов... Но все-таки в конце концов воды выскакивали с полным своим напором».

Задача

§ 14. Определить количество воды, протекающей за данное время через данный сосуд, который поддерживается постоянно заполненным.

Решение

При применении снова положений и обозначений §§ 3 и 12 теперь следует найти уравнение между x и t. А ввиду того, что, как мы видели в § 12, будет $dt = \frac{\gamma dx}{\sqrt{v}}$, то $\sqrt{v} = \frac{\gamma dx}{dt}$, и это значение следует подставить в те проинтегрированные уравнения, которые мы дали в § 3. Первым из этих уравнений было следующее:

$$v = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2}\left(1 - c^{\frac{n^3 - nm^2}{m^2 N}x}\right);$$

после выполнения указанной выше операции оно превращается в следующее:

$$\frac{\gamma^2 dx^2}{dt^2} = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2}\left(1 - c^{\frac{n^2 - nm^2}{m^3 N}x}\right). \qquad (I)$$

Вторым из упомянутых нами уравнений § 3 было

$$v = a\left(1 - c^{-\frac{n}{N}x}\right),$$

которое, стало быть, в настоящем случае дает следующее:

$$\frac{\gamma^2 dx^2}{dt^2} = a\left(1 - c^{-\frac{n}{N}x}\right). \qquad \text{(II)}$$

Теперь следует проинтегрировать уравнения (I) и (II), что, конечно, легко, и так как первое из них содержит в себе второе ибо оба они тождественны, когда $m = \infty$), то мы будем обрабатывать только первое уравнение и будем рассматривать его в следующем виде:

$$dt = \frac{\gamma\sqrt{(m^2 - n^2)}}{m\sqrt{a}}\,dx : \sqrt{\left(1 - c^{\frac{n^3 - nm^2}{m^2 N}x}\right)}.$$

Положим теперь, дабы тем больше раскрылся способ интегрирования,

$$c^{\frac{n^3 - nm^2}{m^2 N}x} = z,$$

и потому

$$dx = \frac{m^2 N dz}{(n^3 - nm^2)\,z};$$

затем ради краткости обозначим постоянную величину

$$\frac{\gamma\sqrt{(m^2 - n^2)}}{m\sqrt{a}} \times \frac{m^2 N}{n^3 - nm^2}, \text{ или } -\frac{\gamma m N}{n\sqrt{(m^2 - n^2)\,a}},$$

через α; тогда мы будем иметь

$$dt = \frac{\alpha dz}{z\sqrt{(1 - z)}}.$$

Если сверх того в этом уравнении положить $1 - z = q^2$, или $z = 1 - q^2$, $dz = -2qdq$, то получится

$$dt = -\frac{2\alpha dq}{1 - q^2} = -\frac{\alpha dq}{1 + q} - \frac{\alpha dq}{1 - q},$$

интегралом которого является

$$t = -\alpha \log (1+q) + \alpha \log (1-q) = \alpha \log \frac{1-q}{1+q}.$$

Постоянная величина здесь не нужна, так как по существу дела t и x должны одновременно обратиться в нуль, а если положить $x=0$, то получается $z=1$ и $q=0$; таким образом, как t, так и q должны начинаться с нуля, каковому условию удовлетворяет найденное уравнение

$$t = \alpha \log \frac{1-q}{1+q}.$$

Остается еще обратным порядком найти заново прежние значения. Но таким образом получается

$$t = \alpha \log \frac{1-\sqrt{(1-z)}}{1+\sqrt{1-z}},$$

или

$$t = \frac{\gamma m N}{n\sqrt{(m^2-n^2)a}} \times \log \frac{1+\sqrt{(1-z)}}{1-\sqrt{(1-z)}},$$

или, наконец,

$$t = \frac{\gamma m N}{n\sqrt{(m^2-n^2)a}} \times \left[\log \left[1 + \sqrt{1 - c^{\frac{n^3-nm^2}{m^2N}x}} \right] - \right.$$

$$\left. - \log \left[1 - \sqrt{1 - c^{\frac{n^3-nm^2}{m^2Nx}}} \right] \right]. \qquad \text{(I)}$$

А если в этом уравнении положить $m=\infty$, то оно дает другое искомое уравнение

$$t = \frac{\gamma N}{n\sqrt{a}} \times \left[\log \left[1 + \sqrt{1 - c^{-\frac{n}{N}x}} \right] - \right.$$

$$\left. - \log \left[1 - \sqrt{1 - c^{-\frac{n}{N}x}} \right] \right], \qquad \text{(II)}$$

что и требовалось определить.

Следствие 1

§ 15. Если положить $x=\infty$, как это ясно из существа дела, когда вытекло уже бесконечное количество воды, и если взять m бо́льшим, чем n, как это в большинстве случаев и бывает, то в обоих логарифмах, взятых положительно, исчезает член с показателем, и в обоих получается $\log 2$. А в логарифме, взятом отрицательно, следует положить

$$\sqrt{1-c^{\frac{n^3-nm^2}{m^2N}x}}=1-\frac{1}{2}c^{\frac{n^3-nm^2}{m^2N}x};$$

поэтому

$$\log\left[1-\sqrt{1-c^{\frac{n^3-nm^2}{m^2N}x}}\right]=\log\frac{1}{2}c^{\frac{n^3-nm^2}{m^2N}x}=\frac{n^3-nm^2}{m^2N}-\log 2.$$

Если правильно произвести эти подстановки, то для первого придуманного нами способа подливания будет

$$t=\frac{\gamma mN}{n\sqrt{(m^2-n^2)a}}\times\left(2\log 2+\frac{m^2n-n^3}{m^2N}x\right); \qquad (I)$$

если здесь снова положить $m=\infty$, то это дает для второго случая

$$t=\frac{\gamma N}{n\sqrt{a}}\times\left(2\log 2+\frac{n}{N}x\right). \qquad (II)$$

Из этих формул следует, что воды вытекают во всяком случае в меньшем количестве, чем если бы они сразу с самого начала стали вытекать со всей той скоростью, которую они в обоих случаях приобретают спустя бесконечное время.

Разница, однако, никогда не выходит за определенный предел и по истечении бесконечного времени удерживается в конечных пределах.

Следствие 2

§ 16. Когда мы обращаем найденные уравнения, то мы получаем

$$x=\frac{2m^2N}{m^2n-n^3}\times\left[\log\left(1+c^{-\frac{t}{a}}\right)-\log 2+\frac{t}{2a}\right] \qquad (I)$$

и

$$x=\frac{2N}{n}\times\left[\log\left(1+c^{-\frac{t}{\beta}}\right)-\log 2+\frac{t}{2\beta}\right], \qquad \text{(II)}$$

где, как и раньше, $\alpha=\frac{\gamma mN}{n\sqrt{(m^2-n^2)\,a}}$ и $\beta=-\frac{\gamma N}{n\sqrt{a}}$.

Если сверх того, как в предыдущем следствии, положить $t=\infty$, то единица исчезает по сравнению с показательными количествами, которые являются бесконечными величинами выше всякого порядка, и получается $\log\left(1+c^{-\frac{t}{\alpha}}\right)=-\frac{t}{\alpha}$, а также $\log\left(1+c^{-\frac{t}{\beta}}\right)=-\frac{t}{\beta}$; отсюда, если снова взять значения букв α и β, будет

$$x=\frac{mt\sqrt{a}}{\gamma\sqrt{(m^2-n^2)}}-\frac{2m^2N}{m^3n-n^3}\log 2 \qquad \text{(I)}$$

и

$$x=\frac{t\sqrt{a}}{\gamma}-\frac{2N}{n}\log 2. \qquad \text{(II)}$$

Таким образом, если бы и там и здесь воды сразу с самого начала течения все время вытекали со всей той скоростью, какую они могут получить, то их количество спустя бесконечное время не превысило бы того количества, какое соответствует теории для того же времени, разве только на очень малое количество, которое в первом случае выражается через $\frac{2m^2N}{m^2-n^2}\log 2$, а во втором — через $\frac{aN}{n}\log 2$. И если вместо бесконечного времени взять время лишь в несколько секунд, то приближенно будет иметь место та же **теорема**, так что, например, если спустя первые 10 сек. вытечет количество Q, то за следующие 10 сек. должно будет вытечь $Q+\frac{2m^2N}{m^2n-n^2}\log 2$, а во втором случае $Q+\frac{2N}{n}\log 2$.

Пояснение

§ 17. К изложенной до настоящего времени теории относится и движение вод в сифонах. Теория указывает, что ось сифона может быть как угодно изогнутой, и этим не будет уничтожено движение вод, если только высота поверхности воды над вытечным отверстием остается неизменной. Так как сверх того водопроводы, сифоны или насосы и иные подобного же рода сосуды обычно бывают цилиндрическими, надлежит всякий раз, когда это случится, положить, как я это указал в § 13, $N=\frac{n^2}{m}b$, причем под b следует подразумевать длину трубы или сифона. В формулах §§ 14, 15 и 16, когда ставится вопрос о времени, надлежит их тоже истолковать таким образом, чтобы $2\gamma\sqrt{A}$ представляло время, затрачиваемое телом на начатое с покоя падение с вертикальной высоты A. Впрочем, как я уже говорил в различных местах, теория настоящей части не указывает ничего особенного, что поддавалось бы чувствам, разве только у водопроводов весьма длинных, сильно наклоненных к горизонту и снабженных не слишком узким отверстием. Ибо все эти три обстоятельства приводят к тому, что ускорения должны замедляться и, таким образом, должны стать заметными: измерения ускорений больше всего подтверждают теорию.

Однако и при этих обстоятельствах следует придерживаться какой-то середины, дабы помехи, которые должны вызываться прилипанием воды, не оказались чрезмерными.

Что касается приливания вод, то, мне кажется, я замечал, что когда оно происходит вертикально и с напором, то очень далеко от того, чтобы движение ускорялось, а скорее оно даже замедляется, если только приливание вод не производится равномерно по всей поверхности тем способом, который я изложил в § 4, ибо если они подливаются иным путем, то движение вод в сосуде возмущается, и это беспорядочное движение замедляет вытекание.

§ 18. Наконец, сюда в известной мере относятся опыты, произведенные знаменитым Джованни Полени, как он о них сообщает

в первой книге «О движении смешанных вод» (стр. 21 и след.). На них, я полагаю, следует здесь сослаться, так как они отлично доказывают, что в постоянно наполненных сосудах последняя скорость повсюду такова, что она соответствует всей высоте воды, если сосуды не погружены в воду, или же разности высот внутренней и наружной воды в погруженных сосудах, хотя в остальном в этих опытах нет ничего такого, что в настоящее время представлялось бы еще новым, так как там совершенно не принимаются во внимание ускорения.

Вообразим цилиндр как бы бесконечного сечения, имеющий вертикально направленную ось. Пусть дно его цело, но пусть на боковой поверхности его имеется параллельная оси щель, имеющая форму узкого прямоугольника и простирающаяся от дна доверху. Представим себе дальше, что вода подливается в цилиндр равномерно, так что в равные времена в сосуд попадают равные количества ее; тогда воды будут вытекать из цилиндра через щель. Однако по началу они не будут вытекать в таком же количестве, в каком они сверху подливаются, а в меньшем. Таким образом, поверхность воды в цилиндре будет подниматься до определенной ассимптотической высоты. Если же представить себе, что этот предел уже имеется налицо, то высота воды будет оставаться неизменной, и воды будут постоянно вытекать в таком же количестве, в каком они будут подливаться. Ясно также, что высота воды в цилиндре будет тем большей, чем обильнее они будут подливаться. И вот спрашивается, в каком отношении должны возрастать высоты, до которых будут подниматься воды в цилиндре, при увеличении количеств вод, которые должны подливаться в течение заданного времени.

Решение таково. Пусть высота воды, когда она находится в неизменном состоянии, равна α; отделим от поверхности часть ее, которая пусть равна x, вместе с дифференциалом dx. Пусть ширина щели равна n; тогда мы будем иметь как бы отверстие с сечением, равным ndx, через которое воды вытекают со скоростью $\sqrt{x}$. Таким образом, скорость воды, вытекающей там за данное время, пропорциональна $ndx\sqrt{x}$, интегралом чего является

$\frac{2}{3} nx \sqrt{x}$. Последнее выражает количество воды, вытекающей за данное время через длину x щели. Таким образом, количество воды, вытекающей за то же время через всю щель, определится через $\frac{2}{3} n\alpha \sqrt{\alpha}$. Но вытекает столько воды, сколько подливается. Отсюда, если обозначить через q количество воды, подливаемой за данное время, то будет $\frac{2}{3} n\alpha \sqrt{\alpha} = q$. Это показывает, что количество вод, которые должны подливаться в течение заданного времени, следуют полуторному отношению высот, до которых воды поднимаются от дна цилиндра, или, наоборот, что высоты следуют третичному отношению квадратов количеств [48], в каких воды подливаются в течение заданного времени.

§ 19. После решения этой задачи я перехожу к другой задаче, рассмотренной знаменитым Полени.

Пусть имеется тот же цилиндр, но погруженный в воды, покоящиеся во рву, как бы в бесконечно большом сосуде. Обозначим высоту погружения через a. Теперь требуется, при тех же, что и раньше, допущениях, снова найти уравнение между высотой α поверхности внутренней воды над внешней и количеством воды q, которое должно подливаться в течение заданного времени.

Что касается той части щели α, которая выбрасывает воды и которая возвышается над наружной водой, то, как мы уже видели, она за данное время выделяет количество $\frac{2}{3} n\alpha \sqrt{\alpha}$; остальная же погруженная часть щели, как это станет ясно из нижеизложенного, пропускает воды повсюду с одной и той же скоростью, а именно, со скоростью $\sqrt{\alpha}$, так что если эту скорость умножить на величину погруженной в воду щели na, то получится, что количество воды, какое эта часть щели выбрасывает за данное время, равно $na \sqrt{\alpha}$. После сложения обеих этих величин получится

$$\left(\frac{2}{3} \alpha + a\right) n \sqrt{\alpha} = q.$$

С помощью этого уравнения можно определить q по заданным высотам a и α или же, наоборот, можно определить высоту α, если известны величины a и q. Приведенное выше уравнение весьма точно согласуется с опытами, как это показал сам знаменитый их автор, решение которого не отличается от нашего указанного выше решения. Из этого уравнения следует, что при неизменных подливаниях вод подъемы α тем больше, чем меньше высота погружения a.

Опыты, относящиеся к части пятой

К § 5. Я применил сосуд, описанный в § 5, со стеклянной трубочкой (фиг. 30). Сначала я заткнул отверстие LM и заполнял трубу RN водой до тех пор, пока поверхность ее не подошла к малому отверстию в a. Затем я наблюдал, как вода, входившая в трубу, достигла своим краем точки f. После этого, открыв отверстие LM, я к вытекающим водам стал приливать в верхний сосуд $EFPQ$ новые воды, причем я прилагал старание к тому, чтобы край воды в f в это время не поднимался и не опускался. Пока это делалось, поверхность AB поднималась, но никогда не переходила через определенный предел. А именно, насколько я мог видеть, максимальная высота ее PB или FA была равна $\frac{n^2}{m^2 - n^2} a$, где $\frac{n}{m}$ обозначает отношение между нижним отверстием LM и верхним RS, а a — вертикальную высоту последнего над первым.

Правда, это был единственный опыт, который я лично провел, хотя в настоящей части содержится много предложений, заслуживающих внимания и притом в достаточной мере неожиданных. Однако я не мог по поводу них проделать опытов, ибо в более коротких сосудах они по своей природе таковы, что присущие им особенности ускользают от чувств, а исследовать это надлежащим образом в длинных водопроводах я был лишен возможности. Если другим, которые пожелают проверить настоящую теорию, представится такая возможность, то я предложу им обратить внимание на следующее.

I. В фонтанах следует наблюдать полную высоту скачка. После этого, заткнув сначала отверстие, а затем вскоре его открыв, следует наблюдать количество вытекающей воды, пока вода доходит до половины высоты полного скачка, или до какой-либо иной части его, что, конечно, происходит в течение очень короткого времени. Мерой ее количества является длина цилиндра, построенного над отверстием, через которое воды вытекают. Мы назвали эту длину x, полную же высоту скачка мы назвали a, а наблюдаемую высоту, недостигшую еще полной высоты, мы обозначили через v. Наконец, после этого следует, произведя вычисление, выяснить, соответствуют ли эти количества в точности тем уравнениям для обоих способов подливания, которые были даны в § 3.

II. Следует все сделать, как раньше, с тем лишь отличием, что вместо количества вытекающей воды отмечается время, чтобы можно было проверить формулы § 13, и, наконец, следует сопоставить количество со временем истечения, дабы выяснить, точно ли это соответствует § 14.

III. После этого следует в особенности проделать тот вид опыта, который я указал в § 16, т. е. провести наблюдение над количеством вытекающих вод, соответствующих половинным временам. А я утверждал, что сколь большим ни будет взято время, разность между указанными количествами никогда не будет равна $\frac{2m^2N}{m^2n - n^3} \log 2$ при первом придуманном нами способе подливания или $\frac{2N}{n} \log 2$ — при втором. А эти разности, хотя они в полной мере никогда не образуются, тем не менее в течение очень короткого времени могут обнаружиться.

Относительно остальных следствий и пояснений, имеющихся в настоящей части, каждый легко увидит, каким способом их можно проверить на опыте. Но я рекомендовал бы раньше, чем будет принято какое-либо решение, обратить внимание на все сопутствующие обстоятельства с точки зрения помех: сжатие струи и иные явления, о которых я не намерен повсюду повторять.

Об опытах к §§ 17 и 18 по подтверждению задачи § 17, касающейся непогруженных сосудов, см. стр. 26 названной раньше книги знаменитого Полени.

Когда в погруженном сосуде высота *a* была равна 55 парижским линиям (эту высоту он называет мертвой), он произвел пять опытов, при которых высота, которую он называет живой, или α, составляла последовательно $8^3/_4$, 25, 42, 58 и $73^1/_2$ линий. Если эти значения подставить в уравнение, данное в § 18, то получается, что количества вод, подливавшихся за заданное время, были пропорциональны 100, 199, 299, 396 и 495. Фактически же подливавшиеся количества находились между собой в отношении 100, 200, 300, 400 и 500. Это различие настолько незначительно, что можно было бы подумать, а не получилось ли бы полное согласие, если бы все измерения могли быть произведены очень точно.

Остальные опыты, произведенные знаменитым мужем, точно так же находятся в совершенном согласии с теорией; расчет по ним можно видеть у самого автора. В интересах дела я счел нужным здесь на них указать, так как они имеют отношение к предмету настоящей части, хотя между прочим я охотно признался бы, что предпочел бы видеть те опыты, которые связаны с вычислением мгновенных изменений, никем, насколько я знаю, до сих пор еще не исследованных, чем те опыты, которые основываются на установившемся состоянии.

ГИДРОДИНАМИКИ
ЧАСТЬ ШЕСТАЯ

О жидкостях невытекающих или движущихся внутри стенок сосудов

§ 1. До сих пор мы исследовали вытекающие воды, теперь же мы рассмотрим движения вод, которые не вытекают за пределы сосудов. Все эти движения я сведу к двум видам, которые должны быть исследованы каждое в отдельности:

1) когда жидкость в бесконечно длинной трубе постоянно двигается в одном и том же направлении;

2) когда она двигается вперед и назад возвратными или колебательными движениями.

О движении вод в неопределенно длинных трубах

Случай I

§ 2. Пусть во-первых, имеется труба, расположенная горизонтально, но изменяющаяся по своим сечениям согласно какому-либо заданному закону. Допустим, что жидкость в ней расположена таким образом, как это обычно бывает в более узких трубах, т. е. так, что обе крайние поверхности перпендикулярны к оси трубы и что в таком виде она начинает двигаться с какой-либо заданной скоростью. При указанных обстоятельствах, если предположить, что не имеется совершенно никаких препятствий для движения, ясно, что движению вод не будет конца подобно тому, как

шар, двигаясь совершенно свободно по горизонтальной доске, продолжает без конца свое движение. Однако между этими двумя движениями существует важное различие, а именно: все части шара постоянно движутся с равномерной скоростью, в воде же они беспрерывно изменяют свое движение. И это движение будет нетрудно определить, если мы примем в соображение, что движение должно быть таким, чтобы сохранялся неизменным потенциальный подъем всей воды, какой существовал с начала движения. А потенциальный подъем воды, движущейся с известной скоростью в какой-либо трубе, мы определили в § 2 третьей части. Таким образом, имеется все необходимое для решения задачи. Тем не менее будет небесполезно привести один или другой пример по данному вопросу.

Пример 1

Пусть, например, имеется труба $BgfC$ (фиг. 31), обладающая формой усеченного конуса. Представьте себе, что часть ее $BGFC$ заполнена жидкостью, движущейся по направлению к gf. Пусть, далее, частицы жидкости в GF обладают скоростью, соответствующей высоте v, и пусть, наконец, жидкость пришла в положение $bgfc$. При вышеуказанных допущениях требуется найти скорость жидкости в gf. Я назову V высоту, соответствующую скорости воды в gf. Пусть вершина конуса находится в H, диаметр в $BC = n$, диаметр в $GF = m$, длина $BG = a$, $Gg = b$; тогда диаметр gf будет равен $\frac{ma - mb + nb}{a}$. Затем, так как объем $BGFC$ равен объему $bgfc$, будет $BC^2 \times BH - GF^2 \times GH = bc^2 \times bH - gf^2 \times gH$, откуда $bc^2 \times bH = BC^2 \times BH - GF^2 \times GH + gf^2 \times gH$. Но $bH = \frac{BH}{BC} \times bc$; следовательно, $bc^3 = BC^3 - \frac{GF^2 \times GH \times BC}{BH} + \frac{gf^2 \times gH \times BC}{BH} = BC^3 - GF^3 + gf^3$, или $bc = \sqrt[3]{n^3 - m^3 + \left(\frac{ma - mb + nb}{a}\right)^3}$.

Но, согласно § 3 части третьей, потенциальный подъем воды в положении $BGFC = \frac{3m^2v}{n(m^2 + mn + n^2)}$; равным образом по-

тенциальный подъем той же воды в положении $bgfc$ дается выражением $\frac{3\alpha^3 v}{\beta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$, если ради краткости положить α и β для найденных выше значений диаметров gf и bc. Таким образом, будет

$$V=\frac{m^3\times(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\times\beta\times v}{\alpha^3\times(m^2+mn+n^2)\,n}.$$

Из этой формулы легко понять, что передние частицы движутся все время с большей скоростью, а задние — с меньшей, так что если принять отверстие gf бесконечно малым, то скорость воды в gf будет бесконечно большой, а в bc — бесконечно малой.

Пример 2

Пусть имеется труба, составленная из двух цилиндрических труб BN и OP (фиг. 32) неодинакового сечения. Допустим, что в более широкой ветви жидкость $BGFC$ движется по направлению к P со скоростью, соответствующей высоте v. Тогда ясно, что не произойдет никакого изменения движения раньше, чем поверхность GF дойдет до MN; но с этого момента времени движение будет постоянно изменяться, пока вся жидкость не попадет в более узкую трубу. Итак, спрашивается, какова будет скорость поверхности fg, когда жидкость будет занимать положение $bgfc$. Высоту же этой скорости мы обозначим через V.

Пусть диаметры GF и gf относятся друг к другу, как n к m; назовем длину $BG=a$, $bM=b$; тогда будет $Og=\frac{n^2}{m^2}\times(a-b)$. Потенциальный подъем воды $BGFC=v$; потенциальный подъем воды $bgfc=\frac{n^4a-n^4b+m^4b}{n^4a}\times V$; следовательно,

$$V=\frac{n^4a}{n^4a-n^4b+m^4b}\,v.$$

Из приведенного выше понятно, что скорость первой капли, проникающей в более узкую трубу, соответствует высоте $\frac{n^4}{m^4}\,v$, но эта скорость очень быстро уменьшается, так что после того

как перетекала маленькая часть жидкости, можно уже считать, что $V = \frac{a}{a-b} v$, а когда перетекла вся жидкость, то она приобретает прежнюю скорость. Пусть, например, диаметр более широкой трубы вдесятеро больше диаметра другой трубы, и пусть первая капля вытечет из более широкой трубы в более узкую со скоростью, соответствующей высоте $10\,000\, v$. Если допустить, что перетекла уже $^1/_{10}$ часть жидкости, то найдем, что высота, соответствующая скорости жидкости, продвигающейся в более узкой трубе, приблизительно равна $\frac{10}{9} v$.

Если искать время, за которое жидкость протекает Of, то получится, что оно равно

$$\frac{2\,(n^4a - n^4b + m^4b)^{\frac{3}{2}} - 2m^6a\sqrt{a}}{3m^2\,(n^4 - m^4)\sqrt{av}}.$$

Таким образом, вся жидкость перетекает за время

$$\frac{2n^6a\sqrt{a} - 2m^6a\sqrt{a}}{3m^2\,(n^4 - m^4)\sqrt{av}} = \frac{2\,(n^4 + m^2n^2 + m^4)\,a}{3m^2\,(n^2 + m^2)\sqrt{v}},$$

где под $\frac{a}{\sqrt{v}}$ следует понимать время, за которое жидкость, свободно двигаясь в более широкой трубе, проходит расстояние a. Конечно, все это, как я сказал, будет обстоять так в том случае, если не имеется никаких помех для движения, и если в то же время допускается, что на всем протяжении составной трубы скорости обратно пропорциональны сечениям. Между тем я уже несколько раз указывал, что воды, очень близкие к стенке MN, не могут следовать этому закону. Следовательно, когда имеет место подобный случай, то действительное движение тем больше совпадает с теорией, чем длиннее часть bM и чем меньше имеется помех.

§ 3. Если же теперь труба будет расположена не горизонтально, а наклонно к горизонту, то ясно, что все будет обстоять аналогично, за исключением лишь того, что потенциальный подъем надо будет во всяком положении приравнивать перво-

начальному потенциальному подъему с прибавлением к нему действительного снижения, т. е. вертикального снижения центра тяжести. А если при отсутствии какого-либо импульса вода начнет сама собой двигаться, то действительное снижение будет просто равно потенциальному подъему.

Итак, вода продолжает непрерывно двигаться вперед, пока центр тяжести будет расположен в более низком месте, чем он находился в начале движения [49]. Если же труба будет так изготовлена, изогнута и наполнена таким количеством жидкости, что центр тяжести сможет вернуться на прежнюю высоту, тогда жидкость приобретет возвратное движение и будет без конца колебаться. Об этом движении, составляющем наиболее важный раздел настоящей части, мы будем скоро говорить. При этом дозволено будет отметить возможность такого случая, когда вся вода сама собой без предварительного всасывания перетечет из более низкого места на более высокое, если только все будет обстоять должным образом.

О колебаниях жидкостей в изогнутых трубах

Случай II

§ 4. Отец мой в «Комментариях имп. Академии наук в Петербурге» (т. 2) дал некоторые теоремы, свидетельствующие о замечательном применении, какое получает теория живых сил в механических вопросах. Теорема, помещенная на третьем месте, гласит следующее.

Пусть имеется цилиндрическая труба $ABCH$ (фиг. 33), открытая с обеих сторон и изогнутая в два колена BA и CH по отношению к горизонтальной части BC. Пусть синус угла ABC равен p и синус угла HCB равен q, причем, конечно, полный синус равен 1. Пусть, далее, эта труба заполнена водой до горизонтальной линии MN. Назовем также L длину части трубы $MBCN$, заполненную водой. Тогда все

колебания жидкости, приведенной в движение в этой трубе, как большие так и меньшие, будут таутохронными, и продолжительность их будет равна продолжительности очень малых колебаний любого простого маятника, длина которого равна $\frac{L}{p+q}$.

К этой теореме тот же автор прибавляет такое следствие.

Если углы ABC и HCB прямые, каковой единственно случай был разрешен Ньютоном, то длина простого маятника, изохронного с колеблющейся водой, будет равна $\frac{1}{2}L$, как это и нашел Ньютон.

§ 5. Сообщаем то, что до сих пор было опубликовано по вопросу о колебаниях жидкостей впервые Ньютоном, для того чтобы объяснить природу волн, а затем моим отцом, чтобы показать плодотворность начала живых сил. Но так как нашей целью является дать более полную теорию движений жидкостей, то в интересах дела будет исследовать этого рода вопрос во всем его объеме. Итак, я рассмотрю, при каких условиях неравные колебания жидкости становятся изохронными, а при каких — нет. После этого я дам для первых длину простого таутохронного маятника, а для других укажу время наступления неподвижности. Трубы же я буду рассматривать произвольно изогнутые и неравного сечения.

Лемма

§ 6. Пусть cAd (фиг. 34) представляет собой наполненный водой кожаный мех или трубу любого заданного вида, заканчивающуюся с обеих сторон двумя цилиндрическими трубами ac и fd, наклоненными как угодно по отношению к горизонту и имеющими любое сечение, из которых одну я принимаю заполненной водой до a, а вторую — до f. Требуется определить высоту центра тяжести всей воды по заданной высоте центра тяжести воды, содержащейся в мехе cAd, и при других наперед известных данных, насколько их окажется достаточно.

Решение

Пусть центр тяжести воды, содержащейся в сосуде cAd, находится в C. Представим себе проведенную через эту точку C вертикальную прямую AB; затем проведем горизонтальные прямые am, cg, fn и dh вместе с вертикальными прямыми cb и de. Положим $ac = a$, $fd = \alpha$, $bc = b$, $ed = \beta$; сечение трубы ac равным g, сечение трубы fd равным γ. Пусть, далее, масса воды или емкость трубы cAd равна M, прямые $Ag = f$, $Ah = \Phi$, $AC = m$. Разделим прямые mg и nh пополам в точках D и E, и таким образом центры тяжести вод, содержащихся в цилиндрических трубах, будут находиться на высотах точек D и E.

Положив это, получаем $AD = f + \frac{1}{2} b$, $AE = \Phi + \frac{1}{2} \beta$; масса воды в ac равна ga, в fd равна $\gamma\alpha$. Таким образом, если представить себе, что искомый центр тяжести всей воды $acAdf$ находится на высоте F, то, как это известно из механики, AF можно будет определить, умножив массу воды в ac на DA, массу воды в fd на EA и массу воды в cAd на CA и разделив сумму всех этих произведений на сумму этих масс. Отсюда получается

$$AF = \frac{ga \times \left(f + \frac{1}{2} b\right) + \gamma\alpha \times \left(\Phi + \frac{1}{2} \beta\right) + Mm}{ga + \gamma\alpha + M}.$$

Задача

§ 7. Определить повсюду скорости колеблющейся воды в предположении, что колебания не выходят за пределы цилиндрических труб.

Решение

Пусть вода, начиная свое колебание, находится в положении $acAdf$ и затем приходит в положение $ocAdp$ [50]. Сохранив обозначения, сделанные в предшествующем параграфе, положим $ao = x$; тогда fp будет равно $\frac{gx}{\gamma}$; откуда (а именно, если мы будем счи-

тать, что центр тяжести всей воды снизился из F в O) в силу предшествующего параграфа будет

$$AO = \frac{g \times (a - x) \times \left(f + \frac{1}{2} b - \frac{bx}{2a}\right) + \gamma \times \left(\alpha + \frac{gx}{\gamma}\right) \times \left(\varphi + \frac{1}{2}\beta + \frac{\beta\gamma x}{2\alpha\gamma}\right) + Mm}{ga + \gamma\alpha + M}.$$

Отсюда выводится, что снижение центра тяжести или действительное снижение

$$FO = \frac{(b - \beta + f - \Phi)\, gx - \left(\frac{bg}{2a} + \frac{bg^2}{2\alpha f}\right) x^2}{ga + \gamma\alpha + M}.$$

Пусть теперь скорость воды в трубе ac (а именно, когда поверхность находится в o) такова, что она соответствует высоте v; тогда потенциальный подъем воды в другой трубе будет равен $\frac{g^2}{\gamma^2}v$; равным образом потенциальный подъем воды cAd будет пропорционален высоте v, и мы положим его поэтому равным Nv (где N зависит от формы меха cAd и может быть определено согласно § 2 части третьей). А если умножить везде потенциальные подъемы на соответствующие массы и произведения разделить на сумму масс, то получится, что потенциальный подъем всей воды $ocAdp$ равен

$$\frac{\left(ga - gx + \frac{\alpha g^2}{\gamma} + \frac{g^3 x}{\gamma^2} + MN\right) v}{ga + \gamma\alpha + M}.$$

А так как этот потенциальный подъем равен найденному немного ранее действительному снижению, то будет

$$v = \frac{(b - \beta + f - \Phi)gx - \left(\frac{bg}{2a} + \frac{bg^2}{2\alpha\gamma}\right) x^2}{ga - gx + \frac{\alpha g^2}{\gamma} + \frac{g^3 x}{\gamma^2} + MN},$$

что и требовалось определить.

Следствие 1

§ 8. Так как прямая $mn = mg - nh + gh = b - \beta + f - m$, то положим $mn = c$ и одновременно умножим знаменатель и числитель на $2\gamma^2\alpha^2$. Тогда мы получим

$$v = \frac{2g\gamma^2 a\alpha cx - (g\gamma^2\alpha b + g^2\gamma a\beta)\, x^2}{2g\gamma^2 a^2\alpha - 2g\gamma^2 a\alpha x + 2g^2\gamma a\alpha^2 + 2g^3 a\alpha x + 2\gamma^2 a\alpha MN}.$$

Следствие 2

§ 9. Если v станет равен 0, то ясно, что в этом случае значение x будет выражать весь пробег поверхности жидкости в трубе ac, который, таким образом, оказывается равным $\frac{2\gamma a\alpha c}{\gamma\alpha b + g a\beta}$; в другой же трубе он будет равен $\frac{2g a\alpha c}{\gamma\alpha b + g a\beta}$.

Таким образом, в более узкой трубе вода будет в состоянии подняться на любую высоту, если только взять достаточно большим отношение между сечениями g и γ.

Следствие 3

§ 10. Та часть сосуда cAd, которой, согласно нашему допущению, никогда не касается ни одна из поверхностей, не играет никакой роли в указанных выше пробегах, как в их увеличении, так и в их уменьшении; но, как это будет показано ниже, она может повлиять на ускорение или замедление колебаний.

Следствие 4

§ 11. Если допустить, что обе трубы имеют одинаковое сечение, т. е. если положить $g = \gamma$, то

$$v = \frac{2g a\alpha cx - (g\alpha b + g a\beta)\, x^2}{2g a^2\alpha + 2g a\alpha^2 + 2a\alpha MN}.$$

В этом случае максимальная скорость обеих поверхностей получается тогда, когда они находятся посередине всего пробега; но дело обстоит иначе, когда трубы имеют неравные сечения.

Следует также отметить, что замедления и ускорения соответствует друг другу на соответственных расстояниях поверхностей от средних точек пробегов, т. е. от мест максимальных скоростей.

Теорема

§ 12. Если, как сказано выше, сечения цилиндрических труб между собой равны, то как большие, так и меньшие колебания будут изохронными, если только поверхности никогда не опустятся ниже концов тех же труб.

Доказательство

Из механики известно, что если колеблющееся тело прошло расстояние, равное x, и если время и расстояние для этого момента связано соотношением $dt = \frac{mdx}{\sqrt{nx - x^2}}$, где под m и n следует понимать постоянные величины, то тело совершает свои колебания, как большие, так и меньшие, за одно и то же время.

А так как в нашем случае

$$v = \frac{2ga\alpha cx - (g\alpha b + ga\beta)\, x^2}{2ga^2\alpha + 2ga\alpha^2 + 2a\alpha MN}$$

и так как скорость равна $\sqrt{v}$, то будет

$$dt = dx \sqrt{\left(\frac{2ga^2\alpha + 2ga\alpha^2 + 2a\alpha MN}{g\alpha b + ga\beta}\right)} : \sqrt{\left(\frac{2a\alpha cx}{g\alpha b + ga\beta} - x^2\right)},$$

где точно так же все буквы имеют постоянное значение за исключением x, обозначающего пройденное расстояние. Отсюда ясно, что и эти колебания жидкости будут изохронными, что и требовалось доказать.

Задача

§ 13. Определить длину простого маятника, таутохронного с колебаниями вышеуказанной жидкости.

Решение

В механике доказывается, что если $dt = \frac{mdx}{\sqrt{nx - x^2}}$, то длина таутохронного простого маятника равна $\frac{1}{2}m^2$. Таким образом, в нашем случае искомая длина маятника равна $\frac{ga^2\alpha + ga\alpha^2 + a\alpha MN}{g\alpha b + ga\beta}$, что и требовалось определить.

Следствие 1

§ 14. Если допустить, что труба cAd имеет такое же сечение, как и присоединенные к ней трубы, и если длину ее обозначить через l, то масса содержащейся в ней воды, которую мы обозначили через M, будет равно gl, а потенциальный подъем содержащейся в ней воды, который мы положим равным Nv, будет равен v, так что мы будем иметь $N = 1$. А если приведенные значения подставить вместо букв M и N, то длина таутохронного маятника для этого частного случая получится равной

$$\frac{a^2\alpha + a\alpha^2 + a\alpha l}{\alpha b + a\beta} = \frac{a\alpha}{\alpha b + a\beta} \times (a + \alpha + l) = \frac{a + \alpha + l}{\frac{b}{a} + \frac{\beta}{\alpha}}.$$

Но так как $a + \alpha + l$ представляет часть длины трубы, заполненную водой, а $\frac{b}{a}$ обозначает отношение синуса угла bac к полному синусу, и равным образом $\frac{\beta}{\alpha}$ обозначает отношение синуса угла efd к полному синусу, то мы видим, что наше решение не отличается от того решения, которое дал мой отец для рассматриваемого случая и о котором я упомянул выше в § 4.

Следствие 2

§ 15. Если допустить, что труба cAd имеет повсюду бесконечно большое сечение, то будет $MN = 0$, согласно § 2 части третьей, и длина таутохронного маятника будет равна $\frac{a + \alpha}{\frac{b}{a} + \frac{\beta}{\alpha}}$,

т. е. как будто всей промежуточной трубы cAd не существует, и цилиндрические трубы непосредственно сообщаются друг с другом.

Но здесь необходимо рассмотреть некий особый вопрос, на котором ниже я и остановлюсь.

Пояснение

§ 16. Приведенная выше теорема охватывает все случаи, дающие таутохронные колебания, когда трубы ac и pd являются прямыми. Но когда трубы, в которых движутся поверхности жидкости, изогнуты, то имеются сверх того и другие случаи таутохронности, которые можно было бы легко определить, если бы мы захотели дольше на этом остановиться. Между прочим, когда эти трубы имеют неодинаковое сечение, то и времена, соответствующие колебаниям различных размеров, становятся неодинаковыми, а каким образом следует определить это время, это ясно каждому из § 8, где мы дали скорость жидкости в любой точке.

Но вышеизложенное относится к конечным колебаниям. Если же теперь мы будем полагать, что колебания очень малы, то мы увидим, что все они становятся между собой таутохронными при одном и том же количестве жидкости и при одной и той же трубе, каковы бы ни были форма трубы и ее сечения. Это я покажу в следующем параграфе.

Теорема

§ 17. Очень малые, хотя бы и неравные между собой колебания жидкости, происходящие в любой трубе, всегда изохронны.

Доказательство

Когда колебания очень малы, то те малые части трубы, в которых колеблются поверхности жидкости, можно рассматривать как цилиндры; следовательно, если сохранить прежние обозначения, то сохранится то значение, которое в § 8 мы приписали букве v, и на том же основании следует, что буквами a, b, α, β

и x, как имеющими бесконечно малые значения, можно пренебречь по сравнению с $\frac{M}{g}$, так что в настоящем случае следует считать, что

$$v=\frac{2g\gamma a\alpha cx-(g\gamma\alpha b+g^2 ab)\,x^2}{2\gamma a\alpha MN}\,.$$

Таким образом, в силу § 12, все колебания, поскольку они очень малы, являются между собой изохронными, что и требовалось доказать.

Задача

§ 18. Определить длину простого маятника, таутохронного с очень малыми колебаниями жидкости, колеблющейся в какой-либо трубе.

Решение

Так как во всяком движении элемент времени $dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}$, то для нашего случая получаем

$$dt=dx\sqrt{\frac{2\gamma a\alpha MN}{g\gamma\alpha b+g^2 ab}}:\sqrt{\frac{2\gamma a\alpha cx}{\gamma\alpha b+g a\beta}-x^2}\,.$$

Таким образом, в силу § 13, искомая длина маятника, таутохронного с вышеуказанными колебаниями, будет равна

$$\frac{\gamma a\alpha MN}{g\gamma\alpha b+g^2 a\beta}\,,$$

что и требовалось определить.

Пояснение

§ 19. Хотя в различных местах я уже указывал, что следует понимать под величинами M и N, тем не менее я изложу здесь весь вывод, дабы для каждого стало тем яснее существо этого дела.

Пусть имеется какая-либо трубка $ABCDE$ (фиг. 35а и 35б), наполненная водой до B и D. Положим, что полный синус равен 1, синус угла $DBC=\frac{b}{a}=m$, синус угла $BDC=\frac{\beta}{\alpha}=n$; тогда длина

таутохронного маятника будет равна $\frac{\gamma MN}{mg\gamma + ng^2}$, где g обозначает сечение трубы B, а γ — сечение ее в D.

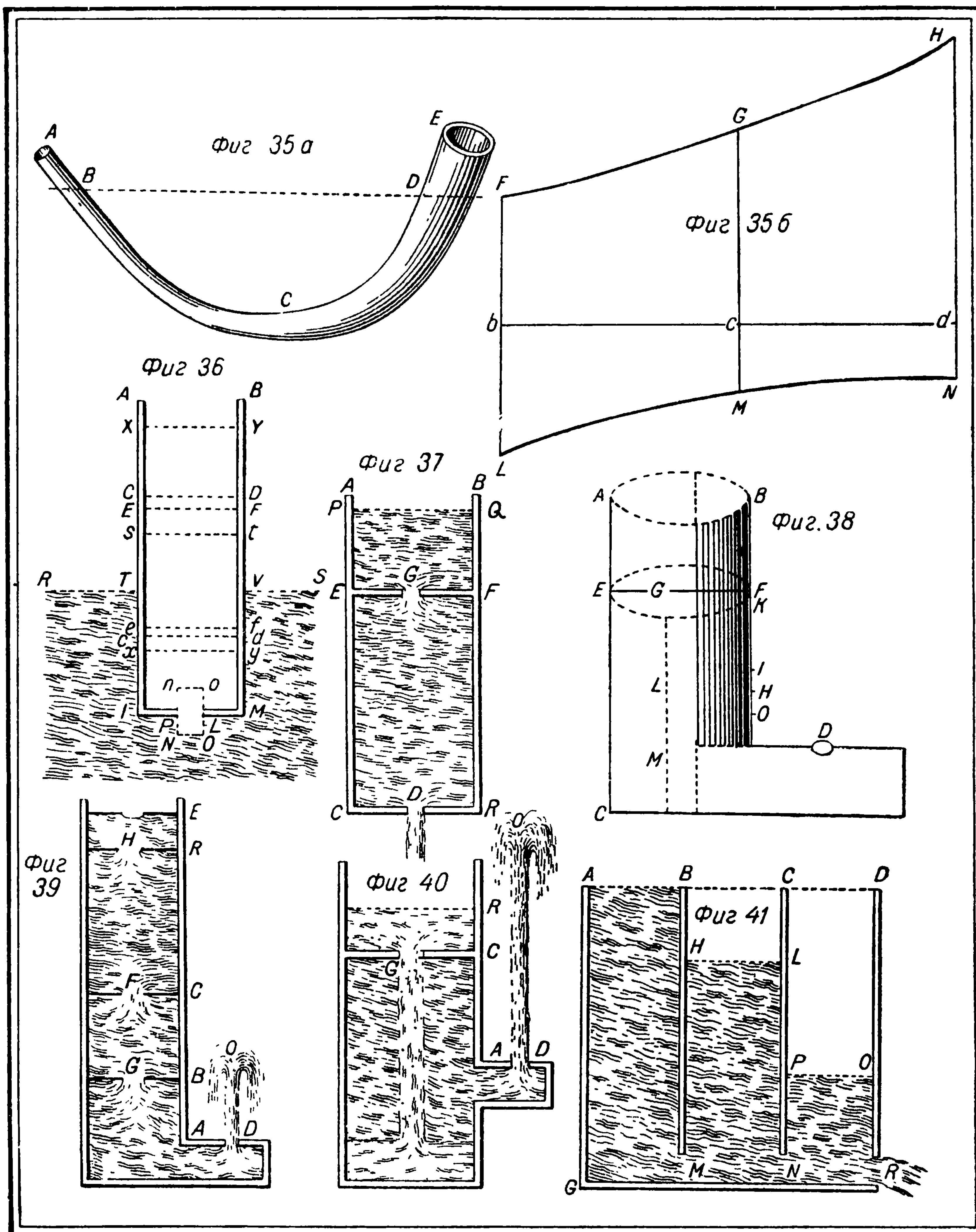
Представим себе теперь, что длина трубы BCD, заполненная жидкостью, вытянута в прямую линию bcd, над которой, как над осью, проведена кривая FGH, которая пусть будет шкалой сечений в соответственных местах, так что если положить $bc = BC$, то cG будет так относиться к bF, как сечение в C относится к сечению в B. Таким образом, если bF представляет сечение в B, то площадь $bdHF$ представит величину M. Затем под той же осью bd построим другую кривую LMN, ординатой которой cM пусть повсюду будет $\frac{bF^2}{cG}$, и тогда (согласно § 2 части третьей) N будет равно площади $bdNL$, разделенной на площадь $bdHF$, так что $M \times N$ будет равно площади $bdNL$, что после умножения на $\frac{\gamma}{mg\gamma + ng^2}$ даст длину таутохронного маятника.

Следствие 1

§ 20. Если труба BCD имеет повсюду одинаковое сечение и если ее длину назвать l, то FH будет прямой, параллельной bd, равным образом таковой же будет и LN. Отсюда площадь $bdNL = gl$, а длина таутохронного маятника равна $\frac{l}{m+n}$.

Следствие 2

§ 21. Пусть BCD представляет собой коническую трубу длины l. Тогда cG (если положить $bc = x$) будет равно $\left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)^2$, откуда $cM = g^2 : \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)^2$. Следовательно, площадь $bcML = \frac{g^2 l}{\sqrt{g\gamma} - g} - \frac{g^2 l}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}} : \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)^2$ и, стало быть, вся площадь $bdNL = \frac{g^2 l}{\sqrt{g\gamma} - g} + \frac{g^2 l}{\sqrt{g\gamma}}$ [51]. Следовательно, длина маятника, таутохронного с колеблющейся водой, равна $\frac{l\sqrt{g\gamma}}{m\gamma + ng}$.


Фиг 35 а
A
B
D
E
C
Фиг 35 б
F
G
H
b
c
d
M
N
L
Фиг 36
A
B
X
Y
C
D
E
F
S
R
T
V
S
n
o
I
P
L
M
N
O
Фиг 37
A
B
P
Q
G
E
F
C
D
R
Фиг.38
A
B
E
G
F
K
I
H
O
D
L
M
C
Фиг 39
E
H
R
F
C
G
O
B
A
D
Фиг 40
R
C
G
A
D
O
A
B
C
D
Фиг 41
H
L
P
O
M
N
R
G

Отсюда понятно, что при прочих равных условиях вода колеблется медленнее всего, когда сечения в B и D находятся в обратном отношении синусов соответствующих углов DBC и BDC. Затем, чем длиннее часть, заполненная водой, и чем меньше названные только что углы, тем точно так же медленнее становятся колебания.

Далее, если сравнить между собой цилиндрические и конические трубы и положить, что углы BDC и DBC между собой равны, станет понятно, что при прочих равных условиях вода быстрее колеблется в конических трубах, чем в цилиндрических, так как, конечно, $\frac{l\sqrt{g\gamma}}{\gamma+g}$ всегда меньше, чем $\frac{1}{2}l$, какое бы неравное соотношение ни существовало между g и γ. Далее, если положить, что вышеупомянутые углы между собой неравны, то может случиться, что в одном из видов труб вода будет колебаться или медленнее, или быстрее, чем в другом. Для того чтобы подтвердить это на примере, допустим, что угол DBC прямой, т. е. что $m=1$, а синус другого угла BDC, или n равен $\frac{1}{4}$; тогда длина маятника для цилиндрических труб будет равна $\frac{4}{5}l$. Если же при тех же условиях, оставшихся неизменными, мы заменим цилиндрическую трубу конической, имеющей в B вчетверо большее сечение, чем в D, то, положив $\gamma=\frac{1}{4}g$, мы получим длину маятника, равной l. Таким образом, при прочих равных условиях таутохронный маятник для конической трубы оказывается длиннее, чем для цилиндрической, и колебания происходят в первой медленнее, чем во второй. Если же теперь, сохраняя опять-таки неизменными все прочие условия, мы допустим, что коническая труба в B ýже, чем в D, то получится обратное. Так, например, пусть $\gamma=4g$; тогда длина маятника будет равна $\frac{8}{17}l$ и, стало быть, она будет меньше, чем если бы эта труба была цилиндрической. Она будет опять-таки меньше, если допустить, что в B сечение намного больше, чем в D. Так, например, если $\gamma=\frac{1}{64}g$, то длина

маятника будет равна $\frac{8}{17}l$, как и раньше. Замечательно, как мы это видели и на предыдущем примере, что при неизменном сечении в B, при неизменном положении трубы BCD и при неизменной ее длине, можно всегда определить два различных сечения в D для одной и той же длины таутохронного маятника, если только углы DBC и BDC между собой неравны. Особым случаем этого является, когда либо сечение в D равно сечению в B, либо когда синус угла BDC и синус угла DBC находятся в квадратном отношении к этим же сечениям; тогда колебания жидкости в обеих трубах происходят за одинаковое время.

Общее пояснение

§ 22. Опыты с колеблющимися жидкостями я проводил таким образом, что путем повторных проб я определял длину простого изохронного маятника, и я мог наблюдать, что в различных случаях эта длина является приблизительно такой, какую дает теория в настоящей части. Иногда, однако, я находил, что эта длина оказывается несколько больше должной. Причину этого я очень легко усмотрел в том обстоятельстве, что трения не только уменьшают пробеги жидкости, но и замедляют их, а также в том, что обычно в месте сгиба трубы бывают сужены. Если бы со всем старанием избежать последнего и если бы изгибание производилось не в одном углу, а понемногу, и, наконец, если бы для колебаний была применена очень чистая ртуть, то я нисколько не сомневаюсь, что опыты в точности совпали бы с вышеизложенной теорией, так что я признал не стоящим труда кропотливое исследование этих обстоятельств.

Но я прибавлю еще о произведенных опытах, что до начала опыта я тщательно исследовал сечения трубок в различных их местах с помощью колонки ртути, которая, пробегая постепенно по всей длине трубки различными своими длинами, которые я все время измерял, повсюду указывала на изменения сечений. И, конечно, эти сечения необходимо исследовать в трубе указанным выше образом, после того как ее уже изогнули, ибо

вследствие изгибания сечения сильно уменьшаются. Это обстоятельство и послужило причиной того, что в первом же сделанном мною по данному вопросу опыте исход его не оправдал моих ожиданий. А именно, стеклянную трубку вроде тех, какие обычно применяются для изготовления барометров, достаточно широкую и почти вполне цилиндрическую, я распорядился изогнуть примерно так, как это показано на фиг. 27, и затем, наполнив большую часть ее ртутью, я увидел, что колебания ртути происходят гораздо медленнее, чем я ожидал; ибо я не принял во внимание, что вследствие изгибания трубка оказалась заметно сжатой в D, в особенности там, где образуются углы. Поэтому, поскольку я понял причину этого явления, я стал в дальнейшем пользоваться трубками, подвергшимися медленному изгибанию, вроде той, какая показана на фиг. 35а, и в этих трубках после изгибания я внимательно исследовал их сечения.

ГИДРОДИНАМИКИ

ЧАСТЬ СЕДЬМАЯ

О движении вод в погруженных сосудах, где на примерах показывается, сколь замечательно полезно начало сохранения живых сил даже в тех случаях, когда следует считать, что кое-что из этих сил постоянно теряется

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

О снижении вод

§ 1. Представим себе заполненный водой цилиндр, дно которого просверлено и который до известной высоты погружен в покоящуюся, как бы бесконечную, жидкость; тогда легко понять, что поверхность воды, содержащейся в цилиндре, опустится и притом ниже поверхности наружной воды, а затем снова поднимется и т. д. Но эти колебания очень сильно отличаются от колебаний, рассмотренных в предыдущей части, а именно от колебаний, при которых возвратные движения в обратном порядке всегда тождественны с теми движениями, которые им предшествовали. На этом основании кто-нибудь мог бы предположить, что обратное течение воды будет совершенно таким же, каким было ее снижение; однако если бы он так решил, то он бы сильно ошибся, хотя бы движение нисколько не уменьшалось вследствие прилипания вод к стенкам сосуда или вследствие иных подобного же рода помех. Совершенно так же законы движения тел от удара для упругих тел очень сильно отличаются от тех

же законов, которые имеют силу для неупругих тел, хотя бы мы и полагали, что и в том и другом случае тела движутся самым свободным образом. Я пользуюсь этим сравнением, которое отлично поясняет наше доказательство; ибо подобно тому, как законы движения неупругих тел правильно определяются, если считать, что после столкновения та часть живой силы, которая была затрачена на сжатие тел, теряется (ибо она не восстанавливается при последующем движении, как в упругих телах), так и подъем жидкости может быть не менее правильно определен, если точно исследовать, сколько живой силы сообщается в отдельные моменты внутреннему движению частиц воды и никогда не будет возвращено поступательному движению воды, о котором идет речь.

§ 2. Так как, стало быть, дело сводится к тому, чтобы выяснить, сколько живой силы постоянно теряется при этих возвратных движениях, мы приступим к этому исследованию.

Во-первых, ясно, что вся живая сила, которая присуща вытекающим частицам, переходит к наружной воде и никоим образом не содействует последующему подъему или притоку наружной воды в трубу. Это положение слишком ясно и не нуждается в большем пояснении. Но оно касается вытекания вод и только при последнем должно приниматься в соображение. Теперь идет другое положение, которое относится ко втеканию вод.

Во-вторых, не менее ясным представляется мне, что когда воды врываются через отверстие с бóльшей скоростью, чем та, какой обладает внутренняя вода, то этот избыток опять-таки вызывает в этой же внутренней воде некоторое внутреннее движение, которое мало или ничего не дает для ее подъема. При этих условиях, если положить, что сечение отверстия равно 1, сечение цилиндра равно n, потенциальный подъем врывающейся капли равен n^2v, ее скорость равна $n\sqrt{v}$, то эта частица сохранит при своем движении, которое у нее будет общим с остальной внутренней водой, скорость $\sqrt{v}$ и, стало быть, сохранит потенциальный подъем v; остаток же потенци-

ального подъема, а именно $n^2v - v$, следует считать отошедшим ко внутреннему движению частиц. Это положение, хотя оно является физическим и только приблизительно верно, тем не менее очень полезно для определения движения жидкостей без заметной погрешности во всех тех случаях, когда в сосуде обрывается равномерная непрерывность, какую мы до сих пор предполагали; например, когда воду заставляют пройти через много отверстий. Я даже полагал бы, что это есть единственное положение, с помощью которого могут быть правильно истолкованы удивительные явления подобного рода движения. В силу этого я рекомендовал бы читателю правильно продумать его раньше, чем он обратится к прочему.

§ 3. Итак, исследуем теперь этот вопрос, начав со снижения вод. Представим себе цилиндр $AIMB$ (фиг. 36), наполненный водой до XY и погруженный в бесконечной воде $RTVS$ таким образом, что длина его находится в вертикальном положении, а дно его имеет отверстие PL, через которое вода может вытечь из сосуда в обтекающую его воду. Требуется определить скорость внутренней воды после того, как поверхность ее снижается на данное расстояние XC или YD, причем положено, что MY или IX равно a, $MV = b$, $MD = x$, сечение отверстия равно 1 и, наконец, сечение цилиндра равно n.

Решение здесь будет такое же, какое мы дали в третьей части для аналогичного, но весьма общего вопроса; необходимо только иметь в виду, что если взять бесконечно малую частицу воды $CDFE$, равную капле $PLON$, выбрасываемой за то же самое время, то действительное снижение следует теперь определять, исходя из высоты DV или CT, между тем как в третьей части было необходимо исходить из всей высоты DM.

Пусть скорость поверхности воды CD будет такой, какая соответствует высоте v, а в бесконечно близком положении EF эта же скорость будет соответствовать высоте $v - dv$. А так как потенциальный подъем воды $CDMLPIC$ равен v, то потенциальный подъем той же воды в очень близком положении $EFMLONPIE$ можно будет получить, если умножить массу

$EFMLPIE$ $(nx - ndx)$ на ее потенциальный подъем $v - dv$, а каплю $LONP$ (ndx) равным образом на ее потенциальный подъем n^2v, а затем сумму этих произведений разделить на сумму масс (nx). Таким образом, получается, что этот потенциальный подъем равен $\frac{(nx - ndx) \times (v - dv) + ndx \times n^2x}{nx}$, или $\frac{xv - vdx - xdv + n^2vdx}{x}$.

Следовательно, приращение потенциального подъема равно $\frac{-vdx - xdv + n^2vdx}{x}$ (ср. § 6 части третьей). Но это приращение следует считать равным бесконечно малому действительному снижению, которое (согласно § 7 части третьей и сделанному только что замечанию) равно $\frac{(x-b)\,dx}{x}$. Таким образом, получается следующее уравнение:

$$-vdx - xdv + n^2vdx = (x - b)\,dx,$$

которое, будучи надлежащим образом проинтегрировано, превращается в следующее:

$$v = \frac{1}{n^2 - 2} \times \left(x - \frac{x^{n^2-1}}{a^{n^2-2}}\right) - \frac{b}{n^2-1} \times \left(1 - \frac{x^{n^2-1}}{a^{n^2-1}}\right).$$

А из этого уравнения вытекают следующие следствия.

§ 4. Примем сечение цилиндра бесконечно большим по сравнению с сечением отверстия; тогда следует считать, что $v = \frac{x-b}{n^2}$; высота же для скорости воды, пока последняя вытекает, равна $x - b$. Отсюда следует, что вода вытекает с такой же скоростью, какую получает весомое тело, когда оно падает с высоты внутренней поверхности над наружной, и она будет вытекать до тех пор, пока обе поверхности не окажутся расположенными на одном уровне, и тогда всякое движение прекратится. Согласно этому закону воды вытекают до тех пор, пока дно как бы изменило свое положение IM на TV.

Если же отверстия нельзя рассматривать в качестве бесконечно малого, то внутренняя поверхность опускается ниже наружной.

А для того чтобы выяснить, на какую глубину xy снизится поверхность CD, следует положить $v=0$ или

$$(n^2-1)(a^{n^2-1}x-x^{n^2-1}a)=(n^2-2)\times(a^{n^2-1}b-x^{n^2-1}b).$$

Но внутренняя поверхность никогда не опустится ниже наружной настолько, насколько она была выше ее [52]; эта недостача происходит благодаря потенциальному подъему воды, выброшенной во время снижения, которому она должна быть пропорциональна.

§ 5. Следует отметить, что хотя вода в цилиндре опускается тем глубже, чем на большей высоте она находилась в начале снижения и чем больше отверстие в дне, однако вся вода никогда не может вытечь из цилиндра, насколько бы высоко она ни была поднята до снижения, и никогда погруженную часть цилиндра, как угодно малую, а вместе с тем отверстие или все дно нельзя считать опорожненными.

§ 6. Скорость поверхности внутренней воды является максимальной, если положить

$$x=\left(\frac{a^{n^2-1}}{n^2a-n^2b-a+2b}\right)^{1:(n^2-2)}.$$

Следовательно, если $n=1$, т. е. если дно цилиндра полностью открыто, то получается $x=b$, и скорость бывает максимальной, когда обе поверхности расположены на одной и той же высоте [53].

Но так как существует многое, что не может быть определено из приведенных выше уравнений в двух случаях, а именно когда $n^2=1$ и $n^2=2$, а эти случаи обладают многими особенностями, то я теперь займусь каждым из них в отдельности.

§ 7. Пусть, во-первых, $n^2=1$; тогда получается $-xdv=(x-b)\,dx$ (согласно § 3), или $-dv=dx-\frac{bdx}{x}$; если последнее уравнение проинтегрировать таким образом, чтобы было одновременно $v=0$ и $x=a$, то оно дает $-v=x-a+b\log\frac{a}{x}$, или $v=a-x-b\log\frac{a}{x}$. Отсюда можно сделать следующие выводы.

I. Для того чтобы получилось максимальное снижение, следует положить $a - x - b \log \frac{a}{x} = 0$; а из этого уравнения ясно, что буква x никогда не может получить отрицательного значения и даже не может полностью исчезнуть без противоречия, разве только если положить $\frac{a}{b} = \infty$; последнее указывает на невозможность того, чтобы вся вода вытекла во время снижения в этом случае и еще меньше в остальных случаях, чем подтверждается § 5.

II. Максимальная скорость соответствует высоте $a - b - b \log \frac{a}{b}$, и если разность между a и b, которую я положу равной c, очень мала, т. е. если пробеги жидкости будут очень малы по сравнению с глубиной, на какую погружен цилиндр, то можно будет считать, что $\log \frac{a}{b} = \frac{c}{b} - \frac{c^2}{2b^2}$ и, стало быть, высота, соответствующая максимальной скорости $\left(\text{т. е. } a - b - b \log \frac{a}{b}\right)$, равна $\frac{c^2}{2b^2}$, из чего видно, что движение будет весьма медленным.

В дальнейшем же я докажу, что все движение при прочих равных условиях остается неизменным, если считать, что цилиндры бесконечно погружены, каким бы отверстием ни было просверлено дно, так что с уменьшением отверстия движение внутренней воды не замедляется. Хотя с первого взгляда это может показаться очень парадоксальным, однако истинная физическая причина этого не может остаться скрытой для более внимательного к этому ума. Она заключается, конечно, в том, что живая сила, возникающая в трубе, как бы бесконечно велика по сравнению с живой силой воды, протекающей через отверстие, в силу чего учет этого отверстия не вносит никакого изменения в вычисление.

Мы докажем еще, что возвратные движения являются схожими, а колебания, как большие, так и меньшие, изохронными между собой, а также определим для них длину простого маятника, колеблющегося таутохронно с колебаниями воды.

§ 8. Пусть теперь $n = 2$. Но тогда в силу § 3 мы имеем $vdx - xdv = (x - b)\,dx$, или $\frac{xdv - vdx}{x^2} = \frac{(b - x)\,dx}{x^2}$, что после правиль-

ного интегрирования переходит в $v=\frac{bx}{a}-b+x\log\frac{a}{x}$. Если положить $\frac{bx}{a}-b+x\log\frac{a}{x}=0$, то x даст место максимального снижения, а место максимальной скорости получится, если положить $x=c^{\frac{b-a}{a}}a$, где под c подразумевается число, логарифмом которого является единица.

После того как мы, таким образом, коснулись различных случаев для разных размеров отверстий, нам остается еще рассмотреть, что может получиться в разных случаях высот a и b.

§ 9. Прежде всего, если принять, что b равно нулю по сравнению с a (а это имеет место, когда дно цилиндра только касается поверхности наружной воды), то получается

$$v=\frac{1}{n^2-2}\left(x-\frac{x^{n^2-1}}{a^{n^2-2}}\right),$$

каковое уравнение, конечно, только по виду отличается от уравнения, которое в § 14 части третьей было дано для того случая, когда предполагается, что воды выбрасываются из цилиндра в воздух. И я также часто наблюдал, что цилиндр опорожняется за одно и то же время, если воды выбрасываются в воздух или же если дно цилиндра чуть-чуть погружено в покоящуюся воду. Этот опыт показывает, что наружный воздух очень мало или нисколько не оказывает сопротивления вытеканию, если даже сопротивление, превышающее сопротивление воздуха более чем в 800 раз, не обнаруживает заметного действия. Так как, стало быть, этот случай не содержит в себе ничего особенного, что не было бы упомянуто в указанном выше месте, то мы больше на нем задерживаться не станем. Исследуем лучше, что должно произойти, если превышение уровня внутренней воды над внешней, существующее в начале снижения, очень мало и им можно пренебречь по сравнению с погружением цилиндра; это допущение удовлетворяется, когда превышение высоты a над высотой b, обозначаемое (как в § 7) через c, очень мало.

§ 10. Если, таким образом, положить $a-b=c$, то следует также положить $a-x=z$; тогда обоими этими величинами, т. е. c и z, можно будет пренебречь по сравнению с a и b; но если $a-x=z$, то будет $x=a-z$ и

$$x^{n^2-1}=(a-z)^{n^2-1}=a^{n^2-1}-(n^2-1)\,a^{n^2-2}z+\left(\frac{(n^2-1)(n^2-2)}{2}\right)a^{n^2-3}z^2-$$
$$-\left(\frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)}{2\cdot 3}\right)a^{n^2-4}z^3+\ldots.$$

Этот ряд следует продолжить настолько, насколько это достаточно для нашей цели; оказывается достаточно взять три члена. Таким образом, в проинтегрированном уравнении, которое мы дали в § 3, мы положим $x=a-z$ и

$$x^{n^2-1}=a^{n^2-1}-(n^2-1)\,a^{n^2-2}z+\left(\frac{(n^2-1)(n^2-2)}{2}\right)a^{n^2-3}z^2,$$

таким образом, будет

$$v=\frac{1}{n^2-2}\left[a-z-a+(n^2-1)\,z-\left(\frac{(n^2-1)(n^2-2)}{2}\right)\frac{z^2}{a}\right]-$$
$$-\frac{b}{n^2-1}\left[1-1+(n^2-1)\frac{z}{a}-\left(\frac{(n^2-1)(n^2-2)}{2}\right)\frac{z^2}{a^2}\right].$$

Если в этом уравнении отбросить взаимно уничтожающиеся члены и подставить $a-c$ вместо b и если отбросить член, в который входит величина $\frac{cz^2}{a^2}$, то получится просто

$$v=\frac{2cz-z^2}{2a};$$

эта формула, поскольку в ней исчезла буква n, показывает, что величина отверстия не имеет никакого отношения к движению внутренней воды, причину чего мы указали уже выше (§ 7).

В дальнейшем же мы докажем, что это движение не отличается от последующего обратного движения и что отсюда возникают таутохронные колебания. Но раньше чем перейти к другим вопросам, я счел необходимым отметить, что в приведенном выше вычислении величины $\frac{c}{a}$ и $\frac{z}{a}$ были приняты в качестве бесконечно малых не только по сравнению с единицей, но и по сравнению с $\frac{1}{n^2}$,

что должно быть надлежащим образом принято во внимание при постановке опытов. Конечно, можно без заметной погрешности применять при опыте теорию бесконечно малых, сильно уменьшая те величины, которые в теории были приняты в качестве бесконечно малых, но следует сделать так, чтобы на опыте все подчинялось этому закону. Так, например, если в цилиндре совершенно отсутствует дно, при допущении $n = 1$, и если допускается, что он погружен до высоты в 35 дюймов, то опыт будет поставлен достаточно точно, если до начала колебаний вода была поднята на высоту лишь в 1 дюйм по отношению к поверхности окружающей воды. Погрешность не будет еще заметной, если нижнее отверстие будет прикрыто даже наполовину, причем тогда $\frac{c}{a}$ будет относиться к $\frac{1}{n^2}$, как $1:9$, каковым отношением в нашем опыте можно еще без опасения пренебречь. Но если допустить, что диаметр трубы вдвое больше диаметра отверстия, то в случае прикрытия $^3/_4$ всего отверстия получится уже $n = 4$, и отношение $\frac{c}{a}$ к $\frac{1}{n^2}$ будет равно отношению 4 к 9, а это отношение уже недостаточно мало, чтобы можно было утверждать, что опыт с достаточной точностью удовлетворяет теории.

Таким образом, здесь представляется уместным дальше исследовать, как следует поступать в тех случаях, когда отношение между $\frac{c}{a}$ и $\frac{1}{n^2}$ выражается значительным числом, а обе эти величины очень малы, что, разумеется, имеет место в тех случаях, когда цилиндр погружается очень глубоко, а отверстие в дне очень мало.

§ 11. Однако этот только что придуманный нами случай может быть легче выведен из дифференциального уравнения § 3, чем из проинтегрированного уравнения, как это было сделано раньше. Но при настоящих обстоятельствах можно отбросить член $-vdx$ по сравнению с n^2vdx и, таким образом, принять $-xdv + n^2vdx = (x - b)\,dx$. Если в последнем снова положить $a - b = c$ и $a - x = z$, то это дает

$$adv + zdv + n^2vdz = (c - z)\,dz;$$

в последнем уравнении можно снова пренебречь вторым членом zdv по сравнению с первым; тогда получается

$$adv + n^2vdz = (c - z)\,dz.$$

Положим здесь (приняв α в качестве числа, гиперболическим логарифмом [51] которого является единица) $v = \frac{1}{n^2}\alpha^{-\frac{nz}{a}}q$; благодаря этому последнее уравнение принимает вид:

$$\alpha^{\frac{-n^2z}{a}}\,adq = n^2(c - z)\,dz,$$

или

$$adq = n^2\alpha^{\frac{n^2z}{a}} \times (c - z)\,dz.$$

Но последнее уравнение следует интегрировать таким образом, чтобы z и v, или также z и q, одновременно обращались в нуль. Таким образом мы будем иметь

$$q = \left(c + \frac{a}{n^2} - z\right)\alpha^{\frac{n^2z}{a}} - c - \frac{a}{n^2}$$

или, наконец,

$$v = \frac{1}{n^2}\left(c + \frac{a}{n^2} - z\right) - \frac{1}{n^2}\left(c + \frac{a}{n^2}\right)\alpha^{\frac{-n^2z}{a}}.$$

А из этого уравнения вытекает следующее.

I. Можно снова получить, как это было найдено иным методом в § 10, $v = \frac{2cz - z^2}{2a}$, а именно, если снова допустить, что $\frac{n^2z}{a}$ является очень малым числом. Для того чтобы это стало ясно, следует показательную величину $\alpha^{\frac{-n^2z}{a}}$ разложить в ряд, который равен $1 - \frac{n^2z}{a} + \frac{n^4z^2}{2a^2} - \frac{n^6z^3}{2 \cdot 3a^3} + \ldots$, из какового для нашей цели достаточно трех первых членов. А если подставить это значение и отбросить тот член, который должен быть отброшен, то получится, как я сказал, $v = \frac{2cz - z^2}{2a}$.

II. Если же, наоборот, положить, что $\frac{n^2}{1}$ бесконечно больше, чем $\frac{a}{z}$ или $\frac{a}{c}$, то, так как в этом случае $\alpha^{\frac{-n^2}{a}}=0$, а также $\frac{a}{n^2}=0$, понятно, что должно получиться $v=c-z$, или $v=x-b$, как в § 4.

III. Но ясно, что ни одна из приведенных выше формул не имеет места без значительной погрешности, когда $\frac{n^2c}{a}$ является средним числом, т. е. ни бесконечно большим, ни бесконечно малым, и когда, однако, каждая из величин $\frac{n^2}{1}$ и $\frac{a}{c}$ является бесконечно большой.

Так, например, пусть подъем, обозначенный через c, равен 1 дюйму, погружение цилиндра b равно 80 дюймам и a равно 81 дюйму; положим затем, что диаметр трубы втрое больше диаметра отверстия, т. е. что $n^2=81$. Тогда будет $v=\frac{2-z-2\alpha^{-z}}{n^2}$; и если дальше положить $z=c=1$, дабы получить высоту скорости, когда обе поверхности находятся на одном уровне, то будет $v=\frac{a-z}{n^2\alpha}$, т. е. приблизительно $v=\frac{1}{307}$ дюйма, между тем как, согласно § 10, должно было бы получиться $v=\frac{1}{162}$ дюйма, а на основании § 4 — $v=0$. В том же примере все пространство, проходимое поверхностью, составляет неполных $^8/_5$ 1 дюйма, а место максимальной скорости составляет приблизительно $^{69}/_{100}$ той же меры ниже начальной высоты.

§ 12. Было бы не более трудно распространить сказанное до сих пор на все формы сосудов и даже на конечные пространства, которыми может быть ограничена наружная вода. Но при этом в большинстве случаев формулы получаются столь громоздкими, что я признал более благоразумным обойти их молчанием и лишь на каком-нибудь примере показать особый способ, с помощью которого теория должна прилагаться к каким-либо иным подлежащим исследованию случаям.

Особенного внимания заслуживает то, что было мною указано о движении вод в трубах, которые далеко внизу открыты и которые очень сильно погружены, так как у них колебательное движение, как у маятников, имеет постоянную продолжительность, и этим поясняется течение волн на море. Но я полагал, что раньше, чем исследовать все колебательное движение, надлежит рассмотреть в общем виде обратное течение вод в погруженных цилиндрах и показать, что при указанном выше допущении обратное течение не отличается от предшествующего вытекания. Итак, займемся теперь этим обратным течением с тем, чтобы после этого сочетать оба движения в различных случаях, дабы в этом вопросе не могло получиться никакого пробела.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

О подъеме вод

§ 13. После того как воды в погруженном цилиндре снизятся, насколько им это позволяет существо дела, представляется главным образом два обстоятельства, требующих рассмотрения: во-первых, избыток высоты наружной поверхности над внутренней и, во-вторых, живая сила, т. е. произведение потенциального подъема на массу той воды, которая была выброшена из цилиндра в покоящуюся вокруг него воду во время снижения. Ибо эта живая сила, которая не может вернуться обратно к воде в цилиндре, главным образом и делает то, что воды оказываются далеко не в состоянии достичь при обратном течении первоначальной высоты, с которой они опустились. Но эта причина является не единственной, хотя бы отсутствовали помехи со стороны вязкости, сцепления и иные в том же роде. Другая причина была указана в § 2. Но истинную меру этой последней причины следует вывести из самого подъема, между тем как первая связана со снижением и, не учитывая внутренних помех, является единственной причиной, вследствие которой вода при своем подъеме не поднимается над наружной поверхностью настолько же, насколько она опустилась ниже нее. Ибо следует

отметить, что даже воды, втекшие через очень малое отверстие, могли бы подниматься с той же скоростью, как если бы совершенно не было дна, и они ворвались широким потоком, если бы весь натиск, передаваемый внутренним водам, пошел целиком на осуществление подъема. Действительно, кто правильно это продумает, тот легко увидит, что в большинстве случаев этот натиск почти полностью затрачивается на какое-то внутреннее движение, нисколько не способствующее подъему. Я определенно заявляю и предлагаю хорошо запомнить, что в большинстве случаев при большом отверстии легко наперед видеть, что натиск втекающих вод будет таким, что от него внутреннее движение немало усиливается. Но когда отверстие меньше, то ясно, что дело обстоит иначе. Таким образом, наше положение правильно применяется в том случае, когда дно либо совершенно отсутствует, либо почти целиком просверлено (ибо при этих условиях избыток скорости втекающей воды над скоростью внутренней воды является нулевым или весьма незначительным, и первая не производит никакого натиска на вторую), или также, когда отверстие очень мало, так как при этом натиск полностью пресекается. Но если отверстие будет относиться к сечению трубы, скажем, как $\sqrt{2}$ к 1, или как 2 к 1, или близко к этому, то движение будет несколько меньшим, чем то следует из указанного положения, так как в этом случае врывающиеся воды производят заметный натиск и в силу природы вещей он полностью не теряется.

Таким образом, легко, не производя вычисления, наперед предугадать нижеследующие состояния в обратном течении вод после того, как они снизились с известной высоты.

I. Не будет, конечно, никакого заметного обратного течения, если отверстие очень мало.

II. Так как погруженная часть цилиндра остается неизменной, то при обратном течении во́ды никогда не перейдут определенного предела, если бы даже при предшествующем снижении воды были подняты на бесконечную высоту, ибо с какой бы высоты ни начиналось снижение, никогда все воды не вытекают из цилиндра, как это мы видели в §§ 5 и 7.

III. Если представить себе, что снижение начинается с высоты XY, а последующий подъем происходит до CD, то произведение действительного снижения массы воды $XYDC$ до TV на массу будет мерой комбинированного отношения обеих величин, которые, как это было указано в § 2, определяют различие между подъемом и предшествующим ему снижением; а так как в случае полного удаления дна IM отношение, упомянутое во втором пункте § 2, исчезает, то указанное выше произведение равно живой силе всей воды, выброшенной в период снижения, так что можно без какого-либо иного вычисления, помимо тех, которые были изложены до сих пор, определить подъем вод в совершенно открытом цилиндре.

IV. Подъем будет равен снижению, если цилиндр предполагается бесконечно погруженным, так как тогда исчезают вышеуказанные причины уменьшения.

V. Отсюда, стало быть, колебания будут длиться без конца, так как последующие колебания всегда будут как бы бесконечно малы по сравнению с высотами погружения. Но посторонние помехи, которых мы до сих пор совершенно не принимали во внимание, приводят к тому, что все движение очень скоро прекращается.

§ 14. После этих общих предварительных замечаний мы подвергнем настоящую задачу более тщательному вычислению. И я дам два решения: одно, приуроченное к изложенным только что началам, и другое, в известной мере отличающееся от первого по построению.

Итак, сохранив как рисунок, так и обозначения § 3, рассмотрим воду, снижающуюся с высоты XY до xy и затем от этого предела начинающую свой подъем. Пусть My или Ix равны α, а после того как вода уже поднялась до cd или ef, положим $Md = \xi$, $df = d\xi$.

Сделав, таким образом, эти подготовления к вычислению и обозначив снова через v высоту, соответствующую скорости воды в cd, и через $v + dv$ аналогичную высоту в очень близком положении ef, постараемся исследовать приращение потенциаль-

ного подъема воды в то время, как в цилиндр поступает капелька *LONP* и поверхность воды из *cd* поднимается до *ef*. Ясно, что так как повсюду потенциальный подъем внутренней воды, умноженный на ее массу, выражается через $n\xi v$ (внутренние движения не надо принимать во внимание), то приращение того же произведения будет равно $n\xi dv + nvd\xi$. Если же сверх того рассмотреть потенциальный подъем $n^2v - v$ (см. § 2), который теряет втекающая капелька $nd\xi$ и который равным образом соответствует действительному снижению частицы воды $nd\xi$ на высоту $b - x$, то ясно, что следует положить

$$n\xi dv + nvd\xi + (n^2v - v)\, nd\xi = (b - \xi)\, nd\xi,$$

или

$$\xi dv + n^2vd\xi = (b - \xi)\, d\xi.$$

Но это же можно получить иначе следующим образом.

А именно, предположим, что у капельки *LONP* как бы не было никакой скорости прежде втекания, и тотчас же, после втекания, она приобретает потенциальный подъем, который равен n^2v, так как следует считать, что непосредственно после своего втекания (согласно § 2 указанной выше части) капелька продолжает движение с общей скоростью $\sqrt{v}$. При изложенных условиях надлежит рассуждать следующим образом. До втекания капельки потенциальный подъем воды *cdMLPIc* (масса которой равна $n\xi$) равен v, а потенциальный подъем капельки *LONP* (масса которой равна $nd\xi$) равен 0; следовательно, потенциальный подъем всей воды

$$cdMLONPIc = \frac{n\xi v}{n\xi + nd\xi} = \frac{\xi v}{\xi + d\xi}.$$

Но после того как капелька *LONP* втекла и заняла положение *LonP*, ее потенциальный подъем стал равен n^2v, а потенциальный подъем остальной воды *efMLonPIe* равен $v + dv$ (масса этой воды, конечно, равна $n\xi$). Итак, потенциальный подъем всей рассматриваемой здесь воды после втекания капли равен

$$\frac{nd\xi \times n^2v + n\xi \times (v + dv)}{n\xi + nd\xi} = \frac{\xi v + \xi dv + n^2vd\xi}{\xi + d\xi},$$

между тем как до этого втекания он составлял $\frac{\xi v}{\xi + d\xi}$. Итак, он получил приращение $\frac{\xi dv + n^2 v d\xi}{\xi + d\xi}$, или проще $\frac{\xi dv + n^2 v d\xi}{\xi}$. Но это приращение следует приравнять действительному снижению, которое вода выполняет, меняя положение *cdMLONPIc* на положение *efMLONPIe*, каковое снижение равно четвертой пропорциональной массы внутренней воды $n\xi$, капельки $nd\xi$ и высоты Vf или $b - \xi$, так что вышеуказанное снижение равно $\frac{(b-\xi)\,d\xi}{\xi}$. Отсюда снова получается такое уравнение:

$$\xi dv + n^2 v d\xi = (b - \xi)\,d\xi.$$

Интеграл же последнего уравнения, после прибавления должной постоянной, принимает следующий вид:

$$v = \frac{b}{n^2}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{n^2}\right] - \frac{1}{n^2+1}\left[\xi - \left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{n^2}\alpha\right],$$

который мы теперь рассмотрим при различных для него условиях.

§ 15. Если сечение трубы будет бесконечно больше сечения отверстия, то, конечно, ясно, что будет $v = \frac{b-\xi}{n^2}$ и, стало быть, вода будет втекать со скоростью, соответствующей высоте наружной поверхности над внутренней, но в этом случае подъем происходит не выше поверхности наружной воды.

Когда же сечение отверстия находится в конечном отношении к сечению трубы, подъем происходит выше поверхности RS, например, до st. Но $\sqrt{t}$ будет всегда меньше, чем $\sqrt{y}$, разве только, если дна совершенно не существует, тогда будет $\sqrt{t} = \sqrt{y}$. В § 5 нами было указано, что при снижении разность между VY и Vy обязана своим происхождением и пропорциональна потенциальному подъему выброшенной во время снижения воды. И теперь также можно отметить, что при подъеме разность между Vy и Vt обязана своим происхождением удару частиц *LonP* о массу выше расположенной воды, каковой удар не способствует подъему, но затрачивается на бесполезное внутреннее движение, как это было указано в § 2. Когда дно *IM* полностью отсутствует, вода входит

в трубу с той же скоростью, какой обладает уже вода, ранее вступившая в трубу, и не получается никакого удара; вследствие этого в данном случае вода поднимается выше поверхности RS настолько же, насколько ранее она была ниже ее, что, как мы скоро увидим, показывает и уравнение.

§ 16. Если положить $v=0$, то определится максимальный подъем st. Следовательно, для того чтобы правильно определить все движение, следует попеременно применить формулы, выведенные в §§ 3 и 14, что я поясню теперь на одном примере — для случая $n^2=1$.

Если $n^2=1$, то получается

$$v=b\left(1-\frac{\alpha}{\xi}\right)-\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{\alpha^2}{\xi}\right),$$

и будет $v=0$, если принять $\xi=2b-\alpha$, т. е. если принять $Vt=Vy$. Итак, если, например, наполненная водой и совершенно лишенная дна труба $ABMI$ будет погружена до середины в наружную воду и если всю длину ее обозначить через a, то вода будет двигаться таким образом, что сначала она опустится ниже TV на расстояние $0.297a$, затем она поднимается на такое же расстояние выше того же TV; после этого она снова опустится на расстояние $0.240a$ ниже его, затем опять на такое же расстояние поднимется выше указанной линии и т. д.

§ 17. Ясно также, что когда $\alpha=0$, т. е. когда труба не содержит в себе совершенно воды, то получится $v=\frac{b}{n^2}-\frac{\xi}{n^2+1}$; следовательно, весь подъем будет равен $\frac{n^2+1}{n^2}b$, или, другими словами, подъем выше наружной поверхности воды будет равен $\frac{b}{n^2}$.

§ 18. Перехожу теперь к бесконечно погруженным трубам, снижение в которых с его состояниями мы определили в § 10. При этом мы воспользуемся для рассчета данного случая совершенно тем же методом, какой мы применили там. Итак, начальное снижение у нас будет $Vy=b-\alpha=c$, а вызванное этим повышение $yd=\xi-\alpha=z$. Таким образом, имеется $\xi=\alpha+z$ и

$b = \alpha + c$, где z и c являются величинами, которые следует рассматривать, как бесконечно малые по сравнению с величиной α. Отсюда получается $\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{n^2} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + z}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{z}{\alpha}\right)^{-n^2}$, или, применяя известное разложение в ряд и ограничиваясь тремя первыми членами, $1 - \frac{n^2 z}{\alpha} + \frac{n^2(n^2+1)z^2}{2\alpha^2}$. Если подставить эти величины вместо b, ξ и $\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{n^2}$, то последнее уравнение § 14 преобразуется в следующее:

$$v = \frac{\alpha + c}{n^2} \times \left(\frac{n^2 z}{\alpha} - \frac{n^2(n^2+1)z^2}{2\alpha^2}\right) - \frac{1}{n^2+1} \times$$
$$\times \left(\alpha + z - \alpha + n^2 z - \frac{n^2(n^2+1)z^2}{2\alpha}\right) = (\alpha + c) \times \left(\frac{z}{\alpha} - \frac{(n^2+1)z^2}{2\alpha^2}\right) -$$
$$-\left(z - \frac{n^2 z^2}{2\alpha}\right) = \frac{cz}{\alpha} - \frac{z^2}{2\alpha} - \frac{(n^2+1)cz^2}{2\alpha^2}.$$

Но последним членом можно пренебречь, и тогда получится просто

$$v = \frac{2cz - z^2}{2\alpha},$$

в каковое уравнение уже не входит n. А это уравнение не отличается от уравнения, данного в § 10 для снижения, а именно от $v = \frac{2cz - z^2}{2a}$, так как величины a и α разнятся друг от друга лишь на очень малую величину $2c$.

Сверх того, к данному случаю следует отнести и все то, что в том же § 10 было сказано о не слишком сильно закрытой трубе.

§ 19. Итак, снижение и подъем между собой равны, ибо из наших уравнений ясно, что жидкость и выше наружной поверхности удерживается в равновесии одинаковым образом. Из тех же формул получается важное следствие, что даже неравные колебания являются изохронными, если только все их можно признать бесконечно малыми по отношению к погружению. При этом простой таутохронный маятник имеет такую же длину, как погруженная часть трубы.

Эта теория отличается от той, которая была приведена в § 4 части шестой о колебаниях в цилиндрической трубе, составленной

из двух вертикальных колен, в том отношении, что там все колебания, не исключая колебаний конечного размера, являются таутохронными, в настоящем же случае конечные колебания имеют неодинаковую длительность; затем в том отношении, что там длина маятника была равна половине длины трубы, здесь же она равна всей длине трубы, хотя, если правильно продумать этот вопрос, здесь следует скорее говорить о согласии, чем о расхождении, в силу удвоения трубы, которое имеет место в первом случае.

§ 20. И тот и другой вид колебаний поясняет природу волн, возбуждаемых ветром. Ибо они движутся именно таким образом, что в них воды постоянно поднимаются и снова опускаются. Отсюда ясно утверждение Ньютона, что времена колебаний находятся в половинном отношении к ширинам волн, ибо он допускает, что форма волн является всегда себе подобной и, стало быть, что их ширина пропорциональна глубине, до которой воды приводятся в движение. Представляется правдоподобным, что глубина эта равна длине простого таутохронного с волнами маятника, а именно, например, $60^1/_2$ парижских футов, если подъем и снижение волн происходит в течение каждых 2 сек.

§ 21. Во избежание пространных вычислений я не хотел исследовать данного вопроса во всем его объеме, поэтому я ограничился случаем цилиндрических сосудов. Однако, так как в случае бесконечного погружения предложения и теоремы сохраняют свое значение почти полностью, то я прибавлю еще общую теорему о колебаниях воды в трубе с произвольными, неравными между собой сечениями, опустив, однако, доказательство теоремы, которое будет ясно каждому из того, что было уже сказано в различных местах, в частности изложено в §§ 6—20 части шестой. Но при этом следует сделать так, чтобы верхняя часть сосуда, в которой происходят колебания уровня жидкости [55], имела цилиндрическую форму.

Общая теорема о колебаниях воды в трубе

§ 22. Итак, пусть bd есть длина погруженного сосуда (фиг. 35б). Пусть bF представляет его сечение в месте поверхности и допустим, что сосуд сделан таким образом, что кривая FGH является

шкалой сечений. Возьмем прямую bc и проведем кривую LMN, ордината которой cM повсюду равна $\frac{bF^2}{cG}$. Тогда длина маятника, изохронного с колебаниями водной поверхности, будет равна площади $bdNL$, разделенной на bL.

Следствие

§ 23. Из предшествующего параграфа следует, что если бы погруженная труба имела коническую форму и если бы в области поверхности воды она имела сечение, которое находилось бы к погруженному отверстию в отношении m к n, то длина маятника, изохронного с колеблющейся водой, относилась бы к длине погруженной трубы, как $\sqrt{m}$ к $\sqrt{n}$, т. е. как корни из вышеуказанных сечений, а также, что если бы подобная же труба, но только перевернутая в обратном направлении, была почти полностью погружена, то длины изохронных маятников находились бы в обратном отношении к погруженным отверстиям.

Общее пояснение

§ 24. Так как то, что содержится в настоящей части, основано главным образом на новых допущениях, то оно тем в большей мере заслуживает того, чтобы его проверить на опытах. И действительно, я произвел различные опыты; не было пропущено ни одного из опытов, которые я надумал произвести. Ниже я изложу, что сделал. Пока же для того чтобы можно было надежнее судить о согласии опытов с теорией, следует предварительно в соответствии с обстоятельствами дела разобраться в том, может ли, и в какой мере сжатие вытекающей струи (природу которой я изложил в части четвертой) извратить вычисление. Это затруднение может быть в большей своей части устранено, если сделать так, чтобы стенки нижнего отверстия образовали некоторый маленький цилиндр высотой едва в $^1/_2$ линии, по поводу чего следует обратить внимание на четвертый опыт четвертой части. Затем следует также принимать во внимание помехи, которые

должны возникать вследствие прилипания воды; правда, они мало замедляют движение, если обращаешь внимание на времена колебаний, но сильно уменьшают размахи колебаний, в особенности когда берут более узкие и более длинные трубы. Таким образом, следует больше полагаться на те опыты, в которых определяются времена колебаний, так как эти времена не очень сильно изменяются благодаря уменьшению размахов.

Что касается первого вида опытов, при которых целью является исследование и наблюдение размахов колебаний жидкостей в трубах как при подъеме, так и при снижении, то я пользовался следующей мерой предосторожности: я надевал на трубу нитяное кольцо в том месте, до которого, согласно моему ожиданию, вода могла снизиться или подняться, а затем после многократного повторения опыта я, наконец, устанавливал нитяное кольцо таким образом, чтобы поверхность колеблющейся жидкости как раз доходила до нее. Прочие места, которые надо было наблюдать в трубе, я точно так же отмечал нитяным кольцом. Что касается времен колебаний, то так как колебания очень быстро убывают и становятся неощутимыми, сходя на нет, то я мог наблюдать времена колебаний только таким образом: определив после многократно повторенного опыта длину простого изохронного маятника, я во время его качания закрывал отверстие трубы пальцем, а затем убирал палец в тот момент, когда и маятник и жидкость одновременно начинали свое колебание.

Опыты, относящиеся к части седьмой

Опыт 1

Я применил стеклянную цилиндрическую трубу с диаметром около 4 дюймов, которая внизу была совершенно открыта. Я опустил ее в воду, покоящуюся в очень широком прозрачном сосуде, на глубину 44 линий и прикрыл верхнее отверстие пальцем, дабы при поднятии трубы часть воды из нее не вышла. Затем я поднял трубу вверх на 22 линии с тем, чтобы как погруженная часть трубы, так и высота внутренней воды над наружной состав-

ляли 22 линии, после чего, быстро убрав палец, наблюдал снижение поверхности в трубе по отношению к поверхности покоящейся воды и нашел, что оно составляло $9^1/_2$ линий.

Согласно же §§ 7 и 17, она должна была снизиться на 30 линий. Недостачу в $3^1/_2$ линии следует, повидимому, почти полностью отнести за счет прилипания воды к стенкам трубы.

Выполнив наблюдение над снижением, я полностью повторил этот опыт с тем, чтобы исследовать и следующий за ним подъем. Я нашел его равным 8 линиям, а согласно § 16, он должен был составить, если принять во внимание предшествующее снижение, $9^1/_2$ линий, т. е. он должен был равняться предыдущему снижению. В данном случае опыт дал недостачу лишь в $1^1/_2$ линии, между тем как в первой части опыта недостача составила $3^1/_2$ линии. Тогда размах был большим и выполнен был с большей скоростью; он испытал и значительно большие помехи, которые возрастают вместе со скоростью.

Опыт 2

Я воспользовался той же трубой, но прикрытой пластинкой, в которой было сделано отверстие с сечением, находившимся в отношении 1 : 2 к сечению трубы; когда поверхность воды в трубе была поднята на 18 линий над поверхностью покоящейся воды и на столько же линий было погружено ее дно, то я видел, что поверхность воды в трубе при своем снижении опустилась почти на 5 линий ниже покоящейся жидкости; § 8 указывает на снижение в $7^1/_2$ линий. Недостачу, составившую более $2^1/_2$ линий, я опять-таки приписываю прилипанию воды к стенкам трубки.

Затем ту же трубку, снабженную той же пластинкой и совершенно свободную от воды, я погрузил в воду, заткнув снизу пальцем, на глубину 18 линий. После отнятия пальца поверхность трубы поднялась выше покоящейся воды на полных 8 линий, между тем как § 17 указывает для этого случая 9 линий.

То обстоятельство, что в данном случае недостача оказалась значительно меньшей, чем при снижении, я приписал причине, которую подробно изложил в § 13, где указал, что в случае, если

сечение отверстия относится к сечению трубы, как $\frac{1}{2}$ к 1 или близко к этому, то получится несколько большее движение, чем то, какое должно быть согласно допущению. А для того чтобы вполне увериться в этом, я применил более короткую и более широкую трубу с тем, чтобы почти полностью устранить действие посторонних помех, и проделал нижеследующий опыт.

Опыт 3

Я воспользовался трубой с диаметром более 7 линий, которую я распорядился изготовить из железа, так как у меня не было под рукой стеклянной вполне цилиндрической трубы. Длина трубы составила 4 дюйма и $6^1/_2$ линий. Сечение ее, выраженное в отношении к отверстию через n, было равно 1.860, а $n^2 = 3.458$.

С этой трубой я произвел следующий опыт.

Заткнув верхнее отверстие, я многократно испытал, на какую глубину следует погрузить трубу в воду, покоящуюся в очень большом ящике, с тем, чтобы после быстрого удаления пальца, прикрывающего отверстие, вода поднялась в точности до края того же отверстия и чтобы при этом нисколько воды не вытекло. Я установил, что эта глубина составляет 3 дюйма и 3 линии. Таким образом, подъем выше внешней воды оказался равным 1 дюйму и $3^1/_2$ линий, между тем как даже при устранении всех помех подъем, согласно § 17, должен был едва превзойти 11 линий. Таким образом, оказалось правильным предварительное замечание § 13, что в подобного рода случаях подъем не может не быть несколько большим того, чего требует допущение. После этого я приделал к той же трубе другое дно; в данном случае было $n = 3.68$ и $n^2 = 13.54$. Результат этого опыта было трудно в точности разобрать, так как поднимающаяся в трубе поверхность была всегда покрыта пузырями. Тем не менее было заметно, что в данном случае трубу следует погружать на глубину в 4 дюйма и 2 или 3 линии, так что вне воды остается при этом приблизительно 4 линии, совершенно так, как это дает теория.

Опыт 4

Цилиндрическую стеклянную трубу, имевшую в диаметре приблизительно 3 линии, я погрузил на глубину 20 дюймов и устроил так, чтобы вода в ней колебалась, после того как предварительно вода была поднята почти на 1 дюйм. Она проделала при этом не более 4 или 5 заметных колебательных движений, вследствие чего я не имел возможности со всей точностью выяснить длину простого изохронного маятника; мне показалось, однако, что она была равна 22 или 23 дюймам, из чего я заключил, что прилипание воды к стенкам трубы не только уменьшает пробеги, но и несколько замедляет времена колебаний, ибо, согласно § 19, вышеупомянутая длина должна была бы составить лишь 20 дюймов. То же самое я установил и при тех колебаниях, которые мы рассмотрели в предыдущей части.

Между прочим, когда нижнее отверстие было даже почти наполовину закрыто, я не мог наблюдать, чтобы благодаря этому пробеги уменьшались или колебания замедлялись, что находится в соответствии с изложенным в §§ 7 и 18.

Опыт 5

Коническую трубу длиной в 21 дюйм я погрузил в воду более широким отверстием так, что над водой выдавался лишь 1 дюйм ее; при этом одно отверстие превосходило другое чуть больше чем вдвое. Длину маятника, изохронного с колебаниями воды, колеблющейся в трубе, я нашел равной 15 дюймам; согласно же § 23, эта длина должна была бы составить немного менее 14 дюймов. Наконец, погружая трубу в воду узким концом, я нашел, что длина изохронного маятника чуть больше чем вдвое превышает прежнюю, как это и указано в упомянутом выше параграфе.

ГИДРОДИНАМИКИ

ЧАСТЬ ВОСЬМАЯ



О движении жидкостей, как однородных, так и неоднородных, через сосуды неправильной и прерывистой формы, где на основе теории живых сил, часть которых постоянно поглощается, изъясняются преимущественно особые явления жидкостей, выбрасываемых через весьма многие отверстия, причем предпосылаются общие законы для определения повсюду движения жидкостей

§ 1. Помимо тех начал, которыми мы пользовались в предшествующем параграфе, мы не будем пользоваться еще какими-либо иными началами, кроме двух следующих: во-первых, мы принимаем, что *скорости жидкостей повсюду обратно пропорциональны сечениям сосудов*; с помощью этого начала определяется *потенциальный подъем* всей воды по заданному потенциальному подъему любой частицы; во-вторых, мы считаем, что *потенциальный подъем* всей воды остается постоянно равным *действительному снижению*. Во всех случаях, когда имеют место оба эти начала, следует минимально сомневаться в том, чтобы с помощью примененного нами метода движение жидкостей не могло быть правильно определено. Тем не менее я готов признать, что сосуды, в которых жидкости движутся, могут оказаться такой формы, что ни одно из указанных начал правильно не проявится. Конечно, первое из них редко или никогда не приводит к заметным ошибкам, так как повсюду, где

оно не имеет места, воды обычно не обладают почти никаким движением и их можно без ощутимой погрешности рассматривать как покоящиеся. Но весьма отличную природу имеет другое начало, что выявится из последующих примеров и прекрасным свидетельством чего может явиться то, что было приведено нами в предшествующей части об обратном течении вод. Ведь далеко не бывает так, чтобы воды, снизившиеся в погруженном сосуде с заданной высоты, могли вернуться на ту же высоту, как они должны были бы это сделать согласно указанному началу, если бы были устранены все внутренние помехи; в большинстве случаев их подъем скорее бывает даже едва заметным по сравнению с предшествующим снижением. Ведь поверхность воды не может подняться настолько выше той воды, в которую труба погружена, насколько ниже ее она перед этим опустилась, разве только если труба совершенно открыта; и эта же поверхность опускается значительно меньше того, насколько перед этим она была приподнята. Причину этого мы привели в предшествующей части. Ввиду изложенных выше обстоятельств я дам теперь два правила для определения во всех случаях движения вод и поясню их затем такими примерами, которых до сих пор не могла объяснить никакая теория, между тем как с нашей теорией они находятся в прекрасном соответствии.

Правило 1

§ 2. Если скорость, взятую в каком-либо месте заданного сосуда, мы примем в качестве известной, то надлежит постичь, какова будет скорость в остальных частях жидкости. Ибо этим путем будет определен потенциальный подъем всей жидкости и его приращение. До сих пор мы рассматривали жидкости разделенными на бесконечное множество параллельных или, лучше, перпендикулярных повсюду к стенкам сосудов слоев и принимали, что скорости обратно пропорциональны этим слоям. Правда, легко придумать сосуды, в которых жидкости движутся иначе; но я считал, что в этих местах жидкости никогда не обладают заметным движением, так что из приведенного выше допущения почти

не может возникнуть ощутимой погрешности; таким образом, с очень большой точностью можно будет применять вышеуказанное правило. В особенности же сюда относится сжатие струй, когда жидкости пропускают через отверстия, сделанные в очень тонких пластинках, по отношению к чему следует проявлять большую внимательность. Полагаю, что действия подобного рода сжатий можно будет хорошо предвидеть, если правильно продумать то, что было нами указано о них в части четвертой.

Правило 2

§ 3. В отдельные моменты надлежит смотреть, сколько возникает живой силы или какое возникает произведение потенциального подъема на массу без какого-либо влияния на основное течение, природа которого исследуется. Это, конечно, надлежит опять-таки предоставить внимательной оценке каждого. Если такое произведение возникает, то его следует прибавить к произведению потенциального подъема, заключающегося в преобладающем движении, на массу, а сумму произведений следует принять равной произведению всей воды на ее действительное снижение.

Это правило имеет безусловно важное значение и, как я полагаю, является почти единственным, служащим для измерения движений, возникающих в сосудах неправильной формы и в сосудах, разделенных на несколько сообщающихся между собой полостей, что я поясню теперь на нескольких примерах.

Задача

§ 4. Пусть предложен сосуд $ACRB$ (фиг. 37) как бы бесконечно большого повсюду сечения по отношению к отверстиям, о которых будет скоро речь, и разделенный с помощью некоей перегородки EF на две отдельные полости, сообщающиеся между собой с помощью отверстия G. Кроме того, пусть этот сосуд имеет в нижней своей части другое отверстие D. Допустим, далее, что сосуд заполнен водой до PQ, так что нижняя полость $CEFR$ целиком

заполнена жидкостью, а над перегородкой находится еще другая часть воды $PQFE$. Положив это и приняв, что жидкость начала уже двигаться, требуется определить скорость воды, вытекающей через отверстие D в воздух или высоту поднятия, вызывающую эту скорость.

Решение

Пусть высота поверхности PQ над отверстием D равна x, сечение отверстия D равно n, а сечение отверстия G равно m. Ясно, что потенциальный подъем любой капли, протекающей через отверстие G, нисколько не содействует вытеканию через D и полностью расходуется на возбуждение некоторого внутреннего движения, которое вскоре поглощается без какого-либо иного эффекта. Следовательно, необходимо, чтобы в каждый отдельный момент времени возникало новое движение в частицах, протекающих через отверстие G, и точно так же в частицах, протекающих через D. Но если потенциальный подъем капельки, протекающей через D, назвать v, т. е. если предполагается, что вода выскакивает из D со скоростью, производящей высотой которой является v, то аналогичной высотой для капельки, равной по своей массе первой капельке, протекающей в то же время через G, будет $\frac{n^2 v}{m^2}$. Если эти потенциальные подъемы умножить на массу, которая у обеих частиц одинакова и которую я назову M, то сумма этих произведений будет равна $Mv + \frac{Mn^2 v}{m^2}$. А так как вследствие бесконечного размера сосуда иного движения не возникает, то приведенную выше сумму (согласно правилу 2) следует признать равной произведению всей массы воды, которую обозначим через μ, на действительное снижение, образующееся во время вытекания капельки M и равное $\frac{Mx}{\mu}$ (согласно § 7 части третьей), так что общее произведение оказывается равным Mx. Таким образом, мы имеем

$$Mv + \frac{Mn^2 v}{m^2} = Mx, \quad \text{или} \quad v = \frac{m^2 x}{n^2 + m^2},$$

что и требовалось определить.

Пояснение 1

§ 5. Из приведенного выше примера ясно, что это движение может быть определено без дифференциального исчисления в том случае, когда форма сосуда, повсюду весьма обширного, не может изменить этого движения. В то же время было бы нетрудно определить это течение, пользуясь и обычным рассуждением относительно сечения сосуда. Мы избегали этого только из стремления к краткости и в дальнейшем будем также обходиться без этого рассуждения, кроме случая, когда движение станет заметно изменяться в зависимости от формы сосуда. Это может случиться при достаточно широких, но очень длинных трубах, в которых движется вода, в особенности при колебательном движении. Ведь в предыдущей части мы даже видели, что когда колебания в очень глубоко погруженных трубах весьма малы, то нельзя принимать во внимание только отверстие в дне сосуда, оставляя в стороне сечения, хотя бы и достаточно большие, а скорее следует учитывать почти только эти последние.

Пояснение 2

§ 6. Так как в представленном нами вычислении живая сила каждой капельки, протекающей через G, должна поглощаться водой нижней полости, то ясно, что это предложение не должно распространяться на те случаи, которые противоречат этому допущению, например, когда перегородка EF расположена очень близко ко дну CR и когда одновременно отверстия в точности соответствуют друг другу. Ведь при этих условиях нетрудно предвидеть, что движение будет сильно отличаться от того, какое дает настоящая теория. Но когда расстояние DG велико и одновременно положение отверстий является наклонным, а стенки отверстий не дают возможности водяным струям сжиматься, то нет никакого сомнения в том, что теория в точности будет соответствовать всем явлениям.

Следствие

§ 7. Когда отверстие G очень велико по сравнению с другим отверстием, получается приблизительно $v = x$, но эта высота, которой, конечно, соответствует скорость воды, вытекающей через

D, сильно убывает при увеличении отверстия D, так что, например, если v будет вдвое больше отверстия G, то получается $v = \frac{1}{5}x$, и v почти все исчезает, когда отверстие G очень мало по сравнению с отверстием D.

После того, что было установлено выше, всякий увидит уже истинную причину тех движений, которые впервые наблюдал Мариотт и которыми он, по его свидетельству, восхищался выше всякой меры, как весьма удивительными; вместе с тем он поймет, как далеко этот автор, проявляющий большую проницательность в остальных работах, сбился с пути в настоящих исследованиях. Полагаю, что будет небесполезно изложить здесь наблюдения Мариотта.

§ 8. Он применил сосуд, какой представлен на фиг. 38, отличающийся от предыдущего лишь тем, что в нижней части в цилиндр ABC была вставлена горизонтальная труба MD с боковым отверстием D, через которое воды выскакивают в вертикальном направлении, а посередине перегородки EF имелось отверстие G. Ниже перегородки было устроено маленькое отверстие K для того, чтобы нижняя часть сосуда могла легче наполняться водой, после чего это отверстие затыкалось и заполнялась остальная часть сосуда.

После того как все это было указанным образом подготовлено и воды стали вытекать через D, Мариотт наблюдал, что скоро они поднялись до I, затем постепенно с уменьшенной скоростью опустились до H и, наконец, когда верхняя часть цилиндра $ABFE$ была почти опорожнена, до O, после чего, сразу набравшись новых сил, они подскочили почти до F. Если память мне не изменяет, он обратил также внимание на то обстоятельство, что высота начального броска бывает тем меньше, чем меньше отверстие G по сравнению с другим отверстием D. Рекомендуется посмотреть его трактат «О движении вод» (ч. IV, раздел 1). Он полагает, что изменения указанных движений можно объяснить, если представить себе, что к очень широкому сосуду $ABFE$ присоединена более узкая труба $GLMD$, через которую воды должны вытекать. Но

мы доказали, и опыт повседневно нас учит этому, что движение вод из сосуда $ABGLMD$ весьма отлично от того движения, которое было только что указано. Не в меньшей степени ошибся бы тот, кто полагал бы, что вода выскакивает через отверстие D с такой скоростью, как если бы оно было устроено в перегородке EF, ибо может случиться, что высота начального броска окажется больше или меньше высоты FB. И, наконец, воды будут вытекать не в таком количестве, как всякий легко мог бы ожидать, в каком они вытекали бы за такое же время из верхнего простого сосуда, если бы удалить часть $EFDC$, хотя примерно так именно и может обстоять дело в том случае, когда отверстие G значительно меньше отверстия D.

§ 9. Наше уравнение, а именно $v = \frac{m^2 x}{n^2 + m^2}$, вполне точно соответствует явлениям. Действительно, оно указывает, что вскоре после начала течения вода поднимается на известную высоту, причем эта высота тем меньше, чем меньше отверстие перегородки по сравнению с другим отверстием. Затем этот подъем постепенно уменьшается, пока из верхнего сосуда не вытечет вся вода; в этот самый момент времени он сразу увеличивается и почти достигает всей высоты находящейся наверху воды, так как следует считать, что тогда воды начинают вытекать из простого и притом бесконечно широкого сосуда. Тем не менее движение вод теперь все еще замедляется благодаря прохождению воздуха через отверстие G, и, конечно, значительно замедляется, когда нижнее отверстие очень мало, о чем мы кое-что скажем в скором времени, когда речь будет идти о неоднородных жидкостях. Если рисунок Мариотта в должной пропорции соответствует поставленной теме, то необходимо, чтобы отверстие G он сделал несколько большим половины другого отверстия.

§ 10. Далее, наша формула указывает, и это могло бы, пожалуй, показаться достаточно парадоксальным для многих, недостаточно еще разобравшихся в настоящей теории, что положение перегородки EF, более высокое или же более низкое, никоим образом не изменяет натиска или скорости вытекающей воды. Полагаю, что причина этого явления теперь уже ясна для всех.

§ 11. Рассмотрим теперь движение вод в том случае, когда имеется много перегородок, снабженных отверстиями, через которые заставляют проходить воды с тем, чтобы могло осуществиться вытекание из отверстия D. Этот вопрос может быть разрешен тем же путем, каким мы воспользовались в задаче § 4. И если произвести правильно вычисление, сохраняя при этом примененные там же обозначения, то окажется, что

$$v = x : \left(1 + \frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{n^2}{\beta^2} + \frac{n^2}{\gamma^2} + \cdots\right),$$

где под α, β, γ и т. д. подразумеваются сечения отверстий, имеющихся в перегородках, а n, как и раньше, выражает сечение отверстия D, через которое воды вытекают.

§ 12. Таким образом, если вместо одной перегородки в сосуде, аналогичном тому, какой изображен на фиг. 39, имеется много перегородок, например, в B, C, R и т. д., через которые вода протекает, пока она вытекает из нижнего отверстия D, то скорость вытекающей воды будет сразу изменяться и возрастать всякий раз, когда какая-нибудь полость опорожняется. При этом может существовать такое соотношение между высотами AB. BC, CR, RE и т. д., а также между размерами отверстий D, G, F, H и т. д., что всякий раз, когда начинает осушаться новый свод, вытекающая струя будет подниматься на одну и ту же высоту O или будет вытекать с одной и той же скоростью. Действительно, этого можно достичь (если обозначить сечения отверстий D, G, F, H и т. д. через n, α, β, γ и т. д.), устроив так, чтобы было

$$BC = \frac{n^2}{\alpha^2} AB; \quad CR = \frac{n^2}{\beta^2} AB; \quad RE = \frac{n^2}{\gamma^2} AB, \text{ и т. д.,}$$

так что, если принять, что отверстия между собой равны, то надлежит устроить так, чтобы и отрезки AB, BC, CR, RE и т. д. были точно так же между собой равны. Легко также будет в цилиндрическом сосуде подобрать такой размер для отверстий, чтобы поверхность жидкости опускалась за одно и то же время от одной перегородки до любой следующей, а если эти пере-

городки находятся на одном и том же расстоянии друг от друга, а также от дна, то можно придумать однообразное устройство клепсидр (водяных часов).

§ 13. Если же расположить все перегородки очень высоко, то получится приятное гидравлическое развлечение: наблюдать поднимающуюся струю DO, которая подскакивает на равные высоты через равные промежутки времени, что может быть достигнуто одновременно.

§ 14. Допустим теперь, что надлежит исследовать движение выскакивающей жидкости, когда через отдельные отверстия протекают все иные и иные жидкости. Но очевидно, что жидкости следует представлять себе тем более легкими, чем выше они расположены, дабы движение не возмущалось, что имеет место, когда одновременно через одно и то же отверстие нижняя жидкость поднимается, а верхняя опускается. Этим путем можно будет выяснить, каково будет движение вод, вытекающих из сосуда, который закрыт со всех сторон за исключением некоторого маленького устроенного наверху отверстия, допускающего поступление воздуха. Мы сохраним при этом допущение о бесконечно большом сечении цилиндрического сосуда по сравнению с отверстиями и затем обозначим удельный вес жидкости, выскакивающей из D, через A, а удельный вес той жидкости, которая протекает через G, обозначим буквой B, а удельные веса жидкостей, протекающих через отверстия F, H и т. д., обозначим соответственно буквами C, D и т. д. И, наконец, так как следует принимать во внимание и высоты различных жидкостей, из которых в силу цилиндрической формы сосуда только нижняя, вытекая, изменяет свою высоту, то мы обозначим через x высоту нижней жидкости над отверстием D, а высоты прочих жидкостей в том порядке, в каком они располагаются друг над другом, мы обозначим соответственно через b, c, d и т. д.; остальные обозначения мы сохраним те же, что и в § 11. После указанной подготовки следует произвести вычисление аналогично тому, как это было сделано в § 4; при этом надлежит лишь следить за тем, чтобы массы капель, проходящих через раз-

личные отверстия за одни и те же малые отрезки времени, были оценены не просто по их общему весу, но и по их удельному весу; действительное же снижение для отдельных жидкостей следует брать порознь для каждой из них. Если пойти этим путем, то получается прежде всего такое уравнение

$$Av = \frac{n^2}{\alpha^2} Bv + \frac{n^2}{\beta^2} Cv + \frac{n^2}{\gamma^2} Dv + \cdots = Ax + Bb + Cc + Dd + \ldots,$$

которое после преобразования дает

$$v = (Ax + Bb + Cc + Dd + \cdots) : \left(A + \frac{n^2}{\alpha^2} B + \frac{n^2}{\beta^2} C + \frac{n^2}{\gamma^2} D + \cdots\right).$$

§ 15. Если имеется две жидкости, то следует взять два члена как в числителе, так и в знаменателе и три члена, когда имеется три жидкости, и т. д. Поэтому если вытекающей жидкостью будет, например, ртуть, над которой располагается вода, и если принять, что удельные веса этих жидкостей относятся друг к другу, как 14 к 1, то получится

$$v = \frac{14x + b}{14 + \frac{n^2}{\alpha^2}};$$

если отношение между отверстиями D и G будет равно, например, отношению 3 к 1, то будет

$$v = \frac{14x + b}{23}.$$

§ 16. Ясно также, что приведенное выше исчисление не исключает тех случаев, когда верхние жидкости имеют больший удельный вес, чем нижние, лишь бы только нижние жидкости не поднимались через то же отверстие, через которое верхние опускаются; я предполагаю (хотя и не настаиваю на этом), что этого не произойдет, если вместо простого отверстия будет существовать какая-нибудь трубочка сколь угодно малой высоты, через которую верхняя жидкость будет опускаться в нижнюю полость, как, например, на фиг. 40, где имеются в виду именно две жидкости.

При этом высота CR является здесь переменной, а высота AC постоянной. Однако для однообразия букв мы назовем высоту $AC=x$, а другую $CR=b$; удельный вес жидкости, прорывающейся через D, мы снова примем равным A, а удельный вес другой жидкости, проходящей через G, примем равным B. Тогда высота DO, или v, будет равна $\frac{Ax+Bb}{A+\frac{n^2}{\alpha^2}B}$. Следовательно, если через отверстия D и G будут протекать соответственно вода и ртуть, то в этом случае будет

$$v=\frac{x+14b}{1+\frac{14n^2}{\alpha^2}}.$$

§ 17. Далее, для того чтобы определить движение простой жидкости из сосуда, пропускающего сверху воздух через малое отверстие, следует принять во внимание, что в данном случае не существует никакой высоты b; ибо можно считать, что у обоих отверстий воздух находится на одинаковой высоте. Поэтому будет

$$v=\frac{Ax}{A+\frac{n^2}{\alpha^2}B},$$

и если будет $\frac{A}{B}=850$, каковым приблизительно обычно и бывает соотношение между удельными весами воды и воздуха, то будет

$$v=\frac{850x}{850+\frac{n^2}{\alpha^2}}.$$

§ 18. Все эти начала, которые мы до сих пор применяли, легко распространяются, как я уже говорил, и на сосуды, у которых сечение находится в конечном отношении к отверстиям. В их истинности можно убедиться и иным, совершенно отличным путем, как я это покажу, когда перейду к гидравлической статике, ибо при этом втором способе доказательства становятся более обозримыми давления жидкостей в отдельных частях сосуда; статические же законы этих жидкостей сильно

отличаются от законов, предназначенных для покоящихся жидкостей.

Сверх того последнее полезно для правильного понимания гидравлических машин, между тем как мастера, повидимому, не уделяли этому достаточного внимания. У нас представится случай поговорить об этом более подробно в следующей части, где мы дадим расчет того, сколько силы, применяемой для перемещения вод, теряется вследствие прохождения воды через много отверстий, и одновременно постараемся показать, какие средства надлежит применять, чтобы по возможности уменьшить указанный ущерб в силах. Но раньше чем перейти к этому, мы в настоящей части рассмотрим некоторые другие сложные сосуды.

§ 19. Иногда устраивают так, что расположенные рядом сосуды получают один из другого воду, которая в конце концов должна вытечь из последнего сосуда. Мы поясним теперь эти движения на примере.

Пусть предложен сосуд любого вида $AGMB$ (фиг. 41), который благодаря новому подливанию вод поддерживается постоянно наполненным до AB. При этом предполагается, что одновременно из этого сосуда жидкость проходит через отверстие M в другой смежный сосуд $BMNC$, а из последнего в свою очередь — в другой сосуд $CNRD$ через отверстие N, и т. д., пока, наконец, воды не выбрасываются в воздух. Требуется определить местоположения поверхностей HL, PQ и т. д. после того, как они будут доведены до состояния постоянства. Эта задача разрешается следующим образом.

Из того обстоятельства, что поверхности AB, HL, PQ и т. д. остаются на одном и том же месте, ясно, что воды проходят через отверстия M, N, R со скоростями, которые должны соответствовать высотам BH, LP, QR, если только прохождение вод через одно отверстие не ускоряет их течения через ближайшее отверстие, что, безусловно, не будет иметь места, если только не будет определенно приложено особое усилие, чтобы это в какой-либо мере имело место. Сверх того, конечно, следует принять

в соображение, что скорости вод, протекающих через отверстия, обратно пропорциональны отверстиям, так как при состоянии постоянства через каждое из этих отверстий за одно и то же время должны протекать одни и те же количества вод. Из вышесказанного понятно, что если сечения отверстий M, N, R обозначить через m, n, p, то будет $LP=\frac{m^2}{n^2}\times BH$; $QR=\frac{m^2}{p^2}\times BH$. Но $BH+LP+QR$ равно высоте поверхности AB над последним отверстием R, т. е. оно равно DR. Таким образом, будет

$$BH+\frac{m^2}{n^2}\times BH+\frac{m^2}{p^2}\times BH=DR$$

и, стало быть,

$$BH=DR:\left(1+\frac{m^2}{n^2}+\frac{m^2}{p^2}\right);$$

равным образом

$$LP=\frac{m^2}{n^2}\times DR:\left(1+\frac{m^2}{n^2}+\frac{m^2}{p^2}\right),$$

а также

$$QR=\frac{m^2}{p^2}\times DR:\left(1+\frac{m^2}{n^2}+\frac{m^2}{p^2}\right),$$

отсюда

$$BH=DR:\left(1+\frac{m^2}{n^2}+\frac{m^2}{p^2}\right),$$

$$LP=DR:\left(1+\frac{n^2}{m^2}+\frac{n^2}{p^2}\right),$$

$$QR=DR:\left(1+\frac{p^2}{n^2}+\frac{p^2}{m^2}\right).$$

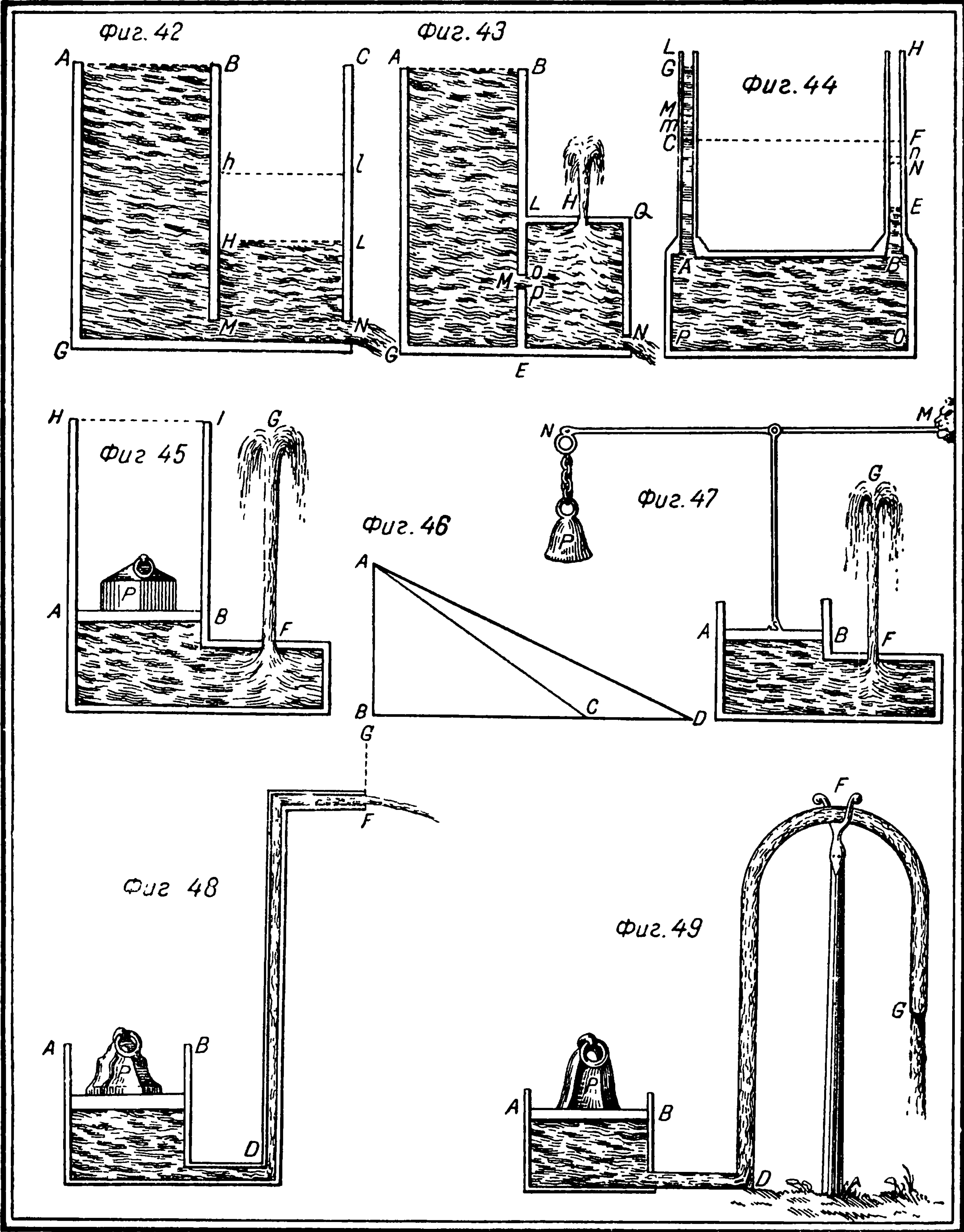
Указанным образом определяются и неизменные положения поверхностей HL, PQ и т. д. А за какое время это осуществляется, если упомянутые поверхности занимали иные положения, и какое количество воды протекает за это время через отдельные отверстия, это мы исследуем ниже вместе с другими относящимися сюда вопросами. Теперь же из приведенных выше значений высот BH, LP, QR и т. д. мы выведем важнейшие соотношения.

§ 20. I. Если все отверстия будут равны между собой, то $BH = LP = QR$ и т. д., и каждая из указанных высот будет столько раз содержаться в высоте DR, сколько раз сосуды повторяются.

II. Если какое-либо из отверстий бесконечно мало по сравнению с остальными отверстиями, то все поверхности, расположенные по сю сторону отверстия, будут находиться на одной и той же высоте, что и первая поверхность AB; прочие же поверхности будут находиться очень близко ко дну GR.

III. Если представить себе сплошную трубу, проходящую через все отверстия M, N, R и т. д., то понятно, что вода должна вытекать из отверстия этой трубы со скоростью, соответствующей всей высоте DR. В нашем же случае эта скорость соответствует лишь высоте QR, причиной и источником чего является то обстоятельство, что потенциальный подъем всех частиц, протекающих через отверстия, за исключением лишь вытечного отверстия, поглощается. Таким образом, живая сила, теряющаяся в каждый отдельный момент времени, относится к живой силе, возникающей в каждый отдельный момент времени, как DQ к DR. Высоты же BH, LP и т. д. представляют соответственно живую силу, которая постоянно отнимается у частиц порознь при их прохождении через отверстия M, N. Я полагаю, однако, что если бы отверстия были почти равны между собой и если бы их центры были расположены по прямой линии и, наконец, если бы стенки BM, CN, DR были отставлены не очень далеко друг от друга, то возможно, что воды вырывались бы со значительно большей скоростью, чем это дает наша теория. В остальных случаях я не сомневаюсь в точности теории, если отвлечься от помех, на которые указывалось неоднократно.

IV. Наконец, ясно, что всякий раз, как несколько или одна из поверхностей воды HL, PQ и т. д. изменят свое положение, все поверхности вскоре станут изменять свои места, пока не расположатся указанным выше образом. Но общее определение этих изменений требует очень хлопотливого и пространного вычисления, если только не допустить, что сосуды имеют призма-


Фиг. 42
A
B
C
h
l
H
L
M
N
G
Фиг. 43
A
B
L
H
Q
O
M
P
N
E
Фиг. 44
L
G
M
m
C
H
F
n
N
E
A
B
P
O
Фиг 45
H
I
G
P
A
B
F
Фиг. 46
A
B
C
D
G
F
Фиг. 47
N
M
P
G
A
B
F
Фиг 48
A
B
P
D
Фиг. 49
F
G
A
B
P
D

тическую форму и являются как бы бесконечно широкими по сравнению с отверстиями, дабы, таким образом, можно было пренебречь приращениями потенциальных подъемов вод ML, NQ и т. д., меняющих свои места, по сравнению с потенциальными подъемами, которые постоянно возникают в каплях, протекающих через M, N, R. Это ограничение не должно нас, конечно, смущать, так как в различных местах мы уже видели, что даже при весьма умеренных по своему размеру сосудах можно без заметной погрешности отбросить при расчете приращения движения внутренних масс. Итак, я опущу имеющееся у меня общее решение ввиду чрезмерной его пространности, и, как я уже это делал в настоящей части, допущу, что сосуды являются как бы бесконечно обширными и притом для большей краткости — призматическими. При этом я начну с сосуда, разделенного на две части.

§ 21. Пусть имеется подобного рода разделенный на две части сосуд (фиг. 42), часть которого AM заполнена водой целиком, а другая часть BN предполагается заполненной только до HL, когда уже начинается течение через оба отверстия M и N. Пусть в AB подливаются воды с тем, чтобы этот сосуд поддерживался все время полным. Тогда получится так, что в BN воды будут подниматься (или же снижаться — в зависимости от обстоятельства дела). При указанных выше условиях требуется определить скорость поверхности воды, когда она придет в положение hl.

Для этой цели обозначим сечение отверстия M через m, отверстия N через n и сечение hl (которое мы предполагаем, конечно, всюду одинаковым) через g. Затем положим $BM = a$, $HM = b$, $Bh = x$ и, стало быть, $hM = a - x$. Но тогда из положения как бы бесконечно больших сосудов AM и BN ясно, что когда изменяющаяся поверхность воды находится в hl, то высота, соответствующая скорости воды, протекающей через M, будет равна $Bh = x$, а самая скорость будет равна $\sqrt{x}$; одновременно высота по отношению к отверстию N будет $hM = a - x$, а ско-

рость воды, протекающей через N, будет равна $\sqrt{a-x}$. Таким образом, количество воды, протекающей за данный малый промежуток времени в сосуд BN через M, относится к количеству ее, вытекающему за тот же малый промежуток времени из сосуда, как $m\sqrt{x}$ к $n\sqrt{a-x}$, а если разность последних величин разделить на сечение g, то это даст скорость поверхности hl, каковая скорость, которую мы обозначим через v, выразится, таким образом, с помощью следующего равенства:

$$v=\frac{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}}{g}.$$

§ 22. Для того чтобы теперь определить время, за какое поверхность жидкости приходит из HL в hl, назовем это время t; а так как $dt=\frac{-dx}{v}$, то если для v принять только что найденную величину, то будет

$$dt=\frac{-gdx}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}}.$$

Эта формула может, конечно, прямо сделаться рациональной [56], если положить $x=\frac{4ag^2}{(1+g^2)^2}$, а затем надлежащим образом ее преобразовать. Но этот метод является несколько более пространным, чем нижеследующий другой, при котором подлежащая преобразованию величина разбивается на два члена, которые должны быть проинтегрированы отдельно, а именно приведенное выше уравнение тождественно со следующим:

$$dt=\frac{mgdx\sqrt{x}}{n^2a-(m^2+n^2)\,x}+\frac{ngdx\sqrt{a-x}}{n^2a-(m^2+n^2)\,x}.$$

Но $\int\frac{mgdx\sqrt{x}}{n^2a-(m^2+n^2)\,x}=-\frac{2mg}{m^2+n^2}\sqrt{x}+\frac{n^2g\sqrt{a}}{(m^2+n^2)\sqrt{(m^2+n^2)}}\times$

$$\times\log\frac{n\sqrt{a}+\sqrt{m^2+n^2}\times\sqrt{x}}{n\sqrt{a}-\sqrt{m^2+n^2}\times\sqrt{x}},$$

а интеграл другого члена, т. е. $\int \frac{ngdx\,\sqrt{a-x}}{n^2a-(m^2+n^2)\,x}$, будет равен

$$\frac{-2ng}{m^2+n^2}\sqrt{(a-x)}+\frac{mng\sqrt{a}}{(m^2+n^2)\times\sqrt{(m^2+n^2)}}\log\frac{m\sqrt{a}+\sqrt{m^2+n^2}\times\sqrt{a-x}}{m\sqrt{a}-\sqrt{m^2+n^2}\times\sqrt{a-x}}.$$

Ясно, что после прибавления необходимой постоянной величины отсюда получится

$$t=\frac{2mg\,\sqrt{a-b}-2mg\,\sqrt{x}+2ng\,\sqrt{b}-2ng\,\sqrt{a-x}}{m^2+n^2}+$$

$$+\frac{mng\,\sqrt{a}}{(m^2+n^2)\times\sqrt{m^2+n^2}}\times$$

$$\times\log\frac{mna+(m^2+n^2)\times\sqrt{ax-x^2}+m\sqrt{m^2+n^2}\,\sqrt{ax}+n\sqrt{m^2+n^2}\,\sqrt{a^2-ax}}{mna+(m^2+n^2)\times\sqrt{ax-x^2}-m\sqrt{m^2+n^2}\,\sqrt{ax}-n\sqrt{m^2+n^2}\,\sqrt{a^2-ax}}-$$

$$-\frac{mng\,\sqrt{a}}{(m^2+n^2)\times\sqrt{m^2+n^2}}\times$$

$$\times\log\frac{mna+(m^2+n^2)\times\sqrt{ab-b^2}+m\sqrt{m^2+n^2}\,\sqrt{a^2-ab}+n\sqrt{m^2+n^2}\,\sqrt{ab}}{mna+(m^2+n^2)\times\sqrt{ab-b^2}-m\sqrt{m^2+n^2}\,\sqrt{a^2-ab}-n\sqrt{m^2+n^2}\,\sqrt{ab}}.$$

§ 23. Из § 19 явствует, что поверхность hl остается в своем положении, когда Bh, т. е. x, равно $\frac{n^2a}{m^2+n^2}$. А если в проинтегрированном уравнении предыдущего параграфа положить $x=\frac{n^2a}{m^2+n^2}$, то знаменатель в логарифмической величине становится равным 0, вследствие чего самая эта величина становится бесконечно большой. Таким образом, время всего движения оказывается в бесконечное число раз больше времени любой его части.

Но для того чтобы определить еще другой случай, посмотрим, за какое время поверхность воды из низшего положения MN (т. е. если положить $b=0$) поднимется на величину $\frac{1}{2}\,a$, если принять, что $m:n=4:3$. При этом будет

$$t=\frac{8g\,\sqrt{a}-14g\sqrt{\frac{1}{2}\,a}}{25}+\frac{12g\,\sqrt{a}}{125}\log\left(\frac{49+35\,\sqrt{2}}{49-35\,\sqrt{2}}\right)-\frac{12g\,\sqrt{a}}{125}\log-4,$$ [57]

или

$$t=\frac{8g\sqrt{a}-7g\sqrt{2a}}{25}+\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log\left(\frac{49+35\sqrt{2}}{140\sqrt{2}-196}\right),$$

т. е. приблизительно $t=\frac{15g}{100}\times 2\sqrt{a}$; это показывает, что рассматриваемое время относится ко времени, за какое весомое тело свободно падает с высоты BM, как $15g$ к 100. Таким же образом определяется время, если сначала поверхность hl находилась выше положения равновесия. Так, например, пусть тот и другой сосуды целиком заполнены водой, но отверстия M и N находятся теперь между собой в отношении 3 к 4, и пусть требуется определить время, за какое поверхность из B снизится на половину BM. Указанные выше допущения приводят к тому, что $m=3$, $n=4$, $b=a$ и $x=\frac{1}{2}a$. А при этих условиях получается

$$t=\frac{8g\sqrt{a}-7g\sqrt{2a}}{25}+\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log\left(\frac{49+35\sqrt{2}}{49-35\sqrt{2}}\right)-\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log-4\ .$$

Из последнего видно, что в том и другом примерах время является одинаковым.

§ 24. Раньше чем перейти к сосудам, разделенным на несколько частей, представляется уместным выяснить, какое количество воды протекает через каждое из отверстий M и N, пока поверхность воды из положения HL приходит в hl. Прежде всего, в отношении отверстия M, ясно, что количество воды, протекающее через него за данный малый промежуток времени dt, пропорционально скорости $\sqrt{x}$, умноженной на величину отверстия m и на этот малый промежуток времени dt, так что это количество $\left(\text{в силу } dt=\frac{-gdx}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}}\text{, согласно § 22}\right)$ равно $\frac{-mgdx\sqrt{x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}}$, и, стало быть, все количество воды, которое вытечет с самого

начала, равно $-\int \frac{mgdx\sqrt{x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}}$. Но $-\int \frac{mgdx\sqrt{x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}} =$

$$= \frac{mnga}{(m+n)^2} \log\left(\frac{ma-mb-nb}{mx+nx-na}\right) + \frac{mg}{m+n} \times (a-b-x).$$

Подобным же образом устанавливается, что количество воды, которое за это время вытекает через отверстие N $\Big($каковое количество, разумеется, равно $-\int \frac{ngdx\sqrt{a-x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}}\Big)$, равно

$$\frac{mnga}{(m+n)^2} \times \log\left(\frac{ma-mb-nb}{mx+nx-na}\right) - \frac{ng}{m+n} \times (a-b-x)\ .$$

Отсюда выявляется также и количество воды, которое подливается в AB, так как оно тождественно с тем количеством ее, которое протекает через M. Наконец, вода, собравшаяся в сосуде BN, выражается через $g\ (a-b-x)$, а если взять разность между водами, протекающими через M и N, то получается та же величина $g\ (a-b-x)$.

§ 25. Подобно тому как в § 21 мы определили скорость непрерывно меняющей свое место поверхности для сосуда, разделенного на две части, так теперь мы определим скорость отдельных поверхностей в сосудах, разделенных на много частей. Действительно, пусть высота самой высокой поверхности над ближайшей к ней равна x, высота этой последней над следующей равна y, затем — z, и опять следующая высота пусть равна s, и т. д. Сечения же отверстий мы обозначим через m, n, p, g и т. д.; сечения сосудов второго, третьего, четвертого и т. д. пусть будут M, N, P и т. д. Тогда ясно, что скорость второй поверхности будет равна $\frac{m\sqrt{x}-n\sqrt{y}}{M}$, скорость третьей поверхности будет равна $\frac{n\sqrt{y}-p\sqrt{z}}{N}$, скорость четвертой поверхности — $\frac{p\sqrt{z}-g\sqrt{s}}{P}$, и т. д.

Дальше, так как малые расстояния, проходимые за те же малые промежутки времени поверхностями, относятся между собой как скорости, то ясно, что таким образом можно опре-

делить положения этих поверхностей в отдельные моменты времени, хотя уравнения почти не поддаются трактовке. Само собой понятно, что если бы даже одна поверхность была выведена из того положения равновесия, которое было определено выше в § 19, то в результате этого все остальные поверхности стали бы приводить друг друга в движение до тех пор, пока по истечении бесконечно большого времени все они вернулись бы в первоначальное положение.

§ 26. Пусть далее сосуд имеет такую форму, как это показывает фиг. 43, т. е. пусть он будет разделен на две части $ABEG$ и $LQNE$, сообщающиеся между собой с помощью отверстия M. Пусть сверх того H и N представляют собой отверстия, через которые воды выходят, между тем как в AB они в таком же количестве подливаются. Пусть при этом сечения в обоих сосудах будут как бы бесконечно большими по сравнению с отверстиями M, H и N. При этих установках пусть предложено найти скорости, с какими воды выбрасываются как через H, так и через N, т. е. через высоты, соответствующие этим скоростям. Эти же скорости будут неизменными, так как сосуд поддерживается наполненным водой, и в то же время сечения сосуда признаются бесконечно большими по сравнению с сечениями отверстий.

Решение этой задачи легко будет понять на основании того, что было изложено выше, если только представить себе, что отверстие M разбито на две части o и p, из которых одна, o, направляет воды к отверстию H, а другое, p, — к отверстию N. Но эти части o и p (так как через ту и другую воды протекают с одной и той же скоростью) будут находиться между собой в таком же отношении, какое существует между количествами воды, протекающими за то же время через H и N, т. е. в отношении, составленном из отношения сечения H к сечению N и скорости в H к скорости в N. После этих предварительных замечаний ясно, что если обозначить сечения M, H и N через α, β, γ, а высоты, соответствующие скоростям в H и N, обозначить через x и y, а самые скорости через $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$, то сечение o будет

равно $\frac{\beta\sqrt{x}}{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}\alpha$, а сечение p будет равно $\frac{\gamma\sqrt{y}}{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}\alpha$.

Положим теперь, что высота поверхности AB над отверстием H равна a; тогда, как это было доказано в § 4, можно найти x, разделив квадрат отверстия o на сумму квадратов отверстий o и H и умножив результат деления на a. Итак, указанным путем получается

$$x=\frac{\alpha^2 ax}{\alpha^2 x+(\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y})^2},$$

откуда берет начало следующее уравнение:

$$\alpha^2 x+(\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y})^2=\alpha^2 a. \tag{A}$$

Тем же путем по отношению к отверстиям p и N, если положить высоту AB над N равной $a+b$, получается нижеследующее второе уравнение:

$$\alpha^2 y+(\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y})^2=\alpha^2 x\,(a+b). \tag{B}$$

Если уравнение (B) вычесть из уравнения (A), то получится $y=x+b$, из чего следует, что если обе струи направить вертикально вверх, то они будут подниматься до одного и того же места. Далее, если в уравнении (A) подставить вместо y его значение $x+b$, то получится

$$\alpha^2 x+(\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{x+b})^2=\alpha^2 a, \tag{C}$$

откуда с помощью квадратного уравнения определяется значение x.

§ 27. Из уравнения предыдущего параграфа выводятся такие следствия.

I. Так как скорость воды, протекающей через M, равна

$$\frac{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}{\alpha},$$

то высота, производящая эту скорость, будет равна

$$\left(\frac{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}{\alpha}\right)^2,$$

но если сложить уравнения (A) и (B), то получается

$$\left(\frac{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}{\alpha}\right)^2=\frac{2a+b-x-y}{2}=a-x$$

в силу того, что $y=x+b$.

II. Если отверстие H очень мало по сравнению с отверстиями M и N, т. е. если можно считать, что β имеет нулевое значение по сравнению с α и γ, то уравнение (C) переходит в следующее:

$$\alpha^2x+\gamma^2x+\gamma^2b=\alpha^2a\ ,$$

или

$$x=\frac{\alpha^2a-\gamma^2b}{\alpha^2+\gamma^2}\ .$$

Это находится, конечно, в прекрасном согласии с § 12, так как очевидно, что через очень малое отверстие вода подскакивает на такую же высоту, какую имела бы вода, если бы она так же давила на пластинку LQ вниз, как внутренняя вода давит на нее вверх. А согласно § 19, эта упомянутая выше высота есть $\frac{\alpha^2a-\gamma^2b}{\alpha^2+\gamma^2}$. Далее, при указанном выше допущении высота скорости вод в N, или $x+b$, равна $\frac{\alpha^2a+\alpha^2b}{\alpha^2+\gamma^2}$, и, наконец, высота скорости вод в M, или $a-x$, равна $\frac{\gamma^2a+\gamma^2b}{\alpha^2+\gamma^2}$; в рассматриваемом частном случае последние уравнения можно было бы также непосредственно вывести или предвидеть из § 19.

III. Если же теперь допустить, что другое отверстие N очень мало по сравнению с остальными двумя, то, если положить $\gamma=0$, получится

$$x=\frac{\alpha^2a}{\alpha^2+\beta^2}\ ;$$

затем,

$$x+b=\frac{\alpha^2a+\alpha^2b+\beta^2b}{\alpha^2+\beta^2}$$

и

$$a-x=\frac{\beta^2a}{\alpha^2+\beta^2}\ .$$

IV. Если $\gamma^2 b = \alpha^2 a$, то будет $x = 0$. Таким образом, в этом случае части пластинки LQ не испытывают никакого давления; а когда γ больше, чем $\frac{\alpha^2 a}{b}$, и пластинка нигде не просверлена, то она даже испытывает давление вниз.

Но все это точно так же может быть легко понято на основании § 19.

V. Таким образом, с помощью того же параграфа можно было бы, не производя расчета, наперед предвидеть, что должно было бы произойти, когда при предположении, что отверстия H и N находятся на одной и той же высоте, можно принять в рассмотрение их сумму как единое отверстие с сечением $\beta + \gamma$. А именно, как § 19, так и § 26 указывают, что

$$x = \frac{\alpha^2 a}{\alpha^2 + (\beta + \gamma)^2}.$$

VI. Можно также отметить, что когда значение x становится мнимым, то это происходит вследствие того, что в некоторых случаях воды не только не вытекают через H, но поверхность LQ даже снижается. Отсюда может получиться, что она снижается ниже отверстия M, вследствие чего прекращается смежность вод вопреки допущению настоящего предложения. Если же значение x является вещественным, то оно тогда получает два выражения, но второе из них следует признать бесполезным. Таким образом, в данном случае следует быть осторожным, чтобы не выбрать неподходящего корня в качестве полезного.

VII. Наконец, чтобы затронуть весьма частный случай, предположим, что все отверстия между собой равны. Это даст

$$5x^2 + (2b - 6a)\,x = -a^2 + 2ab - b^2,$$

или

$$x = \frac{3a - b - 2\sqrt{(a^2 + ab - b^2)}}{5},$$

и если сверх того будет $a = 3b$, то получится x равный (приблизительно) $\frac{4}{15}\,b$; затем высота скорости в отверстии N, или $x + b$,

равна $\frac{19}{15}b$, а высота, соответствующая скорости в M, или $a-x$, равна $\frac{41}{15}b$. Таким образом, при равенстве отверстий, скорости, а также и количества вод, протекающих за одни и те же времена через отверстия M, H и N, относятся между собой приблизительно, как $\sqrt{41}$ к 2 и к $\sqrt{19}$.

§ 28. Из всего вышеизложенного выявляется метод определения движения в жидкостях и в тех случаях, когда количество живых сил не сохраняется. Аналогичным образом можно всегда произвести расчет, когда на основании природы предложенного вопроса можно наперед заключить (как это можно было точно сделать в вопросах настоящей части), сколько в отдельные моменты времени исчезает живой силы, бесполезной для определения движения. А те случаи, которые мы до сих пор исследовали, не являются единственными. Поэтому представляется желательным привести еще другой случай, касающийся колебаний жидкостей, чтобы выявить, какую убыль могут испытать вследствие этого размаха жидкости.

Пусть имеются две равного сечения цилиндрические трубы AL и BH (фиг. 44), вертикально вставленные в очень широкий горизонтально расположенный сосуд $ABOP$. Пусть этот сосуд целиком заполнен водой, а трубы содержат в себе воду до C и F. Затем, после нарушения равновесия, пусть одна поверхность окажется в G, а другая в E, и вода, будучи предоставлена самой себе, скоро начнет двигаться. При изложенных предпосылках поверхность G должна была бы настолько опуститься ниже места C, а другая, E, подняться выше F, какова высота GC, или EF, если бы вся живая сила сохранилась (от сопротивлений трений и иных подобных мы сейчас отвлекаемся). Но ясно, что живая сила всей воды, текущей через A в горизонтальный сосуд, отнимается без какого-либо иного эффекта покоящейся в нем водой, откуда следует, что снижение поверхности G, а равно подъем другой поверхности будет меньше только что указанного. Определим же теперь эту убыль.

Для этой цели допустим, что поверхность из G пришла в M, и положим, что $GM = x$, $GC = b$, $CA = a$; тогда будет $BE = a - b$, $EN = x$, $MC = FN = b - x$. Затем, пусть высота, соответствующая скорости поверхности в M, равна v, а в очень близком положении $m = v + dv$, и пусть приращение живой силы воды (пока поверхности проходят элементы пути Mm, Nn, или dx) равно $2adv$, к чему следует прибавить живую силу капли, которая отнимается от воды горизонтального сосуда, т. е. vdx; тогда сумма $2adv + vdx$ будет равна действительному снижению воды, умноженному на массу воды, каковое произведение равно действительному снижению капли dx, умноженному на $2b - 2x$. Таким образом,

$$2adv + vdx = 2bdx - 2xdx.$$

Это уравнение после правильно произведенного интегрирования переходит в следующее:

$$v = 4a + 2b - 2x - c^{-\frac{x}{2a}} \times (2b + 4a)\ [58],$$

откуда, если положить

$$4a + 2b - 2x - c^{-\frac{x}{2a}} \times (2b + 4a) = 0,$$

значение x даст величину всего размаха; а если от последнего отнять b, то оставшаяся величина покажет снижение по отношению к точке равновесия C.

§ 29. Для того чтобы на каком-нибудь примере стало ясно, насколько в силу этого уменьшаются колебания, положим $a = b$, приняв $CA = GC$ и $BE = 0$.

Тогда получается $3a - x = c^{\frac{-x}{2a}} \times (3a)$, или $c^{\frac{x}{2a}} = \frac{3a}{3a - x}$, или $x = 2a \log \frac{3a}{3a - x}$, каковому уравнению очень близко удовлетворяет значение $x = \frac{7}{4} a$. Таким образом, уменьшение размаха, или $a - b$, равно четвертой части подъема жидкости над средней точкой. Если на опыте оно наблюдается большим, то избыток следует приписать прилипанию воды к стенкам труб.

§ 30. Я подозреваю, что в силу изменения направления движения жидкости в точках A и B указанная выше причина, приводящая к уменьшению пробегов, полностью не отпадает даже в том случае, если сделать горизонтальную трубу одинакового сечения с вертикальными.

Сверх того, можно было бы придумать бесчисленное множество других случаев, которые следует разрешать на основе тех же начал: как, например, если бы надо было исследовать природу колебаний в сосуде (фиг. 44), разделенном в горизонтальной своей части перегородкой на две части, сообщающиеся между собой лишь с помощью отверстия, имеющегося в перегородке, а также другие случаи в том же роде. Но, полагаю, приведенного выше уже достаточно для того, чтобы каждый мог легко составить себе общие правила для разрешения подобного рода вопросов.

Опыты, относящиеся к восьмой части

Опыт 1

В § 4 утверждается, что высота скорости воды, текущей через отверстие D (фиг. 37), составляет $\frac{m^2x}{n^2+m^2}$; это я подтвердил следующим образом. Каждое из отверстий C и D имело (вокруг себя) маленькую, несколько приподнятую полоску вроде пояска, с тем чтобы предотвратить сжатие струи и чтобы по количеству воды, протекающей за данное время, можно было безошибочно судить о скоростях. Выполнив затем тщательно измерения и отметив время, за которое поверхность снижалась на данное расстояние AP, я убедился, что это время в точности соответствует скоростям, определенным в указанном параграфе. Я заметил также, что движение нисколько не изменяется при поднятии или спуске перегородки. Остальное, относящееся к данному опыту, выпало из памяти, и я не отметил этого на бумаге. Но я признал излишним повторить этот опыт, который легко будет воспроизвести каждому. А он является основой для всего про-

чего, которое поэтому едва ли нуждается в дальнейшем опытном исследовании. Тем не менее мне хотелось сверх того проверить еще нижеследующее.

Опыт 2

Я воспользовался примерно таким же сосудом, какой применил Мариотт (см. фиг. 38), и снова проверил наше уравнение следующим образом. Я устроил так, чтобы воды вытекали через отверстие D по горизонтальному направлению, и затем измерил высоту отверстия D над полом и расстояние до места, где струя падала на пол, от той точки на полу, над которой по вертикали приходилось отверстие D. Отсюда я установил высоту, соответствующую скорости воды, вытекающей в D. При этом я нашел, что эта высота на опыте оказалась почти тождественной с той, какую дает теория настоящей части в § 4. Аналогичные опыты я изложу в конце опытов, относящихся к двенадцатой части, которые одновременно подтвердят нашу гидравлико-статическую теорию.

Наконец, так как в §§ 26 и 27 имеется много такого, что было получено путем особого расчета, надо будет и об этом поставить опыты, в особенности потому, что одновременно с этим могут быть приведены и другие опыты, которые будут изложены в части двенадцатой, если позаботиться о том, чтобы для этой цели был изготовлен сосуд, подобный тому, какой представлен на фиг. 43.

Сверх того настоящая теория подтверждается также опытами, изложенными в части седьмой, которые были произведены мною над колебаниями жидкостей, втекающих в трубы через отверстия.

ГИДРОДИНАМИКИ

ЧАСТЬ ДЕВЯТАЯ

О движении жидкостей, выбрасываемых не собственной тяжестью, а посторонней силой, где преимущественно речь идет о гидравлических машинах и наивысшей, какая лишь может существовать, степени их совершенства, и о том, каким образом может быть дальше усовершенствована механика как твердых тел, так и жидкостей

§ 1. В настоящей части, в которой я решил исследовать главным образом гидравлические машины и, насколько это возможно, усовершенствовать пользование ими, мы отвлечемся от изменений движения, происходящих вследствие силы или инерции внутренней жидкости, ибо, как мы видели, движение внутренней воды является приблизительно одинаковым почти с самого начала движения, если отверстие очень мало по сравнению с внутренними размерами, как это имеет место в большинстве гидравлических машин. Ведь было бы смешно при практических вопросах беспокоиться об изменениях, которые имеют место в первые моменты течения воды и которые мы уже определили в части четвертой; там это имело смысл, чтобы выявить всю силу теории. Таким образом, в интересах краткости мы допустим, что в течение всего движения вода выбрасывается со скоростью, пропорциональной корню квадратному из внутрен-

ней, создающей давление силы, после того как эта сила сведена к весу водяного цилиндра, стоящего над отверстием; действительно, какова бы ни была эта сила, надлежит рассматривать вес вертикального водяного цилиндра, лежащего над поверхностью внутренней воды, и высота этого цилиндра даст высоту, соответствующую скорости выбрасываемой воды, если только не имеется никаких внутренних помех, и вода вытекает из очень обширного сосуда. Это следует понимать таким образом, что если поршень AB, обремененный грузом P (фиг. 45), выбрасывает воду через отверстие F, а вес груза P равен весу водяного цилиндра $HABI$, то водяная струя FG должна достичь высоты HI.

Определения

§ 2. Под движущей силой я буду в дальнейшем подразумевать то действующее начало, которое заключается в тяжести, в одушевленном давлении или в других такого же рода силах, которые называют мертвыми.

Произведение же, получающееся от умножения этой движущей силы на ее скорость, а также на время, в течение которого она развивает свое давление, я буду называть абсолютной мощью[59] или, так как произведение скорости на время прямо пропорционально просто пройденному пути, то абсолютную мощь можно будет также определить с помощью движущей силы, умноженной на пробегаемое ею расстояние. Это произведение я называю абсолютной мощью в силу того, что только с ее помощью следует оценивать труды работников, понесенные ими на поднятие вод, что я вскоре докажу на правилах, наблюденных мною по данному вопросу. В то же время мне представлялось, что гидравлические машины могут быть с удобством сведены к двум видам, из которых один выбрасывает воды с натиском, а другой как бы переносит их спокойно с одного места на другое. Я рассмотрю каждый из этих видов по порядку, а в заключение прибавлю кое-что о различных движущих силах.

О машинах, выбрасывающих воды вверх с натиском

Правило 1

§ 3. Труды работников, приставленных к гидравлическим машинам для поднятия вод, следует оценивать по *абсолютной мощи*, т. е. по *движущей силе* или давлению, которое они развивают, по времени и по скорости точки, к которой прилагается *движущая сила*.

Доказательство

(α) О *движущей силе* вопрос очевиден, ибо при всех прочих равных условиях труды, конечно, пропорциональны числу работников или *движущей силе*. (β) В отношении времени вопрос оказывается не менее ясным из рассмотрения всех обстоятельств, которые получаются при удвоении времени. (γ) Наконец, что касается скорости, то это положение следует выводить из того, что, удвоишь ли ты *движущую силу* или ее скорость, получится совершенно одинаковый эффект, а именно в том и другом случае удвоенный. Представь себе, что груз P своим падением выбрасывает воду через отверстие F на высоту FG; затем при оставшихся неизменными прочих условиях допусти, что отверстие F стало в 2 раза большим, и тогда ты увидишь, что за одно и то же время, на одну и ту же высоту будет выброшено удвоенное количество воды одной и той же *движущей силой* P, но вдвое быстрее падающей. Равным образом количество воды, при неизменных прочих условиях, удвоится, если ты увеличишь вдвое и отверстие F, и сечение AB, и вес, или *движущую силу* P; но скорость этой удвоенной силы остается тогда неизменной. Таким образом, при том и другом способе эффект удваивается, что и требовалось доказать.

Пояснение

§ 4. Предыдущее предложение следует истолковывать не в физиологическом смысле, а с точки зрения результата. С точки зрения результата я расцениваю не выше и не ниже работу

того человека, который с одной и той же скоростью развивает удвоенное усилие, чем того человека, который при одном и том же усилии удваивает скорость, так как оба они дают один и тот же результат; но тем не менее может случиться, что работа одного из них, хотя бы и не менее сильного, чем другой, окажется гораздо большей в физиологическом смысле. Если кто-нибудь с усилием в 20 фунтов проходит в течение каждой минуты расстояние в 200 футов, то он легко удвоит усилие, но с гораздо большим трудом сможет удвоить скорость. Отсюда следует, что при каждом виде машин надлежит прежде всего рассмотреть, каким образом их устроить, чтобы за одно и то же время при минимальном утомлении людей произведение их усилия на скорость всех людей было максимальным. Отсюда станет также ясно, какую длину следует присвоить рычагам в воротах, какой радиус следует избрать при колесах или топтальных кругах, какую длину следует придать веслам, а также в других машинах.

Применим наше замечание к пользованию очень употребительной машины — к топтальным кругам [60]. Важность нашего замечания станет ясной из рассмотрения следующего опыта.

Представим себе на фиг. 46 вертикальную высоту во много миль, на которую человек должен подняться за заданное время; время же мы возьмем в 10 час., так как таковым обычно бывает период суточных работ; затем представим себе множество путей AC, AD и т. д., различно наклоненных к горизонтальной линии BD. При этих условиях для нас понятно, что путник будет продвигаться вперед тем быстрее, чем менее наклонный путь он изберет, чтоб за то же время достичь вершины горы A, и ясно, что будет существовать некоторый путь, например AC, по которому он пройдет с наименьшим утомлением, так как никто не в состоянии подняться по вертикальной плоскости, а равно не в состоянии за заданное время пройти бесконечно большой путь. Мы примем, что этот путь наименьшего утомления составляет с горизонтальной линией угол ACB, равный 30° [61].

Если это так, то топтальный круг надлежит устроить таким образом, чтобы тяжесть преодолевалась с желаемой скоростью,

когда топтальщик постоянно отстоит на 30° от нижней точки круга.

Исходя из того же начала, надлежит производить и выбор между различного рода машинами. Так, например, если при воротах работающий с рычагом прилагает силу, или горизонтальное давление, которое составляет $^1/_4$ часть его собственного веса, и этим усилием в течение каждой минуты проходит путь в 200 футов, то, как я полагаю, он будет уставать почти в такой же мере, как если бы он с той же скоростью нажимал на топтальное колесо под углом в 30°; но вместе с тем топтальщик этим путем поднял бы на ту же высоту за это же время вдвое больший вес, так как при прочих равных условиях он развивает в 2 раза большее давление.

Правило 2

§ 5. Я утверждаю, что при наличии одной и той же абсолютной мощи все машины, которые не испытывают никаких трений и которые не создают никаких движений, бесполезных для поставленной цели, дают один и тот же эффект и, стало быть, ни одной из них не следует отдавать предпочтения перед другой.

Доказательство

Из механики известно, что любым образом устроенную машину можно свести к простому рычагу. Таким образом, всякое гидравлическое устройство можно представить с помощью изображенного на фиг. 47 простого насоса, снабженного рычагом; а именно, в этом насосе поршень перемещается при помощи рычага MN, движущегося около точки M, и таким образом вода выбрасывается через отверстие F. А если представить себе, что движущая сила P приложена к рычагу в N, то, как мы знаем из предшествующего предложения, абсолютная мощь не может получить никакого приращения при увеличении или уменьшении длины рычага MN; и, конечно, какова бы ни была эта длина, может случиться, что движущая сила, перемещающаяся с одной и той же и неизменяющейся скоростью, будет выбрасывать одно и то же

количество воды с одним и тем же натиском, если только сечение насоса AB находится в постоянном отношении к длине рычага MN. Из последнего ясно, что все машины при одной и той же абсолютной мощи дают одинаковый результат, если только мы мысленно отвлечемся от трений и от давлений, бесполезных для поставленной цели.

Пояснение

§ 6. Есть немало людей, полагающих, что можно придумать машину, с помощью которой можно с минимальным трудом поднять максимальное количество воды на любую высоту, и ломают себе голову над изобретением колес, рычагов, подвесных грузов. Но они напрасно трудятся, и не следует слушать подобного рода хвастунов, когда им кажется, что они сделали какое-то большое открытие. Наилучшей машиной, если мы будем принимать во внимание только ее эффект, является та машина, которая испытывает меньше всего трений и не создает никаких бесполезных движений. Ниже мы покажем, каким образом можно избежать того и другого.

Правило 3

§ 7. В насосах, вроде изображенных на фиг. 45 и 47, в которых внутренняя поверхность воды AB находится приблизительно на той же высоте, что и отверстие F, абсолютные мощи для одних и тех же времен находятся между собой в тройном отношении скоростей выбрасываемых вод.

Доказательство

Движущие силы находятся между собой в двойном отношении скоростей, с какими воды выходят из отверстия F, а скорости движущих сил следуют самому отношению скоростей выбрасываемых вод. Но для одних и тех же времен абсолютные мощи относятся между собой как движущие силы, умноженные на свои скорости; таким образом, предложение очевидно.

Пояснение

§ 8. Из этого правила следует, что если существует намерение поднять через отверстие F воду на высоту FG, то большая часть абсолютной мощи пропадает без пользы, когда воды вырываются с бо̀льшим натиском, чем это соответствует высоте FG. Действительно, если заставить воды выходить с удвоенной скоростью, то потребуется в 8 раз большая абсолютная мощь, и при всем том с точки зрения поставленной цели этот эффект придется считать не более чем удвоенным, ибо за одно и то же время поднимается удвоенное количество вод; этот последний эффект мог бы быть получен за счет уменьшенной в 4 раза абсолютной мощи, если выжимать воды с простой скоростью через вдвое большее отверстие. Таким образом, на этом основании можно утверждать, что $^3/_4$ упомянутой (абсолютной) мощи затрачивается без пользы. Источник этого ущерба был мною указан в § 5, и им является возникающее при этом бесполезное для поставленной цели движение; а именно, все то движение, которое остается в водах после того, как они в нашем случае достигли высоты G, следует признать излишним.

Правило 4

§ 9. Когда воды выбрасываются через трубу DF (фиг. 48) и обладают в отверстии F скоростью, соответствующей вертикальной высоте GF, то абсолютная мощь, затрачиваемая за одно и то же время, пропорциональна скорости воды в F, умноженной на высоту G над AB.

Доказательство

Действительно, движущая сила P пропорциональна упомянутой высоте, а скорость этой силы тождественна со скоростью воды в F.

Пояснение

§ 10. Абсолютные мощи увеличиваются больше, чем скорости вытекающих вод, т. е. больше, чем их количества, выбрасываемые за одинаковое время. Тем не менее различие

этих отношений оказывается почти неощутимым, когда высота FG очень мала по сравнению с высотой трубы FD. Так, например, пусть FG равно $\frac{1}{4}FD$ (если пренебречь высотой BD); но пусть затем воды будут выбрасываться с удвоенной скоростью, так что тогда получится $FD = FG$; таким образом, абсолютные мощи будут относиться друг к другу, как $1 \times \frac{5}{4}$ к 2×2, или как 5 к 16; таким образом, для выбрасывания удвоенного количества воды потребуется более чем утроенная абсолютная мощь. Но если FG сначала принять равным $\frac{1}{100}FD$, а затем снова допустить, что воды выталкиваются с удвоенной скоростью, то в этом случае абсолютные мощи будут относиться друг к другу, как 1×101 к 2×104, или как 101 к 208, каковое отношение не на много разнится от половины. Отсюда следует, что чем с меньшей скоростью воды засасываются, тем с большей пользой расходуется абсолютная мощь и что она только тогда почти полностью затрачивается с пользой, когда воды вытекают из отверстия F с почти неощутимой скоростью. Размер же отверстия может компенсировать малую величину скорости, чтобы за данное время можно было засосать значительное количество вод. Расточение же абсолютной мощи определится следующим образом.

Правило 5

§ 11. Пусть будет решено с помощью насоса $ABDF$, снабженного в почве приемником и расположенного в воде, перегонять воду из более низкого места AD в более высокое F и пусть средняя скорость воды, вытекающей из F, соответствует высоте FG; тогда расточение абсолютной мощи будет относиться ко всей этой силе, как FG относится к высоте G над AB.

Доказательство

Представим себе, что отверстие F сильно увеличивается, причем в таком же отношении уменьшается скорость вод, вытекающих в F; тогда количество воды, вытекающей за заданное время, не изменится,

если скорость движущей силы останется неизменной, и потому получится тот же эффект. Но если скорость уменьшится настолько, что соответствующая ей высота окажется неощутимой, то движущая сила выразится с помощью высоты F над AB, тогда как раньше движущая сила была равна высоте G над AB; а так как и в том и в другом случае скорость движущей силы одинакова, то абсолютные мощи для тех же времен будут относиться между собой, как высота G к высоте F над общей линией AB. Таким образом, разность высот G и F выразит расточение, между тем как вся высота G над AB представляет полную абсолютную мощь.

§ 12. Это заключение имеет силу для всякого вида машин. Во всех случаях, когда воды, доставляемые в место, куда они должны быть подняты, обладают значительной скоростью, всегда имеется большое расточение абсолютной мощи. Например, если допустить, что высота подъема равна A, высота, соответствующая скорости вод в том месте, где они выливаются, равна B, а вся абсолютная сила равна P, то теряется $\frac{B}{A+B} \times P$.

Можно также отметить, что если необходимо перелить воды через какую-нибудь высоту, вершина которой находится в F, с помощью пристроенного к трубе насоса, то трубу DF следует, насколько это возможно, продолжить вниз, а не обрывать ее в F, как это видно на фиг. 49. Ведь когда, например, точка F расположена вдвое выше, чем край трубы G, то требуется вдвое большая абсолютная мощь для переливания вод через трубу, оборванную в F, чем через трубу, продолженную до G, если в том и в другом случае они вытекают с очень малой скоростью, т. е. с такой скоростью, у которой производящая высота мала по сравнению с высотами FD или GD.

Правило 6

§ 13. Когда в рассмотренных до сих пор насосах поршни AB не вполне соответствуют стенкам машин, то остается зазор, и отсюда возникает иной вид расточения абсолютных

мощей, который в насосах, где можно пренебречь высотой отверстия над поршнем, определяется следующим образом. Как совокупность вытечного отверстия и вышеуказанного зазора относится к этому же зазору, так и затрачиваемая абсолютная мощь относится к той части ее, которая является бесполезной, т. е. к ее расточению.

Доказательство

Действительно, воды одинаково вытесняются через отверстие и через зазор и текут с одинаковой скоростью. При этом полностью теряется та абсолютная мощь, которая гонит воды через зазор, а она относится ко всей абсолютной мощи, как зазор относится к сумме отверстия и зазора.

Пояснение

§ 14. Следует, конечно, пользоваться поршнями хорошо устроенными и отшлифованными; необходимо также, чтобы полость насоса была вполне цилиндрической, а равным образом, чтобы его стенки были отшлифованы. Я, однако, не думаю, что было бы в интересах дела, если поршни заполняли бы полости с предельной точностью, так как в этом случае возникает, быть может, большее расточение сил вследствие трений, чем когда кругом оставляется очень маленький зазор. Ведь если этот зазор составляет, например, сотую часть вытечного отверстия, то едва ли уже будет место для трений, при этом будет потеряно не более $^1/_{100}$ абсолютной мощи, а от трения поршня, в точности заполняющего полость насоса, получится, быть может, большее расточение. Следовательно, с этой точки зрения нам незачем слишком тщательно избегать прохождения воды через зазор около поршня. Но это замечание не относится к тем машинам, в которых воды втягиваются в насос обратным ходом поршня; в данном случае совершенно необходим надлежащий и полный размер поршня.

Правило 7

§ 15. В тех машинах, которые имеют несколько отверстий, пропускающих воды из одной полости в другую, происходит некоторая потеря абсолютной мощи, причиной чего, как мы об этом говорили в предыдущей части, является то обстоятельство, что теряется потенциальный подъем отдельных частиц, перетекающих через общее отверстие из одной полости в другую.

Чем большее количество этого рода отверстий имеется и чем они меньше по своему размеру, тем большее получается расточение абсолютной мощи, что обычно имеет большое значение, и притом, быть может, вопреки общепринятому мнению, в тех машинах, которые Витрувий [62] по имени их изобретателя называет Ктезибиевыми [63]. Я говорю в данном случае об отверстиях, расположенных таким образом, что вся вытекающая вода должна через них пройти. Этот вид расточения может быть теперь определен путем такого расчета.

Пусть сечение последнего отверстия, пропускающего воды в воздух, равно n, а сечения остальных отверстий, через которые воды проходят внутри машины, пусть будут обозначены буквами α, β, γ и т. д.; тогда, если допустить, что повсюду имеется одна и та же движущая сила, то высота, соответствующая скорости вытекающей воды, будет относиться к аналогичной высоте при отсутствии всякого сопротивления со стороны внутренних отверстий, как 1 к $1+\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}+\ldots$ (согласно § 2 части восьмой); отсюда следует, что если эти высоты сделать равными между собой, то движущие силы будут относиться друг к другу, как $1+\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}+\ldots$ к 1, а так как и там и здесь скорости движущих сил одинаковы, то в таком же отношении при тех же временах будут находиться между собой и абсолютные мощи. Следовательно, избыточной ее частью является $\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}+\ldots$; отсюда расточение абсолютной

мощи относится ко всей этой мощи, как

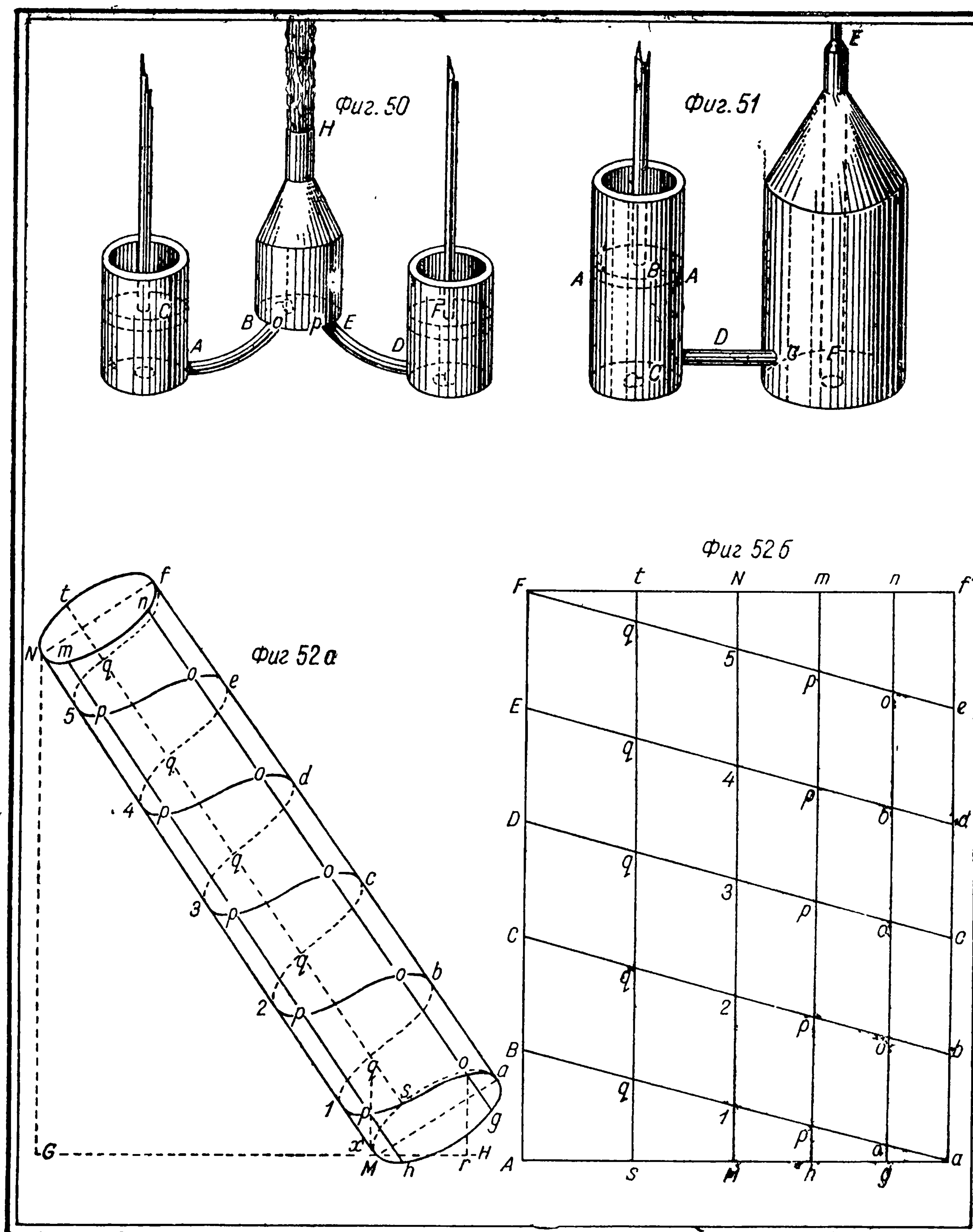
$$\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}+\ldots \text{ к } 1+\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}+\ldots$$

Пояснение

§ 16. Во всех случаях, когда идея машины требует отверстий, через которые воды должны перетекать из одного сосуда в другой (что имеет место при всех видах насосов как всасывающих, так и нагнетательных), следует эти отверстия, поскольку позволяют прочие обстоятельства, делать возможно более широкими, дабы размер вытечного отверстия был очень мал по сравнению с этими внутренними отверстиями. А для того чтобы применение этого правила было более ясным, мы рассмотрим примеры других, не менее распространенных машин. [64]

Пример 1

Пусть предложена (представленная на фиг. 50) машина, в которой попеременно нажимают на поршни C и F и вгоняют воды через трубы AB и DE в сосуд BEH, так что этим путем создается непрерывный бросок через отверстие H. Так как в данном случае поршни действуют попеременно, то мы будем считать, что действует как будто только какой-нибудь один из этих поршней, но постоянно. А тогда следует принять во внимание вытечное отверстие H размера n и одно из отверстий o, p, каждое из которых имеет размер α. Тогда расточение абсолютной мощи будет равно $\frac{n^2}{\alpha^2}$, если принять всю мощь равной $1+\frac{n^2}{\alpha^2}$, каковые величины относятся между собой, как n^2 к $n^2+\alpha^2$. Это расточение должно быть, конечно, значительным, если можно верить изображениям этих машин, в которых отверстия o и p зачастую меньше вытечного отверстия H; если бы это было так, то терялось бы больше половины абсолютной мощи. Трубы AB и DE следует на всем их протяжении, насколько это возможно,


Фиг. 50
Фиг. 51
Фиг 52 а
Фиг 52 б

делать пошире, дабы эта машина лишь немного теряла в своих качествах.

Между прочим, эта машина была придумана для того, чтобы получился постоянный бросок через H. Но так как нельзя обойтись без того, чтобы прошел какой-нибудь промежуток времени между последним моментом подъема поршня и началом последующего его снижения, то бросок не может быть совершенно постоянным и одинаковым. Лучшее средство для устранения этого неудобства предложил автор той машины, которую упомянул г-н Перро [65] в «Комментариях к Витрувию» (изд. 2-е, Париж, стр. 318) и которая, по его словам, сохраняется в королевской Парижской библиотеке. Эта машина послужит нам в качестве второго примера. Изображение ее, а также описание я возьму у Перро.

Пример

Согласно сообщению вышеупомянутого Перро «имеется машина, в которой из сосуда A (фиг. 51) вода с помощью поршня B нагнетается в резервуар FE, из которого, если только в нем уже содержится некоторое количество воды, воздух выйти не может, так как выходная труба EF спускается почти до дна; в самом деле получается так, что вода, перегнанная из сосуда A через трубу D, занимая нижнюю часть резервуара, запирает отверстие трубы F и препятствует прохождению воздуха. Таким образом, когда поршень вгоняет новые воды в сосуд, занятый частью воздухом, частью водою, то эти вновь поступившие воды проявляют силу по отношению к обеим этим жидкостям, и так как вода не может выйти по трубе EF с той же скоростью, с какой она поступает из насоса через трубку D, ибо, по указанию Перро, отверстие трубы EF значительно меньше отверстия трубы D, то вода, накопившаяся в резервуаре, сжимает воздух и, будучи в свою очередь сжата последним, выходит по трубе EF даже в то время, когда поршень поднимается».

В этой машине теряется большая часть абсолютной мощи вследствие прохождения воды через трубку D, и это расточение

тем больше, чем тоньше указанная трубка. Поэтому ее надо делать широкой, или даже следует устраивать несколько трубок, пропускающих воды. Это замечание имеет особенно большое значение в настоящем случае, так как от узости трубки D здесь происходит гораздо большее расточение, чем в других машинах.

Действительно, если принять сечение этой трубки таким же, каково сечение отверстия E, и сверх того допустить, что поршень движется вниз и вверх за одинаковые промежутки времени, то теряется уже не только половина абсолютной силы, как обычно, а становится просто бесполезными $^4/_5$ ее части. Но так как в этой машине имеется много такого, что требует особого исчисления, представляется уместным рассмотреть ее отдельно.

Отступление, содержащее в себе некоторые размышления о гидравлической машине, представленной на фиг. 51

(α) Водяной бросок через E не может быть совершенно равномерным в течение всего колебания поршня; ибо пока поршень поднимается, новые воды не поступают; таким образом, уменьшается количество воды, содержащейся в резервуаре GE, а лежащий над нею воздух расширяется, и, наконец, упругость последнего уменьшается; поэтому и вода вырывается со все меньшей скоростью до тех пор, пока она снова не ускоряется благодаря нажатию поршня.

Но если принять, что пространство, занимаемое воздухом в резервуаре, гораздо больше пространства, занимаемого водой, выбрасываемой в течение одного подъема поршня, то эта неравномерность почти полностью устраняется, если допустить, что поршень колеблется однообразно и что он уже начал колебаться задолго до этого; последнее допущение необходимо в силу того, что первое колебание очень сильно отличается от последующих. Поэтому для краткости мы удовлетворим всем этим допущениям,

т. е. мы допустим, что повсюду имеется так называемое установившееся состояние.

(β) Так как при первых колебаниях поршня скорость воды, вытекающей в E, постепенно увеличивается, то скоро получается так, что водяной бросок достигает почти полной скорости. Если допустить такое состояние дела, то ясно, что снижение поршня вгоняет в резервуар столько воды, сколько из него выбрасывается в течение целого колебания поршня.

Но при первых колебаниях вгоняется воды больше, чем выбрасывается, и это происходит не потому, как это полагал г-н Перро, что отверстие в E меньше другого отверстия в G (ибо то же самое имело бы место, если бы первое было даже больше второго), а в силу того, что действующая причина не может сразу проявить всего своего эффекта по выбрасыванию вод.

(γ). Недостаточно разобравшимся в этом деле покажется, быть может, что если допустить, что все находится уже в состоянии постоянства и что не имеется никаких посторонних помех, то вода будет выходить через отверстие E с такой скоростью, с какой она могла бы подняться на высоту водяного столба, находящегося в равновесии с давлением поршня. И, конечно, это было бы именно так, если бы давление поршня происходило без перерыва и если бы в воде не было потери потенциального подъема. Но так как и в том и другом отношении дело обстоит иначе, то не может не возникнуть иная оценка скорости водяного броска. Отсюда всякий ясно видит, что следует принять во внимание отношение тех времен, в течение которых поршень движется вперед и оттягивается назад, а также отношение сечений в трубке D и в отверстии E.

(δ) Итак, допустим, что время, в течение которого поршень идет вперед, равно θ, время одного полного колебания равно t, сечение отверстия E равно μ, а трубки D равно m; затем, сравнивая силу, проталкивающую вперед поршень, с находящимся наверху водяным столбом, мы положим, что высота этого столба равна a, а высота, соответствующая скорости выбрасываемой воды, равна x.

После того как все это подготовлено для вычисления, представится возможность определить двумя способами отношение, какое будет иметь место между скоростями вод в отверстии E и в трубке D, и отсюда установить значение неизвестной x. Действительно, во-первых, ясно, что за время θ (т. е. за время, за которое поршень продвигается вперед) через трубку D протекаст столько воды, сколько за время t (за которое поршень идет вперед и назад) протекает через E. Следовательно, скорость в D относится к скорости в E, как $\frac{1}{m\theta}$ к $\frac{1}{\mu t}$; а так как эта последняя скорость равна $\sqrt{x}$, то другая равна $\frac{\mu t}{m\theta}\sqrt{x}$. Во-вторых, так как скорость вытекающей воды вызывается давлением воздуха в резервуаре, то отсюда следует, что это давление эквивалентно весу водяного столба высоты x. Но если из давления поршня вычесть давление воздуха, то получится давление, создающее скорость воды в D. Отсюда, так как разность этих давлений выражается через $a - x$, то скорость воды в D будет представлена через $\sqrt{(a-x)}$. Таким образом, теперь скорость воды в D относится к скорости воды в отверстии E, как $\sqrt{(a-x)}$ к $\sqrt{x}$. Если сочетать отношения, найденные тем и другим способом, то получается

$$\sqrt{(a-x)} : \sqrt{x} = \frac{1}{m\theta} : \frac{1}{mt},$$

или

$$x = \frac{m^2\theta^2}{m^2\theta^2 + \mu^2 t^2} \times a.$$

Из этого уравнения ясно, что высота броска отстает от высоты давящего столба a по двум причинам; она отстает больше, когда поршень быстрее продвигается вперед и медленнее поднимается, а затем также, когда отверстие E увеличивается по своему размеру по сравнению с трубкой D. Так, например, если размер этого отверстия равен сечению трубки D и если поршень продвигается вперед и назад с одинаковой скоростью, то тогда по-

лучается $x=\frac{1}{5}a$, так что вытекающая струя поднимается лишь на $^1/_5$ часть высоты.

(ε) Теперь расточение абсолютной мощи может быть определено следующим образом, если сначала допустить, что на подъем поршня не затрачивается никакой работы. Пусть скорость, с которой поршень продвигается вперед, равна v; тогда абсолютная мощь, затрачиваемая за время одного полного колебания, равна $av\theta$ (согласно § 3); но так как эффект заключается в том, что вытекание через E происходит в течение времени t, а вода поднимается на высоту $\frac{m^2\theta^2}{m^2\theta^2+\mu^2t^2}\times a$, то это могло бы быть выполнено простым насосом, изображенным на фиг. 45, если бы в качестве давящей силы в нем был принят водяной цилиндр высотой в $\frac{m^2\theta^2}{m^2\theta^2+\mu^2t^2}\times a$, а сила эта действовала бы в течение времени t со скоростью $\frac{\theta}{t}v$. Отсюда, абсолютная мощь в этой простой машине, которую она совершенно не теряет, оказалась бы равной

$$\frac{m^2\theta^2}{m^2\theta^2+\mu^2t^2}\times a\times\frac{\theta}{t}v\times t=\frac{m^2\theta^2}{m^2\theta^2+\mu^2t^2}\times av\theta.$$

Таким образом, вся абсолютная мощь относится к той части ее, которая бесполезно теряется, как $av\theta$ к $av\theta-\frac{m^2\theta^2}{m^2\theta^2+\mu^2t^2}\times\times av\theta$, или как $m^2\theta^2+\mu^2t^2$ к μ^2t^2. Стало быть, если всю абсолютную мощь обозначить через P, то ее расточение будет равно $\frac{\mu^2t^2}{m^2\theta^2+\mu^2t^2}\times P$.

Следовательно, в этом насосе, по сравнению с другими насосами, необходимо, чтобы или трубка по своему сечению в полной мере превышала отверстие E, или чтобы была устроена многосложная трубка. Ибо если имеется единственная трубка, причем она имеет сечение, равное отверстию E, и если в то же время допустить, что поршень движется вперед и назад с одинаковой скоростью, то получается расточение в $^4/_5$ всей абсолютной мощи;

а если она даже будет в 2 раза больше, то все-таки теряется половина абсолютной мощи.

(ζ) Наконец, ясно, что стенки резервуара GE выдерживают меньшее давление, чем стенки сосуда AA, так как эти давления относятся друг к другу, как x к a, т. е. как $m^2\theta^2 + \mu^2 t^2$ к $m^2\theta^2$; на основании этого отношения мастера будут судить о крепости стенок, какая требуется для того и другого сосуда.

Правило 8

§ 17. Когда поршень в насосах подымается и вода втекает в сосуд не только под влиянием собственного веса, но в очень большой части, будучи притянута туда поршнем, то вся абсолютная мощь, затраченная на это притяжение, входит случайно, ибо насос, расположенный, как это делается, под водами, наполнился бы сам собой, если бы для этого заполнения было предоставлено достаточное время. Стало быть, это притяжение не находится в такой связи с выбрасыванием вод с определенной скоростью, чтобы его нельзя было полностью избежать, в силу чего затрачиваемую на это работу я считаю бесполезной.

Но так как приток воды происходит частично благодаря собственному ее весу, а частично благодаря подъему поршня, то расточение абсолютной мощи не может быть определено на основании эффекта. Лучше следует построить вычисление таким образом, что, положив силу, поднимающую поршень в известном положении, равной π, скорость поршня равной v и малый промежуток времени, соответствующий величинам π и v, равной dt, назвать всю абсолютную мощь, затраченную на подъем поршня, равной $\int \pi v dt$, или $\int \pi dx$, если под dx понимать элемент пути, пройденный за малый промежуток времени dt. Отсюда следует, что если усилие, с которым поршень поднимается, является постоянным по своей величине, как это примерно и бывает, то абсолютная мощь равна движущей силе, умноженной на пройденный путь. А так как подобное же рассуждение имеет силу и для

снижения поршня, и так как в то же время поршень настолько же поднимается, насколько он опускается, то отсюда ясно, что абсолютные мощи, которые попеременно затрачиваются на притяжение вод и на их выталкивание, относятся друг к другу примерно как соответствующие движущие силы. Отсюда получается расточение, которое равно $\frac{\pi}{\pi + p} \times P$, если, разумеется, положить, что поднимающая сила равна π, снижающая сила равна p и абсолютная мощь, затрачиваемая на подъем и на снижение поршня, равна P.

Расточение абсолютной мощи можно приблизительно определить и иным путем, исходя из того, что весь потенциальный подъем воды, затекающей в насос, следует считать произведенным без пользы. Но если поршень перемещается вперед и назад за одинаковые промежутки времени или с одной и той же скоростью, то скорость, с какой воды впускаются, будет относиться к скорости, с какой они выбрасываются, обратно отношению соответствующих отверстий, а потенциальные подъемы в том и в другом случае будут относиться друг к другу обратно квадратам соответствующих отверстий. Далее, если подъем и снижение поршня происходит за неодинаковые промежутки времени, то скорости обратны временам, а потенциальные подъемы обратны квадратам времен. Следовательно, потенциальный подъем, вызываемый притоком воды, находится к потенциальному подъему, который происходит вследствие затекания воды и который единственно является целью, в обратном квадратном отношении, составленном из отношения отверстия затекания к отверстию вытекания и отношения времени, за какое воды засасываются, ко времени, за какое они выбрасываются.

Пояснение

§ 18. Из обоих этих способов определения следует, что поршень надлежит поднимать медленно; в самом деле, тогда становится малой движущая сила, с точки зрения первого

метода, или становится большим время подъема, с точки зрения второго метода; вместе с тем, в течение каждого периода подъема поршня работники могут оправиться от того усилия, которое они сделали при предыдущем опускании. Далее, второй метод указывает, что отверстия, через которые засасываются воды, следует расширить и умножить. А это находится в соответствии и с первым методом, так как в этом случае само собой притекает почти достаточное количество воды и потому оказывается меньшая нужда в движущей силе[66].

Правило 9

§ 19. Наконец, никогда не приходится наблюдать, чтобы поднимающийся по вертикали водяной бросок достиг той высоты, какая соответствует первоначальной скорости воды, т. е. если струя жидкости начинает первоначально подниматься вертикально с такой скоростью, какую приобретает весовое тело при свободном падении с высоты a, то жидкость не может подняться на всю высоту a, хотя бы было устранено сопротивление воздуха или что-либо иное, что могло бы в этом случае замедлить движение.

В самом деле, сама природа вещей по необходимости вызывает некоторое ослабление, физическая причина которого заключается в следующем. Любая капелька, хотя и начинающая свой вертикальный подъем, не может, однако, не отклоняться постепенно к стенкам, и, наконец, когда она подходит к верхнему положению, то она увлекается горизонтальным движением, которое должно быть значительным, так как через верхнюю кайму или сечение водяной струи проходит вся вода, вытекшая из отверстия. Следовательно, если допустить, что каждой капельке в тот момент времени, когда она движется горизонтально, присуща скорость, какую приобретает весомое тело при свободном падении с высоты b, то станет ясно, что струя не может подняться больше, чем на высоту $a—b$. Стало быть, по этой причине получается расточение, которое относится ко всей абсолютной мощи, как b к a[67].

Пояснение

§ 20. Наблюдали, что среди вод, выбрасываемых с одинаковой скоростью из трубок, устроенных различным образом, одни воды поднимались выше других. Следовательно, в данном случае надлежит уделять внимание наиболее подходящей форме крайних трубок, выбрасывающих воды (des ajutages) [68].

По этому вопросу г-н Мариотт привел свои опыты в трактате «О движении вод».

Общее пояснение

§ 21. До сих пор мы исследовали те помехи, которые существуют в гидравлических машинах, выбрасывающих воды с натиском. Полагаю, что изложенные мною помехи являются важнейшими; сверх того, думаю, можно найти и другие, но гораздо меньшей важности. Почти повсюду мы дали вполне геометрические меры и одновременно показали, каким образом можно в очень большой степени ослабить эти помехи. Если кто-либо стремится к большему, полагая, что можно с минимальной работой, или (что, как я показал в § 3, сводится к тому же) с минимальной абсолютной мощью, добиться любого желаемого эффекта в подъеме вод, то он ошибается в своем мнении и трудится напрасно. Ибо если отвлечься от вышеуказанных помех, а также от других, какие только можно придумать, то наиболее совершенной машиной будет простой насос, показанный на фиг. 45, и если воды, выбрасываемые с его помощью вверх, собираются в G, то я утверждаю, что нельзя было с меньшей работой подобное же количество воды поднять на ту же высоту EG.

Далее, существует другой вид машин, отличающийся от рассмотренных до сих пор устройств в том отношении, что последние выбрасывают воды с натиском, а первые переносят их спокойно без значительного движения. Однако и при них крайняя степень совершенства, какая только может существовать, сводится к тому же. Большинство их подвержено многим помехам и притом очень важным. Поэтому нам придется теперь непосредственно заняться ими.

О гидравлических машинах, переносящих воды без значительного натиска из более низкого места в более высокое

Правило 10

§ 22. Если какой-либо груз поднимают на заданную вертикальную высоту a движущей силой, любым образом изменяющейся, но прямо направленной, и если на краю этой высоты тело не обладает никаким движением, то абсолютная мощь, затраченная на поднятие этого веса, всегда одинакова, а именно: она равна произведению веса поднятого тела на высоту подъема a.

Доказательство

Примем, что вес A поднят на высоту y и находится под действием прямо приложенной изменяющейся движущей силы P, обладая скоростью v. Очень малый промежуток времени, за который этот груз поднимается на элемент dy, равен $\frac{dy}{v}$. Элемент абсолютной мощи получится путем умножения движущей силы на скорость v и элемент времени $\frac{dy}{v}$. Таким образом, $\int Pdy$ даст всю абсолютную мощь, если после интегрирования положить $y = a$. Но во всяком движении приращение скорости dv равно воздействующей или движущей силе, которая здесь есть $\frac{P-A}{A}$, умноженной на малый промежуток времени, которым в настоящем случае является $\frac{dy}{v}$. Следовательно, мы имеем $dv = \left(\frac{P-A}{A}\right) \times \frac{dy}{v}$, или $Avdv = Pdy - Ady$, т. е. $\frac{1}{2} Av^2 = \int Pdy - Ay$, или $\int Pdy = \frac{1}{2} Av^2 + Ay$, где следует положить $y = a$ и $v = 0$ (согласно допущению), так что получается $\int Pdy = Aa$.

Ввиду того что, как мы видим, $\int Pdy$ выражает всю абсолютную мощь, затраченную на поднятие груза, эта мощь будет одинаковой, а именно, она будет равна произведению веса A на высоту a, как это принято в предположении, что и требовалось доказать.

Следствие

§ 23. Из нашего доказательства явствует, что абсолютная мощь бывает одинаковой во всех случаях, когда скорость на верхнем краю одинакова, т. е. когда высота, до которой тело может подняться со своей остаточной скоростью, а именно $\frac{1}{2}v^2$, является постоянной; а если эту высоту обозначить через b, то абсолютная мощь будет равна $A(a+b)$. Таким образом, теперь ясно, какая часть абсолютной мощи теряется, когда хотят поднять вес A на высоту a и когда он имеет на верхнем краю остаточную скорость, соответствующую высоте b; а именно — расточение силы относится ко всей силе, как b к $b+a$.

Пояснение 1

§ 24. Таким образом, следует остерегаться такого устройства машин, при котором воды доставлялись бы в назначенное место с быстрым движением. Но в большинстве машин этот вид расточения является обыкновенно незначительным.

Пояснение 2

§ 25. Все обстоит аналогичным образом и тогда, когда тело поднимают не вертикально, а по плоскости, изогнутой любым образом.

Или даже по какой-либо кривой; ибо во всех случаях вся абсолютная мощь равна $A(a+b)$, т. е. произведению веса на высоту подъема с прибавлением высоты, соответствующей остаточной скорости тела на верхнем краю, доказательство чего я пропускаю, так как оно очень мало отличается от предшествующего доказательства [69].

Общее пояснение

§ 26. Так как действия всех машин, устроенных любым образом, могут быть сведены к природе наклонной плоскости, то ясно, что все машины, если мы отвлечемся от трений и от

тех расточений абсолютной мощи, которые мы рассматривали до сих пор, дают один и тот же результат, ибо абсолютная мощь зависит просто от высоты, на какую надлежит поднять тело, и от его веса. Это является у абсолютной мощи общим с живой силой или с действительным подъемом и снижением. И это оказывается предельной степенью совершенства машин, которой нельзя переступить и которой нельзя даже достичь, ибо во всех случаях, если бы были устранены все трения и расточения, то с помощью одной и той же абсолютной мощи можно было бы на ту же высоту поднять больший вес. А для того чтобы можно было провести некоторое сопоставление дефектов машин, как тех, которые как бы выбрасывают воды на желательную высоту, так и тех, которые их переносят, я укажу теперь и наиболее значительные дефекты этих последних машин.

I. В большинстве этого рода машин трения являются столь большой помехой, что они одни поглощают наибольшую часть мощи, в особенности когда четырехугольные или овальные черпательные сосуды, соединенные между собой движущейся по кругу цепью, поднимают воды по каналу, к которому они приспособлены.

II. Большинство машин, и в особенности опять-таки те, на которые мы только что указали, обычно именуемые «четками» [70], устроены таким образом, что во время подъема воды часть ее постоянно уходит каплями вниз или прямо стекает в то место, из которого она была зачерпнута, или, по крайней мере, из более высокого места в более низкое, как в «четках». Если в последних черпательные сосуды хорошо подогнаны к каналу, то трение становится почти непреодолимым; если же они подогнаны слабее, то очень большое количество воды вытекает каплями через оставшиеся зазоры из верхних частей в нижние, так что, когда они доходят до самого верха, в них остается очень малая часть того количества воды, которое они получили на всем своем пути. Таким образом, уже в силу одной этой причины указанные машины представляются весьма

неприспособленными, в особенности, если приходится поднимать чистые воды, которые можно было бы откачивать насосами.

III. Обычно машины обладают и тем свойством, что они поднимают воду выше требуемой высоты; при этом теряется сила, которая соответствует избытку высоты, а когда воды приходится перебрасывать через насыпи, то очень трудно осуществить то, что было указано мною в § 12.

IV. Существуют и такие машины, которые не допускают прямого применения движущей силы; благодаря этой косвенности в свою очередь возникает некоторое расточение.

§ 27 [[71]]. Таковы те помехи, которые, как мне казалось, являются существенными, и я не знаю, можно ли их в такой мере устранить, в какой мы это показали относительно первого вида машин. Некоторые приемы уменьшения трения известны механикам. Машинам, забирающим воду черпательными сосудами и поднимающим ее, я отдал бы предпочтение перед «четками»; но черпательные сосуды, если только это возможно, следует устраивать таким образом, чтобы в нижнем положении они тотчас же наполнялись и чтобы они ничего не теряли раньше, чем дойдут до верхнего положения. Когда воду приходится переливать через более высокое место в более низкое, надлежит устраивать таким образом, чтобы натиск падающей воды продвигал приводимое во вращение колесо, хотя далеко не вся абсолютная мощь может быть, таким образом, затрачена с пользой, что в соответствии с нашим замечанием (§ 12) может быть сделано с насосом (фиг. 49). Если я правильно об этом сужу, то с основным началом действия лучше всего обстоит при топтании, так как люди очень привычны к этой работе; сюда относится то, что было указано мною в § 4 применительно к первому правилу об угле наклона, под которым путник может за заданное время с наименьшим утомлением достигнуть определенной вертикальной высоты. Я полагал бы, что человек среднего телосложения, здоровый и сильный, поднимающийся по дороге, наклоненной на 30°, может без труда проходить в тече-

ние каждого часа 3600 футов и, таким образом, поднять на вертикальную высоту 1800 футов вес своего тела, который я принимаю равным 144 фунтам, или 2 куб. футам воды. Таким образом, подобный человек может с помощью топтальной машины, приводимой в круговое движение и наиболее совершенной (в которой, значит, не происходит никакой потери абсолютной мощи), за каждый час поднять 2 куб. фута воды на вертикальную высоту 1800 футов, или, что то же, в каждую секунду поднимать 1 куб. фут на высоту 1 фута. Машины, дающие значительно меньший эффект, когда работники выполняют свою обязанность, очень мало заслуживают того, чтоб их рекомендовали. В то же время на опыте с насосом, произведенном в лаборатории знаменитого г-на генерала де Кулона (этот опыт изложен в конце настоящей части), я получил значительно меньший эффект; это укрепило меня в моем мнении, что при топтании рабочие действуют с наибольшим успехом. И я легко предвижу, что в очень сложных машинах получается гораздо меньший эффект, так как при них бесполезно затрачивается очень большая часть абсолютной мощи. Я приведу теперь в качестве замечательного примера вышесказанного весьма известную машину Марли, причем покажу, какое почти невероятное расточение абсолютной мощи происходит в результате всех вместе взятых помех. Вейдлер [[72]] издал трактат «О гидравлических машинах», в котором он дает полное описание машины Марли и сообщает, что все воды поднимают путем движения 14 колес, лопасти которых приводятся во вращение натиском Сены. Указанный натиск он принимает для всех колес равным весу 1 000 594 фунтов, и этот вес представляет собой то, что мы назвали движущей силой. Далее, из некоторых других сопутствующих обстоятельств я смог заключить, что лопасти продвигаются таким движением, при котором в каждую секунду проходится путь в $3\,^3/_4$ фута, и эту скорость следует принять в качестве скорости движущей силы. Затем он добавляет, что с помощью этой машины ежедневно поднимается 11 700 000 фунтов воды на высоту 500 футов. При наличии вышеуказанных предпосылок обратимся

к наиболее простой машине (фиг. 45), в которой, допустим, не происходит никакой потери абсолютной мощи, и посмотрим, какая в данном случае требуется для получения того же эффекта сила P, движущаяся точно так же со скоростью 3 $^3/_4$ фута. Высота FG будет составлять 500 футов, а так как за период в 24 часа через отверстие F должно выбрасываться 11 700 000 фунтов, т. е. 162 500 куб. футов, то размер этого отверстия надо будет положить равным 0.0108 кв. фута. Скорость воды в F такова, что в течение каждой секунды вода проходит 173 фута. Таким образом, эта скорость 46 раз содержит в себе скорость $3\,^3/_4$, которой, по предположению, должен обладать вес P, и во сколько же раз сечение насоса AB должно быть больше сечения отверстия F. Поэтому надо будет вообразить себе, что диаметр отверстия составляет 0.4968 кв. фута, из чего следует, что вес P будет равен весу водяного цилиндра над основанием AB, построенного до высоты 550 футов, или весу 248.4 куб. футов воды, т. е. весу в 17 885 фунтов, что составляет лишь $^1/_{56}$ той движущей силы, которая, как показал Вейдлер, применяется при той же скорости движения. Таким образом, в данном случае во всей машине получается расточение, которое равно $^{55}/_{56}$ всей абсолютной мощи.

После того как мы указанным образом исследовали природу гидравлических машин, поскольку это может быть сделано в общем виде, небесполезно будет более тщательно рассмотреть некий частный пример, и так как улитка Архимеда обладает многими прекрасными свойствами, которых, насколько я знаю, никто в достаточной мере не открыл, то я возьму ее в качестве примера и притом тем охотнее, что имеются многие, полагающие вопреки нашим правилам, что этой улитке присуща особая способность по подъему большого количества воды за короткое время и с помощью малой силы.

Однако те, которые так думают, ошибаются, ибо если совершенно не принимать во внимание случайных помех, то при одной и той же абсолютной мощи она дает то же, что и все остальные машины.

Особые размышления об улитке Архимеда

I. Существуют различные авторы, которые поучали, каким образом следует устраивать эту улитку; в итоге дело сводится к тому, что вокруг цилиндрической поверхности следует обвить какую-нибудь трубу или несколько труб и притом таким образом, чтобы труба имела по отношению к оси цилиндра повсюду одинаковый наклон, каковой вопреки необходимости Витрувий предписывает устраивать во всех улитках под полупрямым углом. Итак, прежде всего требуется провести на поверхности цилиндра спиральную линию, по которой следует направить трубу, что, по моему мнению, можно очень легко сделать на весьма гладкой поверхности (в особенности, если витки не должны находиться на небольшом расстоянии друг от друга), обвив вокруг нее несколько раз веревочку, ибо здесь натяжение само собой создает необходимую линию, так как спираль не может повсюду быть себе подобной или иметь постоянный наклон к оси цилиндра без того, чтобы дуга, проведенная между двумя точками, была наименьшей из всех дуг, ограниченных теми же пределами, каковым свойством, как известно, обладает натянутая веревочка; если же трения являются помехой, то нить можно натянуть на меньших промежутках. Однако нет основания для того, чтобы мы вдавались в подробности о таком деле, которое само по себе очень легко осуществимо многими способами.

Важнейший закон спирали заключается в том, что она повсюду одинаково наклонена к оси цилиндра; на выполнении этого закона основывается построение, которое я здесь изложу в интересах того, о чем речь будет дальше.

Представим себе прямой цилиндр $MafN$ (фиг. 52а), на поверхности которого следует начертить желаемую спираль $a1b2c3d$ и т. д., и вообразим, что эту поверхность развернули в плоскость, имеющую форму прямоугольного параллелограмма $AafF$ (фиг. 52б). Возьмем здесь с одной стороны AB, BC, CD, DE и EF и с другой стороны — ab, bc, cd, de и ef, которые все между собой равны. Соединим прямыми линиями точки B, C, D, E и F с точками

a, b, c, d и e. Если после этого плоскую поверхность снова свернуть в цилиндрическую, причем линии AF и af соединятся, а точки A и a, B и b и т. д. совпадут друг с другом, то в результате этого линии aB, bC, cD и т. д. образуют на цилиндрической поверхности сплошную линию, которая и будет представлять собой искомую спираль. Для того чтобы это лучше понять, я обозначил соответствующие точки на обоих рисунках одинаковыми буквами.

II. Пусть теперь нам предложен цилиндр $MafN$ (фиг. 52а), имеющий по линии только что описанной спирали трубу, диаметр которой мы будем представлять себе как бы бесконечно малым по сравнению с диаметром самого цилиндра. Тогда мы будем иметь улитку Архимеда. Если мы пожелаем ею воспользоваться для подъема вод из M в N, то надо будет цилиндр наклонить по направлению к горизонту и притом таким образом, чтобы угол aMH (образуемый диаметром основания Ma, расположенным в вертикальной плоскости, и горизонтальной прямой MH) был больше угла sao, образуемого касательными круга и спирали в общей точке a. Если затем вращать цилиндр вокруг его оси в направлении $aghMs$, то воды будут втекать в нижнее отверстие трубы, навитой на цилиндре, а вытекать—через верхнее отверстие.

III. Для того чтобы правильно понять природу этого подъема, нам следует рассмотреть три точки на любом витке спирали, а именно точки o, p и q, из которых первая, o, находится дальше всех от горизонта, другая, p, находится ближе всего к последнему, а q расположена на той же высоте, что и точка o, взятая на ближайшем нижнем витке. Через все точки o проведена прямая линия gn, через точки p — прямая линия hm и через точки q — прямая линия st. Положение этих линий будет определено ниже.

IV. Пусть радиус, относящийся к основанию цилиндра, равен 1 и пусть он принят в качестве полного синуса; синус угла $sao = m$, его же косинус равен M, синус угла $aMH = n$, а его косинус равен N, дуга $ag = X$, косинус этой дуги равен x; тогда

перпендикуляр, опущенный из o на горизонт, а именно or будет равен $\frac{mNX}{M}+n(1+x)$. Но так как or представляет собой наибольшую линию, то получается $\frac{mNdX}{M}+ndx=0$, а ввиду того, что из природы круга следует, что $dX=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, то будет

$$\frac{-mNdx}{M\sqrt{1-x^2}}+ndx=0;$$

следовательно,

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{mN}{Mn}.$$

Таким образом, синус искомого угла $ag=\frac{mN}{Mn}$ или косинус $x=\pm\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{Mn}$; верхний знак даст дугу ag, а нижний — дугу ah, определяющую нижние точки p.

Вышеуказанным образом мы определили как верхние точки o, так и нижние p, и ясно, что дуги Mh и ag между собой равны, а вместе с тем на основании иррациональной величины $\sqrt{n^2-m^2}$, определяющей значение буквы x, можно заключить о невозможности того, чтобы m было больше, чем n; в самом деле, в данном случае не имеется нижней точки, над которой вся спираль повсюду постоянно поднимается. При этих условиях улитка и не послужит для подъема вод. Отсюда становится ясным основание моего замечания во второй части настоящего отступления об обязательном превышении угла aMH над углом sao.

V. Допустим теперь, что где-нибудь в полости трубы имеется шар и что улитка закреплена в своем положении. Тогда шар отнюдь не будет оставаться в покое и появится в какой-нибудь точке p. Если же предположить, что улитку ничто не задерживает, то он будет падать и падением поворачивать улитку; а если сверх того представить себе, что улитка не имеет никакого веса и что движение шара происходит совершенно свободно при отсутствии каких-либо мешающих трений, то шар будет падать по прямой mh совершенно по тому же закону, как шар, спускающийся свободно по наклонной плоскости. Таким образом, ясно,

что для воспрепятствования опусканию шара и для закрепления положения улитки требуется сила. Мы допустим, что эта сила приложена в плоскости круга в точке f и перпендикулярно к радиусу, и постараемся определить отношение, в каком она находится к весу шара, покоящегося в какой-либо точке p.

Пусть вес шара равен p; так как действие шара направлено вертикально, то его следует разложить на два других взаимно перпендикулярных направления, из которых одно является общим с направлением оси улитки, а другое к нему перпендикулярно; первое из них, поскольку оно не играет никакой роли во вращательном движении улитки, следует отбросить и принять во внимание только второе направление. Это остаточное действие равно np; оно воздействует на подъем, который равен синусу дуги Mh или дуги ag, а этот синус (согласно разделу IV) равен $\frac{mN}{Mn}$. Таким образом, момент действия равен $\frac{mN}{Mn} \times np = \frac{mNp}{M}$. Если эту величину разделить на радиус основания, который представляет собой рычаг приложенной в f силы, приведенной в равновесие с действием шара, то получится, что искомая сила равна $\frac{mNp}{M}$. Таким образом, непосредственно из природы рычага можно вывести то, что другие обычно стараются вывести из постороннего начала. После всех этих необходимых предпосылок мы приступим теперь к рассмотрению применения этой машины для подъема вод.

Задача

VI. Определить, каково максимальное количество воды, которое улитка может выбросить при каком-либо обороте.

Решение

Рассмотрим целый виток alb; пусть то количество воды, которое он содержит в себе, когда он заполнен, равно q [73]. Но следует отметить, что виток не может быть целиком заполнен водой, ибо если бы труба была целиком заполнена, то воды вытекали бы через нижнее отверстие. Таким образом, любая ветвь, какой

является $a1b$, занята частью воздухом и частью водой; при этом один край воды будет в o, как в верхней точке, а другой — в q, т. е. в точке, расположенной на одном уровне с первой. Таким образом, частью, заполненной водой, является opq, и если мы допустим, что эта часть относится ко всей длине витка $a1b$, как g к h, то максимальное количество воды, которое должно быть выброшено при одном обороте, будет равно $\frac{gq}{h}$, что и требовалось определить.

Пояснение 1

VII. Как мы сказали, вода не может заполнить все протяжение трубы, поэтому следует остерегаться разделения воды, что легко может произойти, если все дно цилиндра погружать в воду, ибо при этих условиях пресекается возможность поступления воздуха через нижнее отверстие трубы. Не следует также допускать, чтобы над водой выступала слишком большая часть дна, ибо при этих условиях улитка не засасывает всей воды, которую при иных условиях она могла бы засосать при одном обороте. А если погружение не достигнет точки h, то улитка вообще ничего не будет засасывать. Подходящим будет погружение до точки q, так как в этом случае дуга витка opq, которая в состоянии удержать воду, становится максимальной. И хотя я никогда не проверял этого на опыте, а очень многие авторы, по-видимому, придерживаются на этот счет иного мнения, я тем не менее предпочитаю полагаться на свой расчет больше, чем на авторитет тех, которые не принимали во внимание этого погружения.

Итак, будет соблюдаться правило о погружении, а именно: дно будет погружаться до тех пор, пока хорда дуги, выступающей над водой, будет равна $\frac{2mN}{Mn}$, где буквы m, N, M и n обозначают то же, что и в разделе IV.

Пояснение 2

VIII. После легкого рассмотрения вопроса становится, конечно, ясно, что отношение между дугой витка opq и всем витком $a1b$, т. е. между g и q, будет тем большим, а стало быть, тем боль-

шее количество воды при прочих равных условиях будет выбрасываться при каждом обороте, чем меньше угол *sao* и чем больше угол *aMH* или чем меньше расстояние между двумя соседними витками и чем сильнее улитка наклонена по отношению к горизонту. Но это отношение не представляется возможным выразить алгебраическим путем; однако в каждом частном случае его можно получить путем легко осуществимого приближения.

Пример вышеприведенного правила я заимствую из той улитки, которую рекомендует применять и устраивать Витрувий. А именно он принимает угол *sao* равным полупрямому; таким образом, $m = M = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.70710$. Затем между NG и MG он установил отношение, равное отношению 3 к 4; отсюда получается, что угол GNM или $aMH = 53°8'$, а его синус $n = 0.80000$ и косинус $N = 0.60000$; следовательно (согласно разделу III), синус дуги ag, определяющей наиболее высокую точку o, будет равен $\frac{mN}{Mn} = \frac{3}{4}$, а самая дуга $ag = 48°35'$. Стало быть, в силу правила раздела VII, дуга на дне, выступающая над водой, должна составлять $97°10'$, а погружена будет дуга в $226°50'$.

Сверх того, чтобы определить отношение между дугой витка *opq* и всем витком *alb*, следует принять во внимание, что это есть то же отношение, какое существует между дугой круга *ghMs* и окружностью круга, как это ясно из фиг. 52a.

А дуга *ghMs* определяется следующим образом. Конечно, дуга *ghMs* равна дуге *aghMs* — дуге *ag*. Но мы видели в третьей части, что если из какой-нибудь точки спирали, как o и q, опустить перпендикуляры до горизонтальной прямой, проходящей через точку M, каковыми, например, являются *or* и *qx*, то этот перпендикуляр будет равен $\frac{mNX}{M} + n(1+x)$, или в нашем случае — $0.60\,000X + 0.80\,000(1+x)$, если через X обозначить дугу круга, соответствующую точке, взятой на спирали, а именно дугу *ag* или дугу *aghMs*, а через x — косинус той же дуги. Но дуга $ag = 48°35'$, а так как радиус выражается с помощью единицы, то дуга $ag = 0.84\,797$, а ее косинус равен 0.66153. Таким образом, в на-

шем случае получается $or = 0.50878 + 1.32922 = 1.83800$. Далее, так как точки o и q расположены на одной и той же высоте, а линии or и qx между собой равны, то ясно, что теперь вопрос сводится к тому, чтобы найти другую дугу $aghMs$, соответствующую точке q; если мы ее обозначим через X, а ее косинус — через x, то будет $0.60000X \pm 0.80000(1 + x) = or = 1.83800$ [74]. При этих условиях получается, что дуга $aghMs$ составляет приблизительно 175.5°, причем точка s приходится в области agM. А так как дуга ag оказалась равной 48°35′, то в конце концов дуга $ghMs$ составляет 126°55′, каковая величина относится к окружности круга приблизительно, как 10 к 29. Аналогичное отношение существует между дугой витка opq и всем витком.

Отсюда следует, что улитка, описанная Витрувием, при каждом обороте выбрасывает приблизительно $^{10}/_{29}$ того количества (воды), какое содержит в себе целый и сплошь заполненный виток, или чуть больше $^{1}/_{3}$ его.

Пояснение 3

IX. Следует, однако, отметить, что каково бы ни было количество воды, которое поступает снизу в трубку при любом обороте улитки и наверху из нее выливается, отсюда не получается никакого ни ущерба, ни выигрыша в абсолютной мощи, если не принимать во внимание трений, ибо при прочих равных условиях движущая сила пропорциональна вышеупомянутому количеству. Приходится считаться с тем, что трение всегда существует хотя бы благодаря собственному весу машины. В зависимости от обстоятельств засасываются большие или меньшие количества воды. Следует приложить старание к тому, чтобы указанное количество оказалось при прочих равных условиях максимальным. Этим я и займусь теперь несколько более подробно.

Пояснение 4

X. Выше я уже отметил, что отношение дуги $ghMs$ к окружности круга увеличивается с уменьшением углов sao и NMG. Таким образом, и тот и другой следовало бы устраивать очень малыми, если

бы этому не мешали другие неудобства, в особенности по отношению к углу NMG. Что касается угла sao, то его можно уменьшать почти произвольно, и отсюда не возникает никакого неудобства, за исключением того, что стенки обвитой трубы могут слишком близко сойтись друг с другом. С другой стороны, в результате уменьшения этого угла получается другой выигрыш, а именно, что тогда можно поставить машину более вертикально, а воду можно подавать выше, ибо угол aMH должен быть всегда больше угла sao. Вместе с тем в результате более вертикального положения улитки получается то, что вес самой машины вызывает меньше затруднений и ее легче поддерживать.

Продумав это вышеуказанным образом, я полагаю, что мог бы оказаться почти достаточным угол в 5°, образуемый трубой с основанием цилиндра [75]. Кардан взял тоже этот угол меньшим, чем Витрувий, и хотя вокруг одного и того же цилиндра можно обвить тем меньшее количество труб, чем более наклонно их располагают. Витрувий указал, что следует взять 8 труб, а Кардан только 3 трубы. Но в улитке Кардана трубы длиннее, так что с помощью длин восполняется то, что теряется на количестве труб. Что касается другого угла NMG, то заслуживает быть отмеченным, что воду можно поднять тем выше, чем большим устраивают этот угол, но, с другой стороны, при каждом обороте выбрасывается меньшее количество воды. Возможно, что правильной середины будут придерживаться те, которые будут устраивать этот угол в 60°.

XI. Произведем теперь расчет и для этой нашей улитки, устроенной по нормам предыдущего раздела, как мы это сделали в разделе VIII с улиткой, устроенной по указанию Витрувия. Так как согласно допущению угол sao составляет 5°, а угол $NMG = 60°$, то на основании раздела IV мы найдем, что дуга ag составляет 8°43′, а вертикальная прямая $or = 1.00574$, чему будет равна и другая вертикальная прямая qx, если присвоить дуге $aghMs$ 284° 57′. Если из последнего вычесть дугу ag, то останется дуга $ghMs$ в 276°14′, что соответствует дуге витка, способной содержать в себе воду. Таким образом, эта часть

относится ко всему витку, как 16 574 к 21 600, или как 8287 к 10 800, так что при каждом обороте может быть выброшено больше $^4/_5$ всей емкости целого витка, и с этой машиной получается эффект почти в $2\,^1/_3$ раза больший, чем с аналогичным устройством, изготовленным по мысли Витрувия. С этим же цилиндром воды поднимаются выше в отношении $\sqrt{3}$ к $\sqrt{2}$. Перехожу теперь как к движущей силе, так и к абсолютной мощи, которые затрачиваются на подъем вод.

Задача

XII. При заданном весе воды, содержащейся в витке, найти касательную силу в f, приведенную в равновесие с этим весом.

Решение

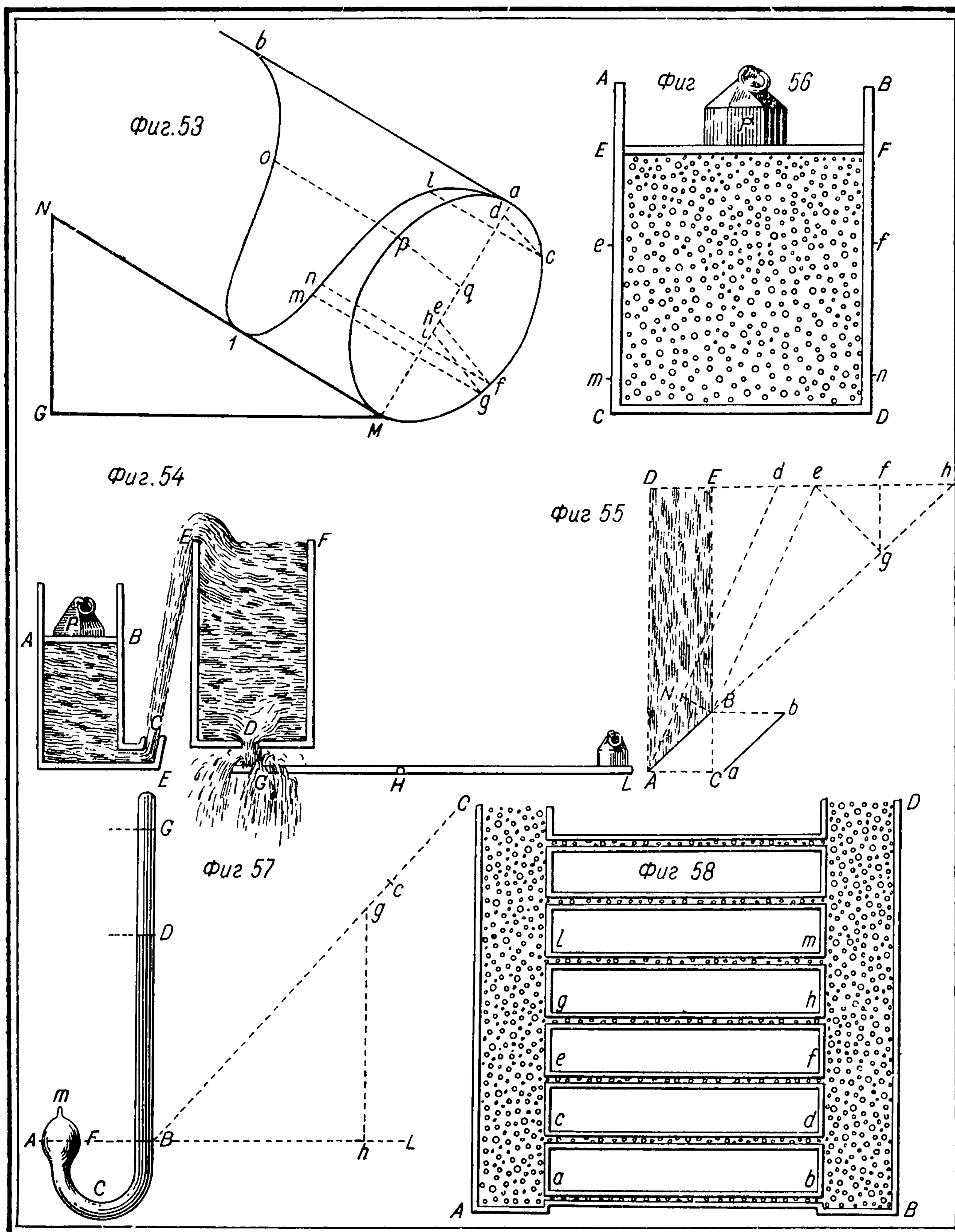
Мы видели, каким образом следует геометрически решать эту задачу по отношению к шару, покоящемуся в нижней точке p. Но в настоящем случае дело обстоит несколько иначе, так как вес воды распределен по большой дуге витка, а не сосредоточен в какой-либо заданной точке. Конечно, легко наперед предвидеть, что на основании непрямых доказательств из механики в том и в другом случае получаются одни и те же силы; тем не менее представляется уместным дать доказательство этого, выведенное из законов рычага, так как механики любят все выводить из него.

Рассмотрим виток alb, отдельно взятый из фиг. 52а и 52б, и во избежание смешения линий сохраним обозначения, примененные в разделе IV. Таким образом, на фиг. 53 угол NMG будет вновь представлять собой угол, образуемый цилиндром с горизонтом, синус которого равен N, а синус угла aMN равен n; alb представляет собой один обвод спирали; основанием цилиндра является круг $acMpa$; синус угла pal, как и раньше, равен m, а его косинус равен M; точки же l и o представляют собой края воды, покоящейся в спирали и находящейся на одной и той же высоте от горизонта; из этих точек проведены к окружности прямые lc и op, перпендикулярные к основанию. В той части улитки,

которая занята водой, взяты две бесконечно близкие друг к другу точки m и n и через них проведены прямые nf и mg, опять-таки перпендикулярные к основанию. Наконец, из точек c, f, g, p проведены перпендикулярные к диаметру aM прямые cd, fh, gi и pq; а центр основания принят в e и радиус его $ea=1$. Пусть дуга спирали llo, заполненная водой, равна c, и следовательно, соответствующая ей дуга круга cMp равна Mc; $al=e$; $ac=Me$; ad (т. е. синус дуги ac) равна f; $aq=g$; вес воды в $lso=p$; дуга $aln=x$; $nm=dx$; $acf=Mx$; $fg=Mdx$; $ah=y$; $hi=dy$; $hf=\sqrt{2y-y^2}$; вес капли в nm будет равен $\frac{pdx}{c}$; а если линию hf умножить на синус угла aMH и разделить на полный синус, то получится рычаг, с помощью которого частица nm пытается вращать улитку. Следовательно, этот рычаг равен $n\sqrt{2y-y^2}$, что, умноженное на вышеупомянутый вес капли $\frac{pdx}{c}$, дает момент $\frac{npdx}{c}\sqrt{2y-y^2}$. Но в силу природы круга будет $Mdx=\frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}}$; следовательно, если это значение подставить вместо dx, то тот же момент капли nm окажется равным $\frac{npdy}{Mc}$, интегралом чего, если вычесть надлежащую постоянную величину, является $\frac{np(y-f)}{Mc}$ и обозначает момент воды в дуге ln. Таким образом, отсюда момент всей воды в llo равен $\frac{np(g-f)}{Mc}$; если последнее разделить на рычаг силы, приложенной в f, т. е. на 1, то в результате искомая сила останется точно так же равна $\frac{np(g-f)}{Mc}$, что и требовалось найти.

Пояснение 1

XIII. Для того чтобы было ясно, что значение этой силы не отличается от того значения, которое мы нашли в разделе V для шара того же веса p, следует доказать равенство величин $\frac{np(g-f)}{Mc}$ и $\frac{mNp}{M}$, или величин $n(g-f)$ и mNc. Это равенство



Фиг. 53
Фиг 56
Фиг. 54
Фиг 55
Фиг 57
Фиг 58

можно вывести, исходя из того, что края воды l и o расположены на одинаковой высоте над горизонтом; ибо отсюда следует, как мы это доказали в разделе IV, что сумма дуги ac, умноженной на $\frac{mN}{M}$, и прямой Md, умноженной на n, равна сумме дуги $acMp$, равным образом умноженной на $\frac{mN}{M}$, и прямой Mq, умноженной на n. Таким образом, если применить обозначения предыдущего раздела, то получается

$$Me \times \frac{mN}{M} + (2-f) \times n = (Me + Mc) \times \frac{mN}{M} + (2-g) \times n,$$

или $n(g-f) = mNc$. Последнее равенство надо было доказать для того, чтобы доказать равенство сил, которые следует приложить в f, как для шара, так и для воды.

Пояснение 2

XIV. Так как сила $\frac{np(g-f)}{Mc}$ не отличается от $\frac{mNp}{M}$, а количество $\frac{mN}{M}$ остается неизменным, какое бы количество воды не засасывалось или выбрасывалось при одном обороте, то эта сила пропорциональна тому же количеству воды, которое выбрасывается при каждом обороте, или весу p. Легко также доказать, что если одно и то же количество вод поднимается одной и той же движущей силой с одной и той же скоростью на одну и ту же вертикальную высоту по простой плоскости, которую для этой цели надлежащим образом наклонили по отношению к горизонту, то получится, что и время подъема окажется одним и тем же.

Таким образом, при улитке Архимеда требуется та же абсолютная мощь, что и на наклонной плоскости, к которой могут быть сведены все машины, и улитка не имеет никакого преимущества перед остальными машинами, которые исследованы в теории. Возможно, что на практике она в меньшей мере подвержена тем неудобствам, которые были указаны в § 26. Я ни

в коем случае не высказываюсь против ее применения, но я не отдаю ей предпочтения перед Ктезибиевыми насосами.

§ 28. Из того, что было сказано до сих пор, понятно, в силу каких соображений следует отдавать предпочтение одной машине перед другой, какую степень совершенства допускают машины, на что главным образом следует обращать внимание при их устройстве и пользовании ими, какая часть абсолютной мощи теряется, и пр. Правда, мы рассматривали лишь такие машины, которые приводятся в движение так называемыми одушевленными силами; но легко явствует, что тем же законам подчиняются и те машины, которые должны приводиться в движение натиском вод, ветра или тяжестью вод и другими подобного же рода началами; ибо всегда движущая сила, умноженная на время и на скорость точки, в которой сила приложена, даст произведение количества воды на высоту, на которую это количество могло бы быть поднято за рассматриваемое время с помощью предложенной машины, если бы были устранены посторонние препятствия. Но я говорю о машинах, в которых не происходит никакой потери абсолютной мощи, ибо может случиться, что очень большая часть ее теряется, что было нами достаточно показано в вышеизложенном.

§ 29. Отсюда ясно, что вода, поднятая на некоторую высоту, в свою очередь может своим падением дать тот же эффект; этот эффект надлежит оценивать по количеству подлежащих подъему вод и по высоте подъема. Так, например, при помощи падения 8 куб. футов воды с высоты 1 фута можно снова поднять такое же количество кубических футов на такую же высоту, или 4 куб. фута воды на высоту 2 футов, или 1 куб. фут на высоту 8 футов, и т. д. по желанию. Пример такой машины, которая в состоянии поднять воду на любую высоту при очень малом падении вод, можно увидеть у г-на Перро в «Комментариях к Витрувию», кн. 10, гл. 12 (Comment. ad Vitruvium), каковую машину он приводит в качестве невероятного парадокса и изобретателем которой он называет итальянца Франкини [76], благодаря старанию и указаниям которого она была с успехом

устроена в саду королевской библиотеки. Основа этой машины заключается в следующем: связанные между собой цепью и вращающиеся по кругу черпательные сосуды забирают воды, переносят их в более низкое место и там выливают, в то время как другая группа черпательных сосудов засасывает воды и переносит их в гораздо более высокое место, однако в меньшем количестве, и там выливает; при этом ясно, что если все снижающиеся сосуды тяжелее всех поднимающихся, то первая группа будет постоянно приводить во вращательное движение вторую группу. Существуют такие машины, которые ту же цель осуществляют с помощью простых труб, пользуясь кранами, которые в подходящие моменты поворачивают, на какой поворот, конечно, никакой силы не тратится. Подобного рода устройства описал Карло Фонтана [77].

Но если кто-либо подумает, что с помощью натиска вод, падающих с определенной высоты и ударяющих по лопастям машины, можно получить тот же результат, то он сильно ошибется. Подобного рода устройство относится к роду тех, при которых очень большая часть абсолютной мощи бесполезно исчезает. Будет очень полезно более тщательно исследовать этот вопрос и показать, какой эффект может быть получен от натиска вод и ветра и при каких обстоятельствах этот эффект следует признать наибольшим из всех.

О машинах, приводимых в движение натиском жидкости, например силой ветра

§ 30. После того как воды, поднятые на определенную высоту, вновь с нее падают и постоянно ударяют о лопасти приводимого во вращение колеса, оказывается совершенно неизбежным, чтобы абсолютная мощь, используемая для приведения в движение колеса, была гораздо меньше той, какая была затрачена на подъем вод, основной причиной чего является то, что после удара о стенки уходящие воды все еще сохраняют некоторую скорость, которая ничего не дает для вращения колеса. Таким образом, оказывалась бы бесполезной большая часть абсолют-

ной мощи в том случае, если бы путем поднятия вод достигали того, что их натиск приводил бы во вращение машину, а последняя в свою очередь поднимала бы другие воды на определенную высоту. Без сомнения, большая или меньшая часть абсолютной силы теряется в силу различных обстоятельств и, как я это покажу, погибает всегда не менее $^{25}/_{27}$ частей всей абсолютной силы, если произвести расчет по норме обычной оценки натиска вод.

§ 31. Но общепринято, что когда воды вытекают из очень широкого сосуда через простое отверстие со всей своей скоростью, т. е. с такой скоростью, которая соответствует всей высоте воды над отверстием, и струя перед отверстием тотчас же прямо ударяет в плоскость, то в результате натиск жидкости на плоскость ноходится в равновесии с весом водяного цилиндра, построенного над отверстием воды. Правда, авторы установили эту совершенно ложную теорию, будучи введены в заблуждение обманчивым опытом. Но я не хочу здесь от нее отступать, так как правильной теории я еще не изложил, а позднее после изложения нашей теории легко будет этот расчет исправить. Поэтому да будет позволено, пока в своем месте мы не обсудим этого вопроса более тщательно, примкнуть к общепринятому мнению, хотя и ошибочному. Чем больше натиск жидкости, тем в большем отношении следует увеличить ту абсолютную мощь, которую мы дадим.

§ 32. Представим себе теперь (фиг. 54) сосуд ABC, или насос, который выбрасывает воды через отверстие C почти в вертикальном направлении; а когда воды доходят до наивысшего положения, то они воспринимаются другим сосудом EDF. Вообразим себе, что в дне этого второго сосуда имеется отверстие D, равное первому C и расположенное на той же высоте, так что через D вытекает столько же воды, сколько вливается наверху, и сосуд EDF постоянно поддерживается полным. Представим себе далее, что воды, вытекающие из D, постоянно ударяют в лопасти некоего колеса, которое, будучи таким образом приведено во вращение, поднимает другие воды. Вместо этой машины на фиг. 54

изображен простой рычаг, вращающийся вокруг H, причем предполагается, что перед отверстием D все время находится все новый и новый рычаг, который воспринимает воды, а другим своим концом зачерпывает воды и поднимает их на заданную высоту.

Приняв это, я определю прежде всего *абсолютную мощь*, которая поднимает воды через отверстие C на высоту CE, а затем также *абсолютную мощь*, которая требуется в G для приведения рычага в движение с той же скоростью, с какой он приводится в движение импульсом вод DC.

§ 33. Пусть сечение отверстия C или D равно n, сечение AB равно m, скорость вод в C или D равно v, вес цилиндра, построенного над отверстием C или D до высоты CE, равен p, время вытекания равно t, тогда вес P будет равен $\frac{m}{n}p$, а скорость, с какой тело, имеющее этот вес, падает, пока воды выбрасываются, равна $\frac{n}{m}v$; следовательно (согласно § 3), *абсолютная мощь*, затраченная на выбрасывание вод из C, равна $\frac{m}{n}p \times \frac{n}{m}v \times t = pvt$.

§ 34. Далее, для того чтобы определить *абсолютную мощь*, расходуемую на вращение рычага GL вокруг точки H, следует принять во внимание, что она ни в коем случае не остается постоянной, а изменяется с изменением скорости, с которой вращается рычаг. Поэтому примем, что скорость, с которой движется край его в G, равна V. При этих условиях следует считать, что воды ударяют в G со скоростью $v - V$ и, таким образом, оказывают давление, которое равно $\left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p$ (ибо давления находятся между собой в квадратном отношении скоростей ударяющей жидкости, и для скорости v давление принимается равным p). Но это давление играет роль *движущей силы*; ведь вместо давления жидкости мы можем предположить груз, лежащий на рычаге в G, который равен $\left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p$. Но этот груз будет двигаться с той же скоростью, что и точка G, а именно со скоростью V, и будет действовать в течение времени t. Таким

образом, абсолютная мощь, необходимая для вращения рычага в течение времени t со скоростью V, равна $\left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p\times V\times t$.

§ 35. Следовательно, если рычаг LG не приводят во вращение непосредственно, а поднимают жидкость на высоту CE с той целью, чтобы струя жидкости своим натиском в G, приводящим во вращение рычаг, поднимала на другой стороне воду, то вся абсолютная мощь относится к полезной абсолютной мощи, как pvt к $\left(\frac{v-V}{v}\right)^2 pVt$, или как v^3 к $(v-V)^2 V$. Она же относится к бесполезной своей части, как v^3 к v^3-v^2V+ $+2vV^2-V^3$.

§ 36. Во всех почти машинах, в которых движущее начало состоит в натиске жидкости, обычно бывает так, что скорость рычага там, где он выдерживает натиск жидкости, т. е. V, очень мала по сравнению со скоростью жидкости v; в этих машинах очень большая часть того эффекта, который мог бы быть получен от такого же количества жидкости, движущейся с равной скоростью, пропадает.

§ 37. Максимальный эффект получается от натиска жидкости, или, что то же, максимальной становится абсолютная мощь, определенная в § 34 для случая $V=\frac{1}{3}v$; тогда эта абсолютная мощь равна $\frac{4}{27}pvt$ и все-таки она отстает на $^{23}/_{27}$ от аналогичной силы, затрачиваемой на подъем вод из C в EF.

Следовательно, если имеется естественное падение вод и им надлежит воспользоваться для подъема вод или для осуществления чего-нибудь другого подобного, то следует устраивать таким образом, чтобы машина в том месте, где производится натиск, двигалась с $^1/_3$ скорости ударяющей жидкости. Этому условию можно всегда удовлетворить, что ясно из приведенного выше примера рычага. Действительно, если точка G движется со скоростью большей $^1/_3$, то нужно уменьшить часть HG, сохраняя остальное без изменения, или же увеличить ее, если точка G движется с меньшей скоростью; или же, не изменяя длины HG, устроить так,

чтобы воды зачерпывались на конце L в большем или меньшем количестве.

§ 38. Но вышеизложенное относилось к жидкостям, которые ударяют по лопастям в перпендикулярном направлении. Расчет оказывается иным для жидкостей, падающих косвенно на крылья мельниц, приводимых во вращение силой ветра, и других подобных устройств. Об этом я теперь кое-что вкратце прибавлю и на этом закончу настоящую часть.

Авторы учат, что когда жидкость ударяет о поверхность всего крыла, расположенного каким угодно образом и способного вращаться в направлении, перпендикулярном к движению жидкости, то жидкость вызывает в крыле максимальное стремление к вращению, если крыло составляет с направлением ветра угол, синус которого относится к полному синусу, как $\sqrt{2}$ к $\sqrt{3}$; но когда та же струя жидкости полностью воспринимается крылом, которое бывает то так, то иначе наклонено к направлению жидкости, то крыло испытывает максимальное давление в таком направлении вращения, которое составляет полупрямой угол с направлением жидкости [[78]].

Первое правило относится к машинам, приводимым во вращательное движение всеохватывающим ветром; второе — к тем, которые приводятся в движение отдельной струей, содержащей в себе определенное ограниченное количество жидкости. Но оба эти правила основаны на том допущении, что движение крыльев очень мало по сравнению с движением жидкости, ибо если принять во внимание движение крыльев, то оба эти правила оказываются ложными. Этим движением не следует, конечно, пренебрегать, ибо на мельницах я зачастую наблюдал, что края крыльев движутся с такой скоростью, которая может почти сравниться со скоростью ветра.

Принимая во внимание вышесказанное, мы произведем теперь расчет с тем, чтобы учесть оба эти движения.

§ 39. Итак, пусть имеется жидкость $DEBA$ (фиг. 55), которая ударяет на всю плоскость AB по направлению EB; при этом предполагается, что плоскость движется параллельным движением

по направлению Bb, перпендикулярному к EB. Пусть, далее, скорости таковы, что пока частица жидкости проходит путь EB, точка плоскости B проходит путь Bb. При этих условиях можно вообразить себе, что вся система, т. е. жидкость вместе с плоскостью, движется от b по направлению к B и притом со скоростью bB. Но, таким образом, получается, что плоскость AB будет оставаться в покое, а частица жидкости, падающая в точку B, будет рассматриваться как прибывающая из точки e, если принять, что $Ee = Bb$, и так со всеми каплями. Следовательно, вместо жидкости $DEBA$, падающей со скоростью EB на движущуюся плоскость AB, надлежит рассматривать жидкость $deBA$, падающую со скоростью eB на ту же, но неподвижную плоскость AB. Продолжим теперь AB до h и проведем $DEdeh$ перпендикулярно к EB; тогда движение частицы жидкости, представленное с помощью eB, надо будет разложить на eg и gB, которые направлены взаимно перпендикулярно; из них последнее совершенно не действует на плоскость AB, другое же, eg, в свою очередь составляется из двух движений ef и fg, из которых последнее fg тщетно стремится протолкнуть плоскость AB в направлении EB, в то время как одно первое ef толкает плоскость в направлении Bb. Итак, доказано, что любая частица производит натиск, пропорциональный прямой ef. Затем, точно так же ясно, что если прямая AB представляет всю плоскость, то число частиц, ударяющих за заданное время в плоскость, следует представить с помощью прямой BN, перпендикулярной к Ad или Be. Наконец, отсюда усилие вод по приведению в движение плоскости в направлении Bb пропорционально прямой, умноженной на BN.

Для того же чтобы определить наиболее благоприятный при этих обстоятельствах наклон плоскости к жидкости, дабы движение плоскости развивалось в направлении Bb, положим $AB = 1$, DE или $AC = x$, $BC = \sqrt{1-x^2}$, прямую EB, представляющую движение жидкости, приравняем v и Bb, или меру движения плоскости, обозначим через V. Если мы произведем, таким образом, расчет, то найдем

$$ef = xv\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)V,$$

а также

$$BN = [xv - V\sqrt{1-x^2}] : \sqrt{v^2 + V^3},$$

откуда

$$ef \times BN = [xv - V\sqrt{1-x^2}]^2 \times \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{v^2 - V^3}},$$

каковая величина является максимальной, когда будет

$$(9v^4 + 18v^2V^2 + 9V^4)\,x^6 - (12v^4 + 30v^2V^2 + 18V^4)\,x^4 +$$
$$+ (4v^4 + 16v^2V^2 + 9V^4)\,x^2 - 4v^2V^2 = 0.$$

§ 40. По отношению к наклону крыльев в мельницах расчет оказывается иным, так как скорости в различных местах крыльев неодинаковы; они пропорциональны расстояниям от центра, и каждому легко произвести теперь вычисление для мельниц. На этом случае я дольше останавливаться не стану; достаточно отметить то, что авторы не вполне точно принимают $x^2 = {}^2/_3$ и что истинное значение x всегда меньше, чем $\sqrt{\frac{2}{3}}$; так, например, если бы было $V = v$, а мы считали бы, что все точки крыла движутся с подобной скоростью, то получилось бы, что $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, а это указывает на то, что крыло должно быть наклонено к направлению ветра под полупрямым углом. Наилучшим устройством крыльев было бы такое, при котором они были бы изогнуты и притом так, чтобы наверху ветер ударял по ним под меньшим углом, чем внизу, или если бы было устроено таким образом, чтобы крылья повсюду воспринимали ветер под средним углом приблизительно в 50°.

§ 41. Перехожу к другому случаю, когда предполагается, что вся жидкость воспринимается плоскостью, как бы последняя ни была наклонена. В данном случае ясно, что так как число частиц, ударяющих за заданное время, остается все время одинаковым, то совершенно не приходится принимать во внимание прямую BN, и что в этом случае давление, производимое водами на движущуюся плоскость AB в направлении Bb, выражается просто

через ef, т. е. $xv\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)V$. Таким образом, это давление окажется максимальным, если взять

$$x^2=\frac{1}{2}+\frac{V}{2\sqrt{v^2+V^2}},$$

и тогда это давление будет равно $\frac{1}{2}\sqrt{v^2+V^2}-\frac{1}{2}V$, если под v подразумевать прямое давление, оказываемое струей на плоскость, на которую она падает перпендикулярно.

§ 42. Рассмотрим теперь струю $DEBA$, которая как бы непосредственно выходит из отверстия D на фиг. 54 и снова, как в § 33, обозначим прямое давление рассматриваемой таким образом струи через p. Тогда усилие этой воды, которым она пытается продвинуть надлежащим образом наклоненную плоскость, чтобы давление было максимальным, по направлению, перпендикулярному к струе, равно $\frac{p}{2v}\times(\sqrt{v^2+V^2}-V)$; а если, далее, это давление умножить на скорость плоскости V и на время, то получится абсолютная мощь, которая может двигать плоскость с той же скоростью в течение того же промежутка времени. Следовательно, при этих условиях вышеуказанная абсолютная мощь будет равна

$$\frac{pVt}{2v}\times(\sqrt{v^2+V^2}-V).$$

§ 43. Определенная нами только что абсолютная мощь имеет такую структуру, что она всегда увеличивается с увеличением V, а если скорость V принять бесконечно большой, то эта сила оказывается равной $^1/_4$ pvt. Таким образом, когда на фиг. 54 мы хотим воспользоваться струей DG для вращения машины путем косвенного натиска, то ни в коем случае не может быть получено больше $^1/_4$ той абсолютной мощи, которая затрачивается на подъем вод из C в EF. Прямым же натиском, как мы это видим в § 37, никогда не может быть получено больше чем $^4/_{27}$. Таким образом, путем косвенного натиска или горизонтального движения колеса может быть получен почти в 2 раза

больший эффект, чем путем прямого натиска, т. е. при вертикальном движении колеса.

А если натиск жидкостей оценивать иначе, чем это было указано в § 31, то надо повсюду изменить значение буквы *p* в том же отношении, в каком была изменена оценка натиска.

Опыт

Опыт, о котором я упомянул в § 27 части девятой, заключается в следующем. Один работник с помощью насоса поднял в течение $7^1/_2$ мин. $16^1/_2$ куб. футов воды на высоту 14 футов.

Этот эффект, если его равномерно распределить, эквивалентен тому действию, с помощью которого в течение каждой секунды поднимают приблизительно $^1/_2$ куб. фута на высоту одного фута. Таким образом, рассматриваемый эффект равен в точности половине того, какой, как я это вывел из других начал в § 27, может дать здоровый и сильный человек при топтании. Я не думаю, чтобы эта недостача была полностью вызвана теми потерями, которые может испытать абсолютная мощь благодаря различным причинам, указанным в той части, а скорее тем, что при качании поршня в насосе люди утомляются больше, чем при топтании на топтальной машине.

Точно такой же опыт, но с гораздо более совершенным и особенно искусно устроенным насосом, я произвел лишь несколько месяцев тому назад в Женеве в присутствии знаменитейших мужей г. г. Деларива, Календрина, Крамера и Жаллабера — профессоров Женевской академии [79]. Исход этого опыта был таков, что я пришел к выводу, что работник в течение каждой секунды поднимал $^4/_5$ куб. фута на высоту 1 фута, или, лучше сказать, давал равный этому эффект. Этот опыт является интересным, и я не думаю, чтобы с помощью какой-нибудь другой машины можно было получить значительно больший эффект. Удивительно также, что таким образом любого рода машины, какой бы силой они ни приводились в движение, дают, повидимому, не на много отличный эффект, если отвлечься от сопротивлений. Обстоятельно обсудив вопрос, я утверждаю, что с помощью самой совершенной

машины человек в состоянии в течение каждой секунды поднимать 1 куб. фут воды на высоту 1 фута или давать аналогичный этому эффект.

Сюда относятся также, в особенности в отношении § 31, те опыты, которые я очень точно провел для оценки натиска жидкой струи, ударяющей о плоскость; эти опыты укрепили меня в той новой теории, которую я дал по этому вопросу, и одновременно показали, что со времен Мариотта допускали общепринятую ошибку. Но так как в конце настоящей части этот вопрос подробно не рассматривался, а в тринадцатой части я определенно собираюсь им заняться, то мы его отложим до указанных исследований, выведенных из механических начал, которые до сих пор еще не были установлены.

ГИДРОДИНАМИКИ
ЧАСТЬ ДЕСЯТАЯ

О свойствах и движениях упругих жидкостей, в особенности же воздуха

§ 1 [80]. Поскольку мы собираемся теперь рассмотреть упругие жидкости, нам будет дозволено придумать для них такое строение, которое находится в соответствии со всеми до сих пор установленными их свойствами, дабы таким образом получить возможность подойти к остальным еще недостаточно исследованным свойствам. А важнейшие свойства упругих жидкостей заключаются в том, что 1) они являются весомыми, 2) распространяются во все стороны, если их не ограничивают, и 3) дают себя все больше и больше сжать при возрастании сил сжатия. Таково строение воздуха, к которому преимущественно относятся настоящие наши соображения.

§ 2 [81]. Итак, представь себе вертикально поставленный цилиндрический сосуд *ACDB* (фиг. 56) и в нем подвижную крышку (поршень) *EF*, на которой лежит груз *P*. Пусть в полости *ECDF* содержатся очень малые частицы, движущиеся чрезвычайно быстро в различных направлениях. Тогда частицы, ударяясь о крышку *EF* и поддерживая ее своими непрерывно повторяющимися ударами, образуют упругую жидкость, которая при удалении или уменьшении груза *P* расширяется, а при его увеличении сгущается и которая тяготеет к горизонтальному дну *CD* совершенно так же, как если

бы она совершенно не обладала свойством упругости; ибо находятся ли частицы в покое или же колеблются, они не изменяют своей тяжести, так что дно выдерживает как вес жидкости, так и ее упругость. Итак, подобную жидкость, согласующуюся с важнейшими свойствами упругих жидкостей, мы подставим вместо воздуха и, таким образом, объясним другие свойства, которые уже были открыты у воздуха, а дальше поясним еще и иные, до сих пор недостаточно исследованные его свойства [82].

§ 3. Число частиц, заключающихся в полости сосуда, мы будем считать как бы бесконечно большим, а когда они занимают пространство $ECDF$, мы будем говорить, что они тогда образуют естественный воздух, к мерам которого надлежит все относить; тогда и груз P, удерживающий поршень в положении EF, тождественен с давлением находящейся наверху атмосферы, которое поэтому в дальнейшем мы будем обозначать через P.

Но следует отметить, что это давление отнюдь не равно абсолютному весу вертикального цилиндра воздуха, лежащего в атмосфере над поршнем EF, как это до сих пор непродуманно утверждали авторы; давление это равно четвертой пропорциональной поверхности земли, величины отверстия EF и веса всей атмосферы на поверхности земли.

§ 4 [83]. Пусть теперь требуется определить груз π, который в состоянии сжать воздух $ECDF$ до объема $eCDf$, если допустить, что скорости частиц в том и другом воздухе, т. е. в естественном и в сжатом, одинаковы; пусть будет $EC = 1$, $eC = s$. Но когда поршень EF перемещается в ef, то он испытывает со стороны жидкости большее давление по двум причинам: во-первых, вследствие того, что число частиц по отношению к пространству, в котором они заключены, теперь возрастает, и, во-вторых, вследствие того, что любая частица чаще повторяет свой удар. Для того чтобы правильно вычислить приращение давления, вызываемое первой причиной, мы будем рассматривать частицы, как если бы они находились в покое, и число частиц, прилегающих к поршню в положении EF, примем равным n;

тогда соответствующее число их для положения частицы в ef будет равно $n:\left(\frac{eC}{EC}\right)^{\frac{2}{3}}$, или $n:s^{\frac{2}{3}}$.

Следует при этом отметить, что жидкость в нижней части сосуда мы считаем сжатой не более чем в верхней части, что и имеет место, когда вес P как бы бесконечно больше собственного веса жидкости. Отсюда ясно, что по этой причине сила жидкости пропорциональна числам n и $n:s^{\frac{2}{3}}$, т. е. $s^{\frac{2}{3}}$ и 1.

Что же касается другого приращения, происходящего вследствие второй причины, то оно определяется путем рассмотрения движения частиц; этим путем выявляется, что удары происходят тем чаще, чем ближе друг к другу расположены частицы. Стало быть, числа ударов обратно пропорциональны средним расстояниям между поверхностями частиц. А эти средние расстояния определятся нижеследующим образом.

Допустим, что частицы являются сферическими, и среднее расстояние между центрами шариков в положении поршня EF назовем D; диаметр шарика мы обозначим через d. Тогда среднее расстояние между поверхностями шариков будет $D-d$. Но ясно, что при положении поршня ef среднее расстояние между центрами шариков равно $D\sqrt[3]{s}$ и, стало быть, среднее расстояние между поверхностями шариков равно $D\sqrt[3]{s}-d$. Таким образом, с точки зрения второй причины сила естественного воздуха $ECDF$ будет относится к силе сжатого воздуха $eCDf$, как $\frac{1}{d-D}$ к $\frac{1}{D\sqrt[3]{s}-d}$, или как $D\sqrt[3]{s}-d$ к $D-d$. А если объединить обе причины, то вышеуказанные силы будут относиться друг к другу, как $s^{\frac{2}{3}}\times(D\sqrt[3]{s}-d)$ к $D-d$.

Вместо отношения D к d мы можем взять другое, более доступное пониманию. А именно, если мы представим себе, что поршень, прижатый бесконечно большим грузом, снизится до положения mn, при котором все частицы взаимно соприкасаются, и обозначим отрезок mC через m, то D будет относиться к d,

как 1 к $\sqrt[3]{m}$. Если подставить это отношение, то в конце концов силы естественного воздуха *ECDF* и сжатого *eCDf* будут относиться друг к другу, как $s^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt[3]{s} - \sqrt[3]{m})$ к $1 - \sqrt[3]{m}$, или как $s - \sqrt[3]{ms^2}$ к $1 - \sqrt[3]{m}$. Таким образом,

$$\pi = \frac{1 - \sqrt[3]{m}}{s - \sqrt[3]{ms^2}} \times P.$$

§ 5. На основании всех явлений мы можем считать, что естественный воздух может быть очень сильно сгущен и может быть сжат почти до бесконечно малого объема; следовательно, если положить $m = 0$, то получается $\pi = \frac{P}{s}$. Таким образом, сжимающие грузы находятся между собой почти в обратном отношении к объемам, занимаемым воздухом, сжатым в различной степени, что многократно подтверждал и опыт. Это правило, конечно, может быть без риска принято и для воздуха более разреженного, чем естественный воздух; но может ли оно быть принято и для воздуха значительно более сгущенного, это я считаю еще недостаточно выясненным, ибо до сих пор не было еще поставлено опытов с такой степенью точности, какая требуется в данном случае. [84] Для определения значения буквы m нужен особый опыт, но тем точнее он должен быть поставлен и, конечно, с воздухом сильно сжатым; степень же теплоты в воздухе во время его сжатия должна тщательно поддерживаться неизменной.

§ 6. Между тем упругость воздуха увеличивается не только благодаря сгущению, но и благодаря увеличению теплоты, и так как известно, что когда повсюду возрастает внутреннее движение частиц, то теплота увеличивается, то отсюда следует, что увеличение упругости воздуха, не изменяющего своего объема, указывает на увеличение интенсивности движений частиц, что находится в правильном соответствии с нашей гипотезой. В самом деле ясно, что для удержания воздуха в положении *ESDF* требуется тем больший груз P, чем с большей скоростью движутся частицы воздуха. Нетрудно даже видеть, что вес P будет следовать второй степени этой скорости, ибо с увеличением скорости в одина-

ковой мере возрастает как число ударов, так и их интенсивность, причем то и другое возрастает пропорционально весу P.

Таким образом, если обозначить скорость воздушных частиц через v, то груз, который способен удержать крышку в положении EF, будет равен v^3P, а в положении ef будет равен $\frac{1-\sqrt[3]{m}}{s-\sqrt[3]{s^2}} \times v^2P$, или, приблизительно, $\frac{v^2P}{s}$, ибо, как мы видели, m представляет собой число, чрезвычайно малое по сравнению с единицей и с числом s.

§ 7. Ту теорему, которую я изложил в предыдущем параграфе и в которой утверждается, что во всяком воздухе любой плотности, но обладающем одинаковой степенью теплоты, упругости пропорциональны плотностям, поэтому и приращения упругости, вызываемые одинаково возросшей теплотой, пропорциональны плотностям, эту теорему, говорю я, на опыте установил г-н Амонтон [85] и изложил в «Мемуарах королевской Академии наук в Париже» (Memoires de l'Acad. R. des Sc. de Paris) за 1702 г. Смысл этой теоремы заключается в следующем: если, например, естественный воздух средней теплоты в состоянии поддержать груз в 100 фунтов, положенный на данную поверхность, и если затем его теплота увеличится до того, что он будет в состоянии на той же поверхности и при том же объеме удержать 120 фунтов, то тот же воздух, сгущенный до половины первоначального объема и находящийся при тех же степенях теплоты, сможет удержать соответственно 200 фунтов и 240 фунтов, так что оба эти приращения в 20 и 40 фунтов, вызванные увеличением теплоты, оказываются пропорциональными плотностям. Далее он утверждает, что упругость воздуха, который он называет умеренным, приблизительно так относится к упругости воздуха, имеющего теплоту, одинаковую с кипящей водой, как 3 к 4, или, точнее, как 55 к 73. Я же с помощью проведенных мною опытов установил, что самый горячий воздух, какой бывает в наиболее жаркое лето в этих местах, не обладает той упругостью, которую г-н Амонтон при-

писал умеренному воздуху; я даже убежден, что под самым экватором воздух никогда не обладает таким теплом. И я думаю, что на мои опыты следует полагаться в большей мере, чем на Амонтоновские, так как при последних воздух не сохранял неизменным своего объема, и автор при расчете не принимал во внимание его изменений. Я нашел, что упругость воздуха, который здесь в Петербурге был весьма холодным 25 декабря 1731 г. ст. ст., относится к упругости такого же воздуха, обладающего теплотой, общей с кипящей водой, как 523 к 1000 [[86]].

Но в 1733 г., 21 января, холод был еще гораздо сильнее, и я наблюдал, что ему соответствовала упругость воздуха, которая была меньше половины той, какую имеет такой же воздух, нагретый до кипения воды. А когда в 1731 г. воздух в затененном месте был очень теплым, то он обладал упругостью приблизительно в $^4/_3$ или точнее в $^{100}/_{76}$ той, какую имел самый холодный воздух, и $^2/_3$ той, какую имеет воздух той же теплоты, что и кипящая вода. Таким образом, максимальные колебания теплоты в воздухе в здешних местах заключаются в пределах 3 и 4, в Англии же, как я читал, они не выходят за пределы 7 и 8. А жар воздуха, упругость которого равна $^3/_4$ упругости воздуха, горячего подобно кипящей воде, является, как я думаю, почти невыносимым для живого тела.

§ 8. Из установленного отношения между упругостями одного и того же воздуха, заключенного в одном и том же объеме, легко вывести меру тепла, принадлежащего воздуху, если только мы согласимся об определении удвоенного, утроенного и т. д. тепла, каковое определение является произвольным и не заключается в природе вещей; правда, мне представляется, что было бы вполне сообразно считать, что теплота воздуха, если он имеет одинаковую плотность, пропорциональна его упругости. А первая степень теплоты, от которой получают меру остальные степени, должна быть принята у кипящей дождевой воды, так как последняя, без сомнения, имеет повсюду почти одну и ту же степень тепла.

Если принять указанные выше условия, то теплоты кипящей воды, очень теплого воздуха в летнее время и очень холодного

воздуха в зимнее время в этих местностях будут относиться друг к другу приблизительно, как 6, 4 и 3. Теперь я расскажу, каким образом я нашел эти числа, дабы можно было судить о тщательности опытов, исход которых очень сильно отличается от Амонтоновских.

§ 9. Я воспользовался обычным барометром *ACBE* (фиг. 57), который я распорядился герметически запечатать в *m*; этим путем я превратил прибор в воздушный термометр, не подвергающийся барометрическим изменениям. Действительно, когда теплота возрастает, упругость воздуха *AmF* усиливается и образуется более высокий столб ртути *BD*, который поддерживается взятым воздухом; и если бы пространство *AmF* можно было признать как бы бесконечно большим, то теплота была бы пропорциональна высоте *BD* (согласно §§ 7 и 8), и тогда с помощью этого термометра можно было бы повсюду удельно определить меру теплоты. А именно, если этот прибор погрузить в кипящую дождевую воду в вертикальном положении и заметить точку *G*, до которой поднимается поверхность ртути, и если затем потребуется определить какую-либо другую степень теплоты, которая, согласно наблюдению, поддерживала ртуть на точке *D*, то, конечно, эта теплота будет относиться к теплоте кипящей воды, как *BD* к *BG*. А так как отношение *BD* к *BG* является постоянным, какова бы ни была высота *BG*, то будет легко повсеместно воспроизвести ту же степень теплоты, о которой идет речь. При этом *BG* можно разделить на сто или тысячу частей и этими частями определять высоту *BD*.

Я ничего не говорю о способах сообщения этого рода термометрам большей чувствительности; при желании всякий легко придумает множество способов. Но следует позаботиться о том, чтобы высота *BE* была не ниже 4 футов и чтобы она была даже больше, если имеется намерение определять степень теплоты других кипящих жидкостей, которая зачастую бывает выше, чем у воды. Если желательно иметь меньшие термометры подобного рода, то их можно изготовить следующим образом: во время запаивания в *m* стеклянную ампулу *AF* помещают в огонь светильника для разрежения содержащегося в ней воздуха и тогда сразу произ-

водят запаивание, а для того чтобы не получилось замедления в запаивании, можно сначала вытянуть стеклянную ампулу в капиллярную трубку, которая, будучи хотя бы немного придвинута к пламени, тотчас же плавится. Этим путем я получил термометры длиной не свыше 4 или 6 дюймов, но невысокого качества. Сверх того очень важно, чтобы пространство ED было, насколько это возможно, свободно от всякого воздуха; и мы не будем достаточно уверены в этом освобождении от воздуха, если увидим, что при горизонтальном положении прибора ртуть доходит до края E, ибо может случиться, что воздух, находившийся раньше в пространстве ED, скрывается теперь в порах ртути, а затем после подъема ртути он вновь займет прежнее место. Более надежно будет произвести проверку, приблизив часть DE к пламени, а именно: если от теплоты пламени поверхность D не изменит своего места, то это будет верным свидетельством того, что пространство ED свободно от воздуха.

§ 10. В предшествующем параграфе мы рассматривали пространство AmF, занятое воздухом, как бесконечно большое по отношению к пространству DG или DE. Но если оно будет лишь в 8 или 10 раз больше, то его еще нельзя будет без заметной погрешности рассматривать, как бесконечно большое; и я подозреваю, что отсюда именно возникла некоторая ошибка в определении упругости умеренно теплого воздуха в опытах Амонтона.

Итак, для того чтобы опыт мог быть произведен очень тщательно, надлежит действовать следующим образом. Пусть нижняя поверхность ртути находится в AF. Проведем горизонтальную прямую в AL. Затем для определения какой-нибудь степени теплоты следует наклонить прибор, пока поверхность ртути не окажется в точке g (это та самая точка, у которой ртуть останавливается при степени теплоты кипящей воды при вертикальном положении термометра); затем следует измерить вертикальную высоту gh, которая будет относится к высоте GB совершенно так, как упругость воздуха, теплота которого подлежит определению, относится к упругости воздуха, имеющего теплоту кипящей воды. Таким образом, теплоты будут относиться исключительно как

высоты gh. Раньше чем я покончу с этой темой, будет уместно отметить (так как некоторым, быть может, покажется, что первая принятая нами степень теплоты, взятая от кипящей воды, не всегда и не везде оказывается одной и той же), что вместо кипящей воды термометр мог бы быть также устроен с помощью известных и твердо установленных мер, если на опыте определять плотность воздуха или его удельный вес и одновременно отмечать высоту барометра. Ибо если барометр наклонить так, что поверхность ртути окажется в g, высота барометра в это время составит 28 парижских дюймов, а 1 куб. фут воздуха, в котором термометр помещен, будет иметь вес в 600 нюрембергских гранов, то можно будет рассматривать вертикальную прямую gh в качестве первой степени теплоты. Если же в другом месте и в другое время высота барометра составит 29 парижских дюймов, а вес 1 куб. фута воздуха, окружающего другой термометр (в котором желательно определить первую степень теплоты), будет равен 500 нюрембергских гранов и, наконец, поверхность ртути в термометре будет снова находиться в g, то вертикальная высота, соответствующая первой степени теплоты, будет равна $\frac{29\,600}{28\,500} \times gh$. При пользовании термометром следует всегда прибор наклонять до тех пор, пока поверхность ртути окажется в g. Я хотел изложить этот метод, дабы стало ясно, насколько в теории легко дать твердую меру теплоты; на практике же я предпочел бы ей другую, гораздо более легкую и достаточно точную.

§ 11. Перейдем теперь к рассмотрению воздушной атмосферы, которая удерживается не расположенным над нею посторонним грузом, а собственной тяжестью. При этом, во-первых, исследуем давления вертикальных воздушных столбов и их равновесия как между собой, так и со столбом ртути в барометрах. Во-вторых, исследуем упругости воздуха на различных высотах атмосферы над морем и соответствующие барометрические высоты. А после этих предпосылок мы уделим должное внимание очень многим другим явлениям, относящимся к изменениям атмосферы.

§ 12. Пусть имеются две одинакового сечения вертикальные трубы AC и BD (фиг. 58), причем обе они — неопределенной высоты. Вообразим себе, затем, более узкие горизонтальные трубочки ab, cd, ef, gh, lm и т. д. как бы в бесконечном множестве, с обеих сторон открытые и входящие в вертикальные трубы. Сверх того допустим, что воздушные частицы, занимающие эти трубы, движутся повсюду с одной и той же скоростью и поэтому имеют одну и ту же степень теплоты. Тогда нет никакого сомнения в том, что дно A и дно B испытывают одинаковые давления и что на том и другом лежит одинаковый вес (каковым, стало быть, является вес неопределенного воздушного столба AC или BD).

Также понятно, что если представить себе на равных высотах, например в g и h, перегородки и предположить, что нижний воздух gA и hB отсутствует, то эти перегородки будут еще испытывать (справа и слева) одинаковое давление, и веса воздушных столбов gC и hD, лежащих над перегородками, будут между собой равны. Следовательно, если вес всего воздушного столба AC или BD назвать A, а вес воздушного столба gC или hD обозначить через B, то вес воздуха, заключающегося между A и g или между B и h, будет равен $A—B$, вес, лежащий над дном A или дном B, будет равен A, а вес, лежащий над перегородкой в g или h, будет равен B.

§ 13. Но если частицы в трубах AC и BD движутся с неодинаковой скоростью, тогда дело обстоит иначе. Тем не менее, какое бы мы ни допустили различие скоростей и теплот в отдельных местах, все же ясно, что с обеих сторон на части трубы, расположенные на одной и той же высоте, например в g и h, давление будет одинаковым и что поэтому перегородки, если представить себе, что они с обеих сторон расположены на одной и той же высоте, должны будут выдерживать равное давление. Если утверждать, что в g давление меньше, чем в h, то не будет ничего такого, что могло бы воспрепятствовать течению воздуха из BD в AC через поперечную трубку hg, и, таким образом, это допущение будет противоречить принятому нами состоянию постоянства.

Так как, стало быть, места, расположенные на одной и той же высоте, подвергаются одинаковому давлению со стороны вышележащего воздуха, то (согласно § 6) плотности в любых соответствующих друг другу местах, например в g и h, будут находиться приблизительно в обратном отношении к квадратам скоростей, с которыми частицы в этих местах движутся.

§ 14. Из предыдущего параграфа следует, что повсюду на равных высотах от поверхности моря давление воздуха одинаково, если допустить, что атмосфера находится в постоянном состоянии равновесия, и предположить, что она не приводится в движение какими-либо ветрами, какова бы ни была разность теплоты в различных частях атмосферы. Следовательно, во всех местах на экваторе и на полюсе должна быть одинаковая высота ртути в барометрах, помещенных на поверхности моря или на одинаковых над ним высотах, если атмосфера не подвергается никаким изменениям. Я полагаю также, что воды, ограниченные поверхностью моря, находятся в общем равновесии не потому, что это совершенно необходимо, а потому, что до сих пор не наблюдалось еще никакого различия. Но с другой стороны, течения (les courans) вод во многих местах океана, направленные постоянно в одну и ту же сторону, указывают на то, что приведенное выше допущение не следует принимать с полной строгостью.

§ 15. Я уже отметил, что плотность воздуха в любом месте вертикальных труб зависит от соответствующей теплоты. А так как при сохранении равновесия степени теплоты могут быть различными, то различными могут быть и плотности. Итак, предположим, что плотность в g равна D, в h равна δ, и представим себе с обеих сторон два слоя равной и бесконечно малой высоты dx, положив высоту Ag или Bh равной x. Тогда вес воздушного столба Ag будет равен $\int Ddx$, а столба Bh — $\int \delta dx$; этим же путем можно будет определить как вес всего столба, так и вес любой его части. Но в то же время ясно, что природа вещей очень мало требует того, чтобы веса столбов AC и BD или Ag и Bh, или, наконец, gC и hD были между собой равны, хотя (согласно

§ 13) давления как на дно A и дно B, так и на перегородки g и h, будут между собой равны [87]. Быть может, с первого взгляда некоторым покажется удивительной возможность того, что дно A выдерживает иное давление, чем вес расположенного над ним неопределенного воздушного столба AC, так как отверстия a, c, e, g можно представить закрытыми, не меняя никаких других обстоятельств, а в этом случае, конечно, нет никакого сомнения в том, что давлением на дно A является вес расположенного над ним столба воздуха. Но это сомнение каждый может устранить для себя следующим образом. Вообразим себе оба столба ограниченной высоты (ибо хотя они без конца поднимаются, пока частицы все еще сохраняют некоторое движение, однако они будут ограничены, если те же частицы в верхней части столбов лишены движения, и, таким образом, создают весомую жидкость, лишенную всякой упругости). При указанном допущении ясно, что 1) оба столба поднимаются до одной и той же высоты при открытых поперечных трубочках, которые повсюду имеются, и 2) верхние слои на той и другой стороне одинаково плотны, так как они приняты находящимися в равновесии и имеют одну и ту же высоту. Из этого уже видно, почему нельзя рассматривать поперечные трубочки как закрытые, что я и решил показать. Само по себе также понятно, что давления повсюду пропорциональны весу верхнего слоя, откуда следует, как это было уже указано в § 13, что с обеих сторон давления на равных высотах между собой равны. А если столбы нигде не ограничены, то можно будет мысленно представить себе, что верхние слои, или воображаемые на равных высотах перегородки, обременены с обеих сторон равными весами, так что вследствие этого сила доказательства нисколько не ослабевает.

§ 16. Таким образом, когда в барометре, перенесенном из более низкого места, например из A, в более высокое, g, ртуть опускается, то отсюда не следует, что вес ртутного столба, опускающегося в барометре, равен весу воздушного столба того же диаметра и высоты Ag, как это некоторые утверждают. И действительно, при прочих равных условиях снижающийся столб

ртути будет всегда одинаковым как в зимнее время, так и в летнее, между тем как, согласно приведенному выше мнению, он в теплое время должен был бы быть меньше, чем в холодное время. Он будет также одинаковым в полуденных странах и в северных.

Отсюда ясно, что следует думать о том методе, которым, как об этом сообщает Дю Гамель [88] в «Истории Академии наук в Париже» (Hist. Acad. Sc. Paris) иногда пользовались в Англии для установления отношения между удельными весами воздуха и ртути. А именно, наблюдая высоту ртути в более низком месте, а затем и в более высоком, принимали, что удельные веса воздуха и ртути относятся друг к другу, как разность высот ртути в барометре относится к отрезку высоты между местами наблюдения. Если даже допустить, что от нижнего места наблюдения до верхнего воздух обладает одинаковой плотностью, то и тогда нельзя было бы на этом основании судить об его удельном весе по отношению ко ртути. То, о чем можно заключить на основании этого опыта, сводится лишь к следующему.

Рассмотрим весь воздушный слой, окружающий землю, а также содержащийся между обоими местами наблюдения; тогда давление этого слоя на поверхность земли будет пропорционально давлению такого ртутного столба, какой в барометре опускается до его основания. Это очевидно из того, что сумма оснований A и B поддерживает, конечно, сумму весов, которые имеют воздушные столбы AC и BD, но, однако, ни одно из этих оснований не испытывает давления веса своего столба отдельно, а также из того, что если отрезать столбы Ag и Bh, то совершенно то же следует полагать о столбах gC и hD, лежащих над перегородками, расположенными в g и h. Таким образом, этот опыт не столько указывает на удельный вес воздуха, в котором опыт был проведен, сколько определяет средний удельный вес всего прилегающего к земле воздуха; первый из них является весьма изменчивым, второй же без сомнения постоянно остается почти неизменным.

Вычислим удельный вес всего «среднего» воздуха, который окружает землю. Из многих опытов, произведенных в раз-

личных местах, незначительно возвышающихся над морем, известно, что подъему в 66 футов соответствует снижение в барометре приблизительно в 1 линию. Отсюда следует, что средний удельный вес воздуха находится в таком же отношении к удельному весу ртути, как высота в 1 линию относится к высоте в 66 футов, т. е. как 1 к 9504; следовательно, если принять удельный вес ртути равным 1, то средний удельный вес воздуха будет равен 0.000105. Замечательно, конечно, что именно таков указанный средний вес воздуха, ибо мне известно, что когда в этих местах свирепствует даже очень сильный холод, то удельный вес воздуха едва ли бывает таким, какой мы сейчас показали для среднего состояния всего воздуха, окружающего землю. Под экватором же он будет намного меньше; правильно взвесив все, я полагал бы, что средний вес воздуха, содержащийся между обоими широтами в 60°, не превышает 0.000090. Если это допустить, то средний вес воздуха, окружающего землю от обоих полюсов до 30° (каковое пространство составляет несколько больше $^1/_8$ всей поверхности земли), равен 0.000210, что вдвое больше плотности наиболее плотного в здешних местах воздуха. А на самом полюсе, в особенности антарктическом, воздух гораздо тяжелее, и возможно, что когда он бывает наиболее холодным и плотным, то он едва в 10 раз легче воды.

§ 17. Перейдем теперь к изменениям как атмосферы, так и барометра. Итак, рассмотрим два барометра, причем оба они помещены в нижнем слое воздуха, один в A, другой в B, и допустим, что в том и в другом ртуть установилась на одной и той же высоте. Представим себе, что после этого в A воздух внезапно сильно нагрелся. Мы знаем, что тогда этот воздух разредится. Однако это не вызвало бы никакого изменения барометра, если бы воздух не обладал никакой инерцией в движении, хотя бы весь воздух был перегнан из AC в BD. Но если допустить указанную косность, то возникает некоторое давление во всех направлениях, причем оно наиболее заметно в районе A. Таким образом, временно в обоих барометрах высота ртути увеличивается, причем в A она увеличивается больше, чем в B.

Обратное получится, если какая-нибудь большая масса воздуха в соседстве с барометром A или B внезапно сгустится от холода.

§ 18. Такова, мне кажется, единственная причина, которая может вызвать какое-либо изменение в барометрах, поставленных в A или B, так как если ее исключить, то дно A и дно B испытывают всегда одно и то же давление, а именно давление, составляющее половину воздушных столбов AC и BD, вместе взятых, каковая сумма весов является, конечно, постоянной. Если мы желаем изложенное применить к атмосфере, то следует иметь в виду, что дно A и дно B представляют собой нижние места атмосферы, которые можно было, конечно, расположить на поверхности земли, если бы воздух не мог проникнуть в недра земли. Но так как дело обстоит иначе, то места, аналогичные дну A и дну B, следует рассматривать как расположенные ниже поверхности земли.

§ 19. Допустим теперь, что барометры поставлены в g и h, и пусть в обоих барометрах ртуть установилась на одной и той же высоте. Представим себе, что при указанных условиях возникает причина, вследствие которой столб Ag либо один, либо совместно с соседним Bh нагревается и расширяется. Из сказанного ясно, что если бы воздух даже не обладал никакой косностью, то получится так, что давление воздуха в g и h увеличится, ибо над этими местами теперь располагается большее количество воздуха, чем раньше, а именно прибавляется вес всего воздуха, который из Ag и Bh был перегнан вверх теплотой. А для того чтобы выразить это с помощью символов, положим вес столба Ag до того, как прибавилась новая степень теплоты, равным A, вес второго столба Bh равным α, вес столба gC равным B, столба $hD - \beta$; вес разреженного столба $Ag - C$, вес столба Bh, точно так же разреженного, равным γ, высоту ртути в g, до расширения воздуха в Ag и Bh, равной l, аналогичную высоту после его расширения равной x. Тогда мы будем иметь следующую пропорцию: $B + \beta : l = B + A - C + \beta + \alpha - \gamma : x$, откуда получается

$$x = \frac{B + A - C + \beta + \alpha - \gamma}{B + \beta} l.$$

Таким образом, вследствие разрежения нижнего воздуха ртуть поднимется на высоту

$$x - l = \frac{A - C + \alpha - \gamma}{B + \beta}\, l = \frac{A - C}{B}\, l$$

(если предположить, что все условия в обеих трубах одинаковы).

А если воздух в Ag и Bh снова охладится, то ртуть в обоих барометрах опять понизится.

Здесь следует отметить, что этим путем вследствие очень малого изменения теплоты в Ag и Bh может получиться заметное изменение в барометре благодаря значительной плотности воздуха в нижних частях, ибо может случиться, что в части Ag будет содержаться намного больше воздуха, чем в остальной части gC, хотя и бесконечно длинной (и даже в бесконечное число раз большее, если предположить, что воздух, сжимаемый бесконечно большой силой, сгущается в бесконечно малое пространство). Отсюда, если вес A гораздо больше веса B, а вес C сохраняет свое отношение к A при неизменности причины, разрежающей воздух, то ясно, что подъем ртути вследствие весьма малого повышения степени теплоты в Ag может оказаться сколь угодно большим.

Правда, если предположить, что части Ag и Bh гораздо у́же по сравнению с сечениями в gC и hD, то понятно, что изменения барометра вследствие увеличения или уменьшения степени теплоты в Ag и Bh станут при этих условиях менее заметными, ибо веса A и α, а также пропорциональные им C и γ при этом уменьшаются; тем не менее барометрические изменения, вызываемые этой причиной, все еще можно представить себе сколь угодно большими.

§ 20. При обсуждении этих вопросов представляется правдоподобным, что барометрические изменения должны в очень большой части вызываться быстрыми переменами теплоты в подземных пещерах. Давно уже известно, что существует множество подобных пещер и притом очень больших, а проходы в твердой земле могут сделать то же, что и пещеры. Если сложить все по-

лости (образуемые как пещерами, так и содержащими воздух проходами) до глубины под поверхностью земли в 20 000 или 30 000 футов и сравнить их емкость с массивом земной коры той же толщины и если допустить, что последний в 1000 или в 100 000 раз больше первой, то указанная выше причина окажется, конечно, все еще достаточной для объяснения очень больших изменений показания барометра. Полагаю, что это будет ясно каждому на основании предыдущего параграфа.

Сверх того места, расположенные более близко к пещерам, в силу инерции воздуха будут больше подвержены и ветрам и изменениям барометра, что, быть может, и является причиной того, что по направлению к экватору, где все почти представляет собой открытое море, наблюдаются меньшие изменения на барометре, чем в здешних северных местностях.

§ 21. На том же основании можно полагать, что некоторое влияние на барометрические колебания должны оказывать и водяные испарения из проходов земли. Но это влияние наверно мало, ибо если бы водяные пары дали столько воды, сколько может выпасть при наиболее сильном дожде, то от них ртуть в барометре поднялась бы едва на 1 линию, помимо того, что эта причина не является столь быстрой, чтобы ее действие почти одновременно распространилось на всю атмосферу, и, таким образом, для какого-нибудь определенного места оно целиком исчезает. Действительно, если мы рассматриваем всю атмосферу, которая окружает землю, то, конечно, нельзя заметить, чтобы она была то меньше, то больше нагружена парами. Что касается до меня, то той причине, которая была изложена в § 20, я, конечно, отдал бы предпочтение перед остальными, так как на возможность больших и быстрых изменений в недрах земли указывают движения земли, которые одновременно ощущаются на сотню миль, и другие подобного же рода явления.

Для объяснения барометрических изменений требуется прежде всего какая-нибудь внезапная причина, ибо я уже отметил, что распределение медленных причин во всей атмосфере не дает никакого эффекта, и я доказал это в § 14. По этой причине сле-

дует признать малозначущими те изменения, которые происходят непосредственно в атмосфере на поверхности земли.

§ 22. В этом равным образом заключается, повидимому, и причина того, что луна, являющаяся столь действенной в образовании колебаний океанических вод, не производит на барометр никакого действия, которое могло бы быть замечено при самых внимательных наблюдениях. А если бы и все прочие причины, которые способны вызвать где-нибудь в атмосфере какое-нибудь изменение, действовали медленно, то без сомнения во всех местах, равно удаленных от поверхности моря, наблюдалась бы всегда одна и та же высота ртути. Эту высоту можно назвать средней и ее можно приблизительно определить тем путем, каким воспользовался Иоганн Яков Шехцер [89], наблюдая ежедневно в течение долгого времени высоту барометра и беря среднюю из всех.

Пользуясь этим приемом, знаменитейший автор на основании многочисленных наблюдений, присланных ему из многих мест, установил среднюю высоту:

В Падуе	27	дюймов	$11^1/_2$	парижских	линий
В Париже	27	»	$9^1/_2$	»	»
В Турине	27	»	$1^1/_4$	»	»
В Базеле	26	»	$10^1/_8$	»	»
В Цюрихе	26	»	$6^1/_2$	»	»
На горе Готтард	21	»	$27^1/_2$	»	»

§ 23. Известно, что различие приведенных выше средних высот проистекает вследствие неодинаковой высоты этих мест над морем. Ведь уже во времена Паскаля были произведены опыты над снижением ртути в барометре, перенесенном из более низкого места в более высокое. На этом основании философы поставили вопрос о взаимной связи между причиной и ее действием. Различные авторы предложили для этого разные правила. Важнейшее из них, к которому до сих пор еще склоняются очень многие, заключается в том, что высоты мест следуют отношению логарифмов, соответствующих высотам барометров. Это

правило основано главным образом на том, что плотность воздуха повсюду пропорциональна весу лежащего наверху воздуха. Но это начало в данном случае применяется неправильно, так как оно имеет силу лишь для воздуха одинаковой теплоты, а это последнее не является достоверным на любой высоте воздуха, хотя бы он находился в одном и том же вертикальном столбе. Но если, действительно, теплота одинакова, то следует признать, что тогда с этим правилом все обстоит достаточно благополучно.

Однако опыты совершенно противоречат этому правилу; стало быть, степень теплоты не является одинаковой повсюду на всей высоте вертикального воздушного столба [90]. Для того чтобы это уяснить, я изложу некоторые опыты, которые, как я уверен, были произведены точно, но, к сожалению, в разные периоды времени и в различных местах. Без сомнения, нашей цели в большей мере соответствовали бы опыты, произведенные в одно и то же время и на одной и той же горе, но лишь на разных высотах. Однако, насколько я знаю, до сих пор, если не считать опытов для незначительных высот, не имеется еще никаких опытов при всех обстоятельствах, которые следовало бы знать.

I. На высоте 1070 парижских футов над поверхностью моря барометр снизился на $16\,^1/_2$ линии, между тем как на поверхности моря он достигал высоты 28 дюймов $4\,^2/_3$ линии (другие принимают просто 28 дюймов, но в таблицах, сообщенных мне г-ном Де Лиль (De Lisle) [91], имеется 28 дюймов $4\,^2/_3$ линии). Следовательно, если принять упругость воздуха на поверхности моря, как я в дальнейшем и буду принимать, равной 1, то упругость в более высоком месте, которую я обозначу через E, была найдена равной 0.9520.

II. На высоте 1542 парижских футов над поверхностью моря ртуть в барометре снизилась на $21\,^1/_2$ линии, а на море она стояла на высоте 28 дюймов 2 линии; таким образом, здесь E было равно 0.9364.

III. На высоте горы Пик, на острове Тенерифе — 13 158 парижских футов над поверхностью моря — ртуть стояла на высоте

17 дюймов 5 линий, между тем как на поверхности моря она стояла на высоте 27 дюймов 10 линий; отсюда в этом месте E было равно 0.6257.

IV. Если тщательно наблюдать снижение ртути на небольших высотах, то выявляется, что снижение на 1 линию соответствует высоте в 65 или 66 футов. Таким образом, на высоте 65 футов будет $E = 0.9970$. Эти результаты получаются повсюду; третье наблюдение я получил от г-на Де Лиля. Оно было произведено Фейе [[92]] и доложено в Парижском королевском обществе наук. Это — тот утес, о который разбиваются все теории, предложенные до сих пор.

§ 24. Чтобы выявить, в какой мере вышеизложенное согласуется с принципом соответствия высот логарифмам показаний барометра, положим высоту места, отстоящего от поверхности моря на известное число парижских футов, равной x; упругость воздуха на поверхности моря мы обозначим через 1 и упругость воздуха на высоте x положим равной E. При этом следует отметить, что мы теперь рассматриваем атмосферу неизменной или по крайней мере всегда себе подобной, так что упругости воздуха на поверхности моря и на какой-либо высоте x сохраняют все время одно и то же взаимное отношение. Ибо если на различных высотах атмосферы упругости с течением времени очень неравномерно изменяются, причем соотношение между ними совершенно не сохраняется, то, конечно, нельзя придумать никакого правила. При изложенных предпосылках допустим теперь равенство $\alpha \log E = x$, где коэффициент α может быть определен из единственного наблюдения. Воспользуемся первым наблюдением, тогда будет $\alpha \log 0.9520 = 1070$, а отсюда α (на основе Флакковских логарифмов) равно —50 194. Следовательно, для данного случая, если должно быть верным логарифмическое правило, следовало бы положить

$$-50\,194 \log E = x, \text{ или } \log \frac{1}{E} = \frac{x}{50\,194}.$$

Но если на основе этого уравнения положить для второго наблюдения $x = 1542$, то определится $E = 0.9317$; самое же на-

блюдение дает $E = 0.9364$. Разность между гипотезой и наблюдением составляет более $1^1/_2$ линии, что, конечно, является значительным по сравнению с обычно малой разностью вертикальных высот.

Далее, если для третьего наблюдения положить $x = 13\,158$, то на основании гипотезы получится $E = 0.5469$, между тем как опыт дал $E = 0.6257$. Эта разность является слишком большой, чтобы каким-либо образом можно было сохранить логарифмическое правило, ибо эта разница соответствует свыше чем 2 дюймам 2 линиям.

§ 25. Если отбросить логарифмическое правило, то отсюда следует, что упругости на различных высотах атмосферы ни в коем случае не пропорциональны плотностям, или, что приводит к тому же, что средняя степень теплоты на различных высотах неодинакова. Поэтому другие, надлежащим образом заметившие этот недочет, придумали другие правила, однако ни об одном из них нельзя сказать, чтобы оно в достаточной мере согласовывалось с опытом III (§ 23). Полагаю, что найти истинный закон, которого придерживается природа, является делом, на которое едва ли следует надеяться, ибо кто иначе, чем путем поверхностных догадок, постигнет отношение средних скоростей в воздушных частицах. Но я случайно напал на некую гипотезу, которая совсем неплохо соответствует явлениям. Однако раньше, чем перейти к этой специальной гипотезе, я дам кривую для любого закона скоростей.

§ 26. Пусть имеется вертикальная прямая AD (фиг. 59) и пусть горизонтальная прямая QF касается поверхности моря. Пусть BF обозначает среднюю скорость воздушных частиц у поверхности моря, BM — среднюю плотность и BQ — упругость, которая на всяком равно высоко расположенном месте одинакова. Представим себе, затем, проведенные через точки F, M, Q кривые EFH, LMO, PQS, или шкалы, которые на всех высотах, как BC, с помощью аппликат CG, CN, CR показывают средние скорости воздушных частиц, средние плотности и средние упругости. Теперь, если даны две кривые, то третью можно определить,

исходя из того, что упругости (как это показал опыт и как было пояснено в §§ 3, 4, 5 и 6) находятся приблизительно в отношении, составленном из квадрата упомянутых только что скоростей из первой степени плотностей.

Правда, в вышеупомянутом месте я сам указал, что эта пропорция не может быть в точности верной, так как воздух, хотя и может иметь бесконечно большую упругость или быть сжат бесконечно большой силой, но не может быть сгущен на действительно бесконечно малом пространстве. Но так как было установлено, что в воздухе, даже вчетверо более плотном естественного, указанное свойство, а именно, что упругости находятся в отношении, составленном из квадрата скоростей частиц и первой степени плотностей, повидимому, вполне соответствует показаниям опытов, то мы можем без какой-либо чувствительной погрешности воспользоваться этой пропорцией для естественного воздуха атмосферы, лежащей на море, так как она тем более точна, чем более разрежен воздух.

Подготовив это для вычисления, положим $BF=a$, $BM=b$, $BQ=c$, $BC=x$, $Cc=dx$, $CG=v$, $CN=z$, $CR=y$; и тогда будет $y:c=v^2z:a^2b$, или $y=\frac{cv^2z}{a^2b}$. Далее, так как мера упругости есть вес вышележащего воздуха, то будет $qR(-dy)$ равно весу слоя воздуха, лежащего между C и c, который пропорционален плотности воздуха z и высоте слоя dx. Таким образом, $-dy=\frac{zdx}{n}$, или $z=-\frac{ndy}{dx}$; если это значение подставить в уравнение $y=\frac{cv^2z}{a^2b}$, то получится

$$y=\frac{cv^2}{a^2b}\times-\frac{ndy}{dx},$$

или

$$-\frac{dy}{y}=\frac{a^2bdx}{ncv^2}.$$

§ 27. Если допустить, что скорость воздушных частиц на любой высоте одинакова, а именно равна a, то получится

$-\frac{dy}{y}=\frac{bdx}{nc}$, или, если произвести надлежащее интегрирование, $\log\frac{c}{y}=\frac{bx}{nc}$. Но, как мы видели в § 24, эта гипотеза недостаточно подтверждается опытами. Поэтому, испытывая другую гипотезу, я принял $v=\sqrt{(a^2+mx)}$, или $v^2=a^2+mx$, каковой закон существует при движениях свободно падающих тел, и это я сделал не без успеха. Действительно, при этом получается $-\frac{dy}{y}=$ $=\frac{a^2bdx}{na^2c+mncx}$, или $\log\frac{c}{y}=\frac{a^2b}{mnc}\log\frac{a^2+mx}{a^2}$.

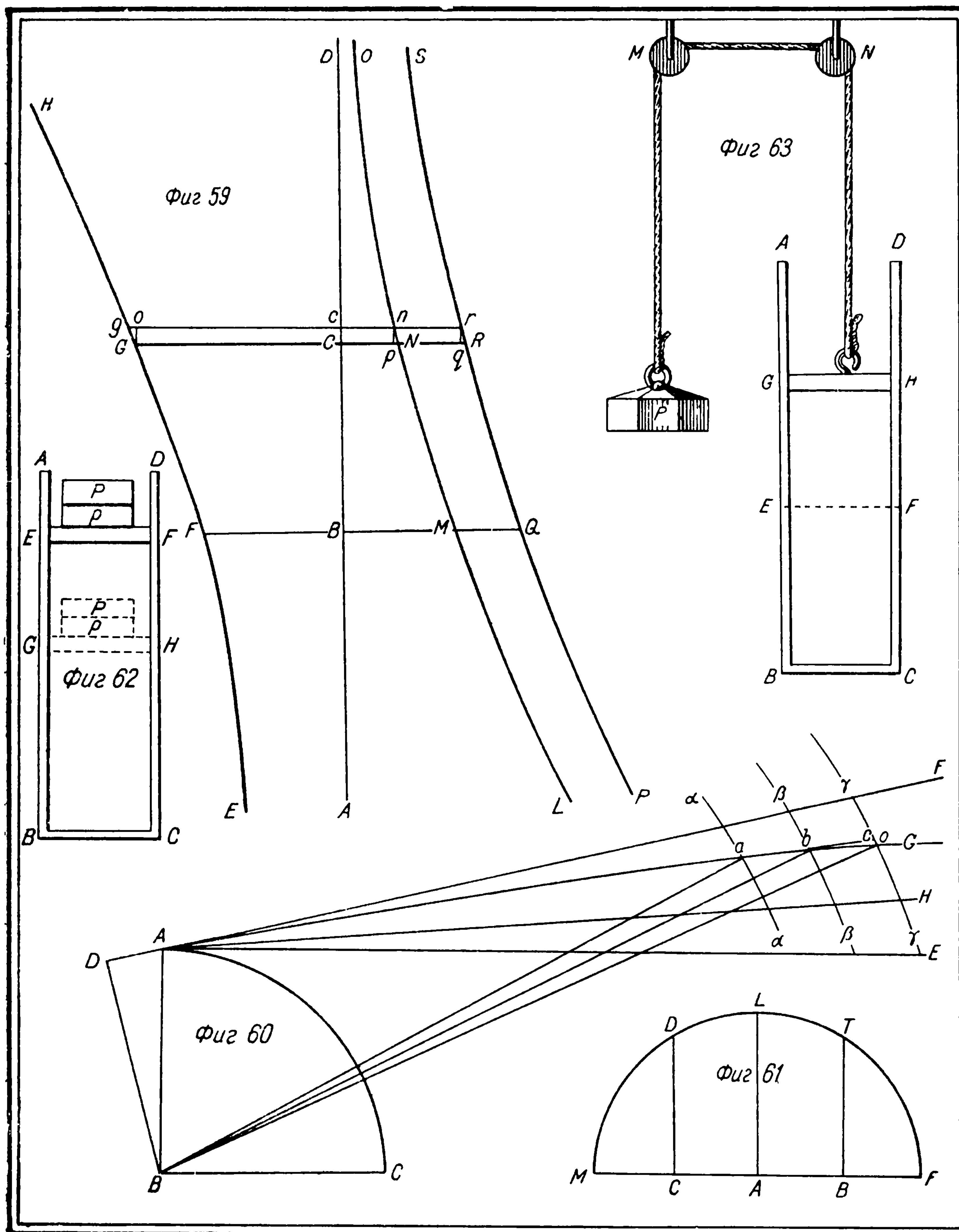
В этом несколько более общем уравнении, в котором m и n все еще являются произвольными, я затем попробовал, нельзя ли положить $\frac{a^2b}{mnc}=1$, и увидел, что и это тоже оказывается подходящим; действительно, при этом я получил $\log\frac{c}{y}=\log\frac{a^2+mx}{a^2}$, либо $\frac{c}{y}=\frac{a^2+mx}{a^2}$, или $\frac{y}{c}=\frac{a^2}{a^2+mx}$.

Эта гипотеза указывает, что упругости воздуха повсюду находятся в обратном отношении квадратов скоростей, с которыми колеблются воздушные частицы, или, другими словами, что CR относится к BQ, как BF^2 к CF^2, а также, что так как EFH, согласно этой гипотезе, представляет собой параболу, имеющую вершину на оси AD ниже точки B на расстоянии $\frac{a^2}{m}$, то отсюда следует, что кривая PQS есть гипербола. А вышеуказанное расстояние $\frac{a^2}{m}$, как я заметил, следует взять равным 22 000 футов, дабы оно приблизительно удовлетворяло наблюдениям § 23. Отсюда получается теперь такое специальное уравнение:

$$\frac{y}{c}=\frac{22\,000}{22\,000+x}.$$

Для кривой же LMO определяется $\frac{z}{b}$, равное (согласно § 26) $\frac{a^2y}{cv^2}$. Но $\frac{a^2}{v^2}=\frac{22\,000}{22\,000+x}=\frac{y}{c}$, тогда после подстановки получается

$$\frac{z}{b}=\left(\frac{22\,000}{22\,000+x}\right)^2.$$


Фиг 59
Фиг 60
Фиг 61
Фиг 62
Фиг 63

§ 28. Для того чтобы стало ясно, в какой мере наша гипотеза согласуется с опытами, указанными в § 23, подставим в уравнении для упругостей вместо x последовательно 1070, 1542, 13 158 и 65. Тогда получится соответственно: $\frac{y}{c} = 0.9536$, $\frac{y}{c} = 0.9345$, $\frac{y}{c} = 0.6257$ и $\frac{y}{c} = 0.99705$; наблюдения же дают: $\frac{y}{c} = 0.9520$, $\frac{y}{c} = 0.9364$, $\frac{y}{c} = 0.6257$ и $\frac{y}{c} = 0.9970$ [93]. Третье наблюдение, являющееся наиболее губительным для всех других гипотез, вполне согласуется с нашей гипотезой, а остальные наблюдения расходятся с нею не более, чем на 0.0019 делений, что на высоте барометра соответствует $^3/_5$ линии. Но столь малая разница не очень сильно обеспокоит всякого, кто знает уже, насколько шаткими и мало согласующимися между собой были барометрические наблюдения. В то же время я сам смотрю на это лишь как на временную гипотезу, и я привел вычисление §§ 26 и 27 только с той целью, чтобы показать причину, в силу которой может оказаться, что вертикальные высоты не соответствуют логарифмам барометрических высот, как это должно было бы иметь место, если бы теплота во всей атмосфере была равномерной; в самом деле, выполнив вычисление и сопоставив его с опытами, я, кажется, убедился в том, что этого нельзя удовлетворительно объяснить неодинаковым тяготением воздушных частиц на различных расстояниях от центра земли, как это предположил Ньютон, полагая, что тяготения этих частиц убывают в квадратном отношении расстояний от центра земли, каковая гипотеза до высот, не превосходящих 13 000 парижских футов, не дает заметной разницы с гипотезой однообразного тяготения. Аналогично этому и я когда-то напал на мысль, что в данном случае может имет некоторое влияние повышенная центробежная сила воздушных частиц на больших высотах; однако выполнив точно так же вычисление, я уже больше не стал придерживаться этого мнения. Но в то же время мне не кажется нелепым, если мы станем утверждать, что средняя теплота воздуха оказывается тем большей, чем дальше расстояние от поверхности моря. Но

я хотел бы как следует отметить, что в данном случае речь идет о с р е д н е й теплоте в свободной атмосфере. Может, конечно, случиться так, что по каким-либо другим причинам действительная теплота на горах не увеличивается, и все-таки на этом основании данная гипотеза не опровергается, так как в §§ 15 и 16 было уже доказано, что вес столба ртути в барометре не следует считать в точности равным весу воздушного столба, взятого в этой области, а среднему весу всех столбцов, стоящих над землей. Итак, насчет различных плотностей я придерживаюсь следующего мнения.

§ 29. Если бы теплота повсюду была одинакова, то, конечно, на первый взгляд, плотности оказались бы пропорциональными упругостям, а вертикальные высоты соответствовали бы логарифмам барометрических высот. Но это, я считаю, противоречит опытам; тем не менее я бы не думал, чтобы в двух местах, незначительно удаленных друг от друга, могла существовать большая разность теплоты, так как в более разреженном теле, каким является воздух, она скоро распределяется равномерно, если только не имеется постоянной причины, которая нагревает соседний воздух.

Но иначе дело обстоит в более отдаленных друг от друга местах; ведь я не нахожу нелепым утверждать, что под полюсами воздух даже вдесятеро плотнее, чем под экватором, если только повсюду брать воздух, расположенный очень близко к земле [94]; а на больших высотах разность между плотностью воздуха, соответствующего полюсам, и плотностью воздуха, соответствующего экватору, будет при прочих равных условиях меньшей; в силу этого над поверхностью земли плотности воздуха очень неравномерно убывают, причем под полюсами они убывают гораздо сильнее, чем под экватором. Таким образом, при этом может получиться, что под полюсами на небольших высотах фактические плотности воздуха вследствие возрастания теплоты убывают, например, в отношении $(22\,000+x)^4$ к $22\,000^4$, а под экватором они вследствие уменьшения телоты убывают едва заметно, каковое уменьшение теплоты вблизи экватора подтверждается тем, что вершина горы Пик в течение почти

10 месяцев бывает покрыта снегом, между тем как на самом острове Тенерифа, как говорят, снег никогда не выпадает. Таким образом, может оказаться не нелепым считать, что средние плотности уменьшаются в отношении $(22\,000+x)^2$ к $22\,000^2$, как это было принято в § 37, а упругости повсюду убывают в отношении $22\,000+x$ к 22 000; ибо на равных высотах от поверхности земли они не могут различаться между собой, разве только вследствие случайно привходящих и недолго длящихся причин.

В странах, расположенных между 40 и 60° широты, плотности, вероятно, убывают приблизительно в том же отношении, что и упругости. В силу этого я захотел испытать, какая на этой основе получается теория рефракций, о чем я теперь кое-что и прибавлю.

Отступление о рефракции лучей, проходящих через атмосферу

§ 30. (α) Хорошо известно и бесчисленными опытами подтверждено то свойство лучей, попадающих из одной среды в другую, что угол падения всегда сохраняет одно и то же отношение к углу преломления. Сверх того также ясно, что когда преломление оказывается бесконечно малым, т. е. когда разность между обоими синусами находится в бесконечно малом отношении к любому из этих синусов, то синус угла, взятого между продолженным падающим лучом и преломленным лучом, находится в таком же отношении к полному синусу, в каком разность между синусами углов падения и преломления находится к косинусу угла падения. Упомянутый же мною только что угол, образуемый продолженным падающим лучом и преломленным лучом, я в дальнейшем буду называть дифференциальным углом преломления. Отсюда следует, что при прочих равных условиях синус дифференциального угла преломления пропорционален синусу угла падения, разделенному на косинус того же угла.

(β) Далее опыты учат, что когда луч попадает из одного воздуха в другой, имеющий другую плотность, то при прочих равных условиях дифференциальный угол преломления пропорционален разности плотностей.

По этому вопросу были произведены весьма точные, насколько это возможно, опыты г-ном Гауксби [95], как с весьма сгущенным так и с весьма разреженным воздухом, который в конце концов, можно было считать как бы совершенно отсутствующим. Способ, каким были поставлены эти опыты, описан в английских научных журналах. Результат всех этих опытов сводится к тому, что когда луч попадал из естественного воздуха в пространство, из которого воздух был удален, под углом в 32°, то синус дифференциального угла преломления находился к полному синусу в отношении $5^1/_8$ дюймов к 2588 футам, т. е. в отношении 1 к 6060, и при тех же условиях при замене угла в 32° полупрямым углом — в отношении 1 к 3787 [согласно разделу (α)]. Отсюда получается, что когда луч попадает из естественного воздуха в вакуум под любым углом, то синус угла падения находится к синусу угла преломления в отношении 3787 к 3786.

Ньютон вместо этого отношения принимает в своем оптическом трактате то отношение, какое существует между 3201 и 3200, и выводит его из величины преломлений, наблюденной астрономами; но он полагает, что величина преломления одинакова, когда слои, преломляющие лучи, параллельны, в каком бы вообще отношении плотность среды ни убывала, если только в первом и последнем слое разность плотностей остается одинакова (см.: Neut. tract. opt., Paris, стр. 321) [96]. В конце концов при различных сопутствующих обстоятельствах преломление не может не быть очень изменчивым, так как воздух, который мы называем естественным, подвержен многим изменениям как от теплоты и холода, так и от давления атмосферы, каковые оба явления одновременно влияют на образование плотности воздуха, а преломления лучей, попадающих в вакуум, при прочих равных условиях пропорциональны этим плотностям. На это же указал Гауксби при изложении упомянутых только что опытов, и по этой причине он надлежащим образом определил состояние воздуха, в каком он находился во время проведения опытов.

(γ) Пусть теперь *AC* (фиг. 60) представляет собой дугу земного круга, проведенную из центра *B*, и в плоскости этого круга

имеется луч света AG. Этот изогнутый луч AG обладает тем свойством, что он приближается к ассимптоте, причем мы допустим, что прямая AH параллельна этой ассимптоте. Проведем горизонтальную прямую AE и прямую AF, касающуюся в A кривой AG. Таким образом, мы видим, что угол HAE является мерой истинной высоты звезды, угол FAE — мерой кажущейся высоты, а угол FAH является углом преломления. При этом угол FAH представляет собой не что иное, как сумму всех дифференциальных углов преломления, т. е. углов смежности, каковым является угол $c^l o$.

Рассмотрим два элемента кривой ab, bo и представим себе проведенные из общего центра B через точки a, b, o дуги $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$; пусть плотность воздуха $\alpha\alpha\beta\beta$ равна D, плотность воздуха $\beta\beta\gamma\gamma$ равна $D - dD$. Тогда [согласно пунктам (α), (β)] синус угла смежности в b, разделенный на полный синус, т. е. самый угол смежности, будет пропорционален разности плотностей dD, умноженной на отношение синусов углов падения и преломления, т. е. умноженной на $\frac{be}{eo}$ [97]. А если провести прямую BD, перпендикулярную к продолженной прямой FA, то ясно, что $\frac{be}{eo}$ и $\frac{BD}{Do}$ будут едва отличаться друг от друга, так как луч является почти прямым, и, таким образом, треугольник BDo можно рассматривать как прямолинейный и подобный треугольнику beo. Таким образом, рассматриваемый угол FAH будет пропорционален $\int \frac{BD}{Do} \times dD$.

(δ) Продолжая идти тем же путем и принимая, что повсюду плотность $D = \frac{22\,000}{22\,000 + x} G$, где x выражает линию na в парижских футах, а G обозначает плотность воздуха в месте наблюдения, я нашел нижеследующее. Пусть синус кажущейся высоты звезды равен f, косинус равен F, радиус земли равен r, выраженному в парижских футах. Обозначим число 22 000 через a. Пусть далее полный синус принят равным 1, пусть дифференциальный угол преломления для луча, падающего из естествен-

ного воздуха в вакуум под полупрямым углом, равен q. Наконец, пусть ради краткости будет принято $2r-2a=\alpha$ и $-F^2r^2+2ar-a^2=\beta$. Тогда β будет либо положительным, либо отрицательным числом. Оно будет положительным, когда кажущаяся высота звезды будет незначительной, а именно ниже 2°44′; в противном случае оно будет отрицательным числом. В первом случае искомый угол FAH определится следующим образом. Проведем полуокружность MLF (фиг. 61), радиус которой, AM, равен 1. Возьмем $AC=\frac{\alpha}{2fr}$, $AB=\frac{2\beta-\alpha a}{2afr}$ и проведем CD и BT перпендикулярно к MF. Тогда угол FAH (фиг. 60) будет равен

$$-\frac{fFr^2}{2\beta}g+\frac{far}{\beta}g+\frac{far\alpha\times DT}{2\beta\sqrt{\beta}}g.$$

В том случае, когда β отрицательно, тот же угол FAH будет равен

$$-\frac{far}{\beta}g+\frac{fFr^2}{\beta}g+\frac{far\alpha}{2\beta\sqrt{\beta}}g\times\log\frac{(\alpha-2\sqrt{\beta})\times(Fr-a+\sqrt{\beta})}{(\alpha+2\sqrt{\beta})\times(Fr-a-\sqrt{\beta})}.$$

(ε) Если на основе вышеизложенных допущений положить для радиуса земли 19 600 000, то можно будет для любой высоты кажущейся звезды определить ее астрономическую рефракцию, если на опыте хорошо определить значение угла g. Но так как очень трудно определить это значение с достаточной точностью, то будет осторожнее определить рефракцию астрономическим путем в каком-нибудь частном случае, а из него путем вычисления вывести остальные. Примем, например, что на высоте в 10° рефракция составляет 5 мин. 28 сек., к каковому допущению примыкает большинство астрономов в Париже. Тогда мы легко составим таблицу рефракции (см. табл. 1 на стр. 312).

Так как рефракции следуют отношению буквы g, т. е. дифференциального угла преломления луча, падающего под полупрямым углом из естественного воздуха в вакуум, и так как этот угол пропорционален плотности естественного воздуха, т. е. воздуха, которым дышит наблюдатель, то ясно, что если бы воздух был даже постоянно одинаково нагружен парами (от которых

Таблица 1

Кажущаяся высота звезды	Рефракция	Кажущаяся высота звезды	Рефракция
0°	34 мин. 53 сек.	50°	0 мин. 53 сек.
5	9 » 59 »	55	» $44^1/_3$ »
10	5 » 28 »	60	» $36^1/_2$ »
15	3 » 44 »	65	» $29^1/_2$ »
20	2 » 52 »	70	» 23 »
25	2 » 12 »	75	» 17 »
30	1 » 47 »	80	» $11^1/_4$ »
35	1 » 29 »	85	» $5^1/_2$ »
40	1 » 15 »	90	» 0 »
45	1 » 3 »		

мы до сих пор отвлекались), то все-таки не могло бы получиться так, чтобы астрономические рефракции оказались весьма различными. Они будут, конечно, бóльшими на поверхности моря, чем на горах, и разница будет заметна даже на незначительных высотах гор. Кроме того, они будут бóльшими в холодное время, чем в теплое, и одна эта причина может в этих местах увеличить рефракции по меньшей мере на $^1/_4$ их часть; наконец, рефракции будут также бóльшими при высоком давлении, чем при низком. А если бы со стороны паров не было никаких помех, то рефракции можно было бы точно определять в любое время, применяя прибор, описанный в § 9 и представленный на фиг. 57, вместе с барометром. Действительно, если разделить высоту ртути в барометре на высоту ртути во втором приборе, то получится плотность воздуха, которую при прочих равных условиях следует принять пропорциональной рефракции. И я не сомневаюсь в том, что рефракция солнца меньше рефракции остальных светил, так как солнечная теплота не в малой степени расширяет воздух и уменьшает его плотность.

§ 31. Из того, что было указано о колебании воздушных частиц, от которого, конечно, зависит теплота воздуха, и в осо-

бенности из того, что было сказано в § 10, ясно, что в воздухе имеется одна и та же степень теплоты во всех тех случаях, когда существует одно и то же отношение между его упругостью и плотностью. Упругость показывает барометр, о плотности мы заключаем на основании удельного веса воздуха; отсюда, как мы видели в § 10, можно получить вполне определенную степень теплоты, если теплота кипящей воды кажется ненадежной, так как, согласно наблюдениям г-на Фаренгейта [98], она зависит от веса лежащей наверху атмосферы. Легко можно придумать приборы, показывающие в каждый отдельный момент времени плотность воздуха, и многими они были описаны.

Здесь следует отметить, что упомянутое только что отношение между упругостью воздуха и его плотностью дает одновременно высоту однородного воздуха, а так как дальше у нас будет речь об этой высоте, то представляется уместным ее точно определить раньше, чем мы перейдем к другим вопросам.

§ 32. Если мы вообразим вертикальный столб воздуха равномерной плотности, приведенный в равновесие со ртутью барометра, то высота этого столба будет тем, что я называю **высотой однородного воздуха** при данной плотности.

А так как удельный вес средне-плотного воздуха относится к удельному весу ртути, как 1 к 11 000, а сама средняя высота ртути в барометре для мест, незначительно возвышающихся над поверхностью моря, составляет $2^1/_3$ парижских футов, то высота однородного средне-плотного воздуха будет равна 25 666 футам [99].

Из этого определения ясно, что высоты, о которых у нас теперь идет речь, бывают тем меньше, чем плотнее воздух, которому должна соответствовать высота, и чем меньше высота ртути в барометре. Следовательно, когда степень теплоты на горах и на поверхности моря одинакова, то и тут и там будет одинаковой и высота однородного воздуха, так как при одной и той же степени теплоты воздуха плотности следуют упругостям воздуха или высотам ртути в барометре. Далее ясно, что высота одно-

родного воздуха на поверхности моря сильно убывает от экватора по направлению к полюсам, так как холод усиливается, и плотность воздуха возрастает при неизменяющейся упругости, и что в одних и тех же местах она меньше в зимнее время, чем в летнее.

§ 33. Имеется много вопросов, относящихся к определению движения воздуха, разрешение которых связано с высотой однородного воздуха. Среди них имеется также вопрос о распространении звука и его скорости. Действительно, хотя с помощью различных методов, которые мы можем себе вообразить о распространении звука, его скорость определяется таким образом, что в одном случае кажется, будто эта скорость соответствует высоте однородного воздуха, в другом, что она соответствует половине высоты, или также половине высоты, умноженной на отношение квадрата, описанного около круга, к площади круга, однако все мнения сходятся на том, что скорость звука пропорциональна корню из высоты воздуха, однородного с тем воздухом, в котором звук распространяется. Если дело обстоит таким образом, то звук распространяется быстрее в теплом воздухе, чем в холодном, и при высоком давлении, чем при низком (я ничего не говорю о благоприятствующих ветрах или о противных). По этому поводу было произведено много опытов, частью в Италии, частью в Англии, и эти последние показали, что средняя скорость звука соответствует 1140 английским футам, проходимых в течение 1 сек. А так как в одном и том же месте высота однородной атмосферы меняется, а именно в этих местах она под влиянием барометрических изменений, соединенных с изменениями теплоты, колеблется от 3 до 4, то скорость звука повсюду изменяется, хотя бы ветры на нее нисколько не влияли; а в этих местностях та же скорость удерживается в границах от $\sqrt{3}$ до $\sqrt{4}$, т. е. в границах от 173 до 200 [[100]].

§ 34. Я перехожу теперь к разрешению различных, какие можно себе вообразить, вопросов о движении воздуха, аналогичных тем вопросам, какие мы раньше имели о движении неупругих жидкостей.

Задача

Требуется определить движение воздуха, вырывающегося из сосуда через малое отверстие в бесконечно большое пространство, свободное от воздуха.

Решение

Из природы вопроса явствует, что местное движение внутреннего воздуха, благодаря которому он расширяется, в то время как определенная часть его вырывается через отверстие, является незначительным. Следовательно, в данном случае надлежит принять во внимание лишь потенциальный подъем, приобретаемый воздушной частицей во время ее выхода наружу, и сравнить его с действительным снижением или, лучше, с уменьшением упругости, которую имеет внутренний воздух. А для того чтобы все это свести к нашему методу, примененному для неупругих жидкостей, рассмотрим вертикальный цилиндр, имеющий сечение, одинаковое с предложенным сосудом, и такую же высоту, какова высота воздуха, однородного с внутренним воздухом; а этот цилиндр, если мы будем считать, что он целиком заполнен подобным же воздухом, но неупругим, будет своим весом выталкивать через отверстие внутренний воздух с такой же скоростью, с какой воздух в предложенном сосуде сам себя выталкивает благодаря своей упругости. Но в первом случае он выталкивается со скоростью, которая соответствует высоте цилиндра; стало быть, так же и во втором. Следует при этом отметить, что высота, которую мы вообразили себе у цилиндра, остается все время одинаковой, так как упругость и плотность уменьшаются в одинаковом отношении, а теплота, как мы допускаем, не изменяется. Таким образом, если высоту однородного воздуха (которая зависит от температуры внутреннего воздуха) назвать A, то воздух будет постоянно вытекать со скоростью $\sqrt{A}$. Однако, на что указывает вычисление, самый сосуд никогда не освобождается, так как вытекающий воздух становится все время более редким; для того чтобы выразить это с помощью уравнения, положим, что плотность, или количество

воздуха, в начале течения равна 1, плотность или количество воздуха, оставшегося спустя определенное время, равны x, а само время равно t; тогда в силу того, что скорость является постоянной, будет $-dx = axdt$, где под a подразумевается постоянная величина, которая должна быть определена, исходя из величины сосуда, величины отверстия и высоты A. Отсюда $-\frac{dx}{x} = adt$ и $\log\frac{1}{x} = at$; значение же коэффициента a определяется следующим образом. Так как нами было принято $-dx = axdt$, то в начале движения будет $-dx = adt$. Теперь первый элемент $(-dx)$ превратится в цилиндр, построенный на отверстии, как на основании; высота же этого цилиндра будет равна $(-Ldx)$, если L представляет собой высоту цилиндра, построенного на том же отверстии и имеющего такой же объем, как предложенный сосуд. Далее, эта высота $(-Ldx)$ является той высотой, которая проходится за малое время, а так как это малое время обычно принимают равным пройденному пути, разделенному на скорость, то в данном случае будет $dt = -\frac{Ldx}{\sqrt{A}}$. Если это значение подставить в уравнение $-dx = adt$, то получится $-dx = -\frac{aLdx}{\sqrt{A}}$, или $a = \frac{\sqrt{A}}{L}$. В силу этого получается следующее окончательное уравнение:

$$\log\frac{1}{x} = \frac{t\sqrt{A}}{L}.$$

Если угодно выразить время с помощью определенного числа секунд, которое мы назовем n, и если под s подразумевать пространство, проходимое в течение 1 сек. телом, падающим свободно из состояния покоя, то следует положить $t = 2n\sqrt{s}$; таким образом, получится

$$\log\frac{1}{x} = \frac{2n\sqrt{As}}{L}.$$

Задача

§ 35. Требуется определить движение более плотного воздуха, вырывающегося из сосуда через очень малое отверстие в бесконечно большой внешний более редкий воздух при допущении, что тот и другой воздух обладает одной и той же степенью теплоты.

Решение

Пусть начальная плотность внутреннего воздуха равна D, плотность внешнего воздуха равна δ, плотность внутреннего воздуха, оставшегося спустя заданное время t, равна x, высота однородного воздуха (по отношению к внутреннему воздуху или же к внешнему, ибо это отношение не может быть неодинаковым, если тот и другой воздух обладает одинаковой теплотой и, таким образом, плотности и упругости убывают в одинаковом отношении) равна A. Определим повсюду высоту однородного воздуха, имеющего то же давление или упругость, как и внешний воздух, и плотность которого одинакова с плотностью внутреннего воздуха. Эта высота в начале составит $\frac{\delta A}{D}$, а по истечении времени t будет равна $\frac{\delta A}{x}$. Ясно, что скорость вырывающегося воздуха будет повсюду такой, какая соответствует разности определенных выше высот A и $\frac{\delta A}{x}$; таким образом, спустя время t скорость вырывающегося воздуха будет равна $\sqrt{A-\frac{\delta A}{x}}$.

Далее, убыли плотностей ($-dx$) пропорциональны количествам вырывающегося воздуха, которые обладают отношением, составленным из скорости $\sqrt{A-\frac{\delta A}{x}}$, из плотности x и из малого времени dt. Таким образом, получается

$$-dx=a\left(\sqrt{A-\frac{\delta A}{x}}\right)xdt,$$

где a — постоянное число, которое, согласно методу предыдущего параграфа, оказывается равным $\frac{1}{L}$, при сохранении значения этой

буквы, примененного там же. После подстановки этого значения получается

$$-dx = \frac{dt}{L} \times \sqrt{Ax^2 - \delta Ax}, \text{ или } -\frac{dx}{\sqrt{x^2 - \delta x}} = \frac{dt\sqrt{A}}{L},$$

а если выполнить надлежащее интегрирование, то будет

$$\log \frac{[\sqrt{x} - \sqrt{x - \delta}] \times [\sqrt{D} + \sqrt{D - \delta}]}{[\sqrt{x} + \sqrt{x - \delta}] \times [\sqrt{D} - \sqrt{D - \delta}]} = \frac{t\sqrt{A}}{L},$$

или, если снова, как в предыдущем параграфе, положить $t = 2n\sqrt{s}$, то будет

$$\log \frac{[\sqrt{x} - \sqrt{x - \delta}] \times [\sqrt{D} + \sqrt{D - \delta}]}{[\sqrt{x} + \sqrt{x - \delta}] \times [\sqrt{D} - \sqrt{D - \delta}]} = \frac{2n\sqrt{As}}{L}.$$

Следствие 1

§ 36. Все вытекание происходит за конечное время; в этом данный вопрос отличается от ранее разобранного. Воздух перестает вытекать, когда $x = \delta$; тогда получается

$$n = \frac{L}{2\sqrt{As}} \times \log \frac{\sqrt{D} + \sqrt{D - \delta}}{\sqrt{D} - \sqrt{D - \delta}}.$$

Пусть, например, $A = 26\,000$ парижских дюймов; пусть предложенный сосуд содержит в себе 1 куб. фут, а отверстие имеет сечение в 1 кв. линию; тогда L будет равно 20 736; положим сверх того, что внутренний воздух по началу был вдвое плотнее внешнего, и, как известно, $s = 15^1/_{12}$ парижских футов. Таким образом, получится

$$n = \frac{20\,736\,\sqrt{3}}{\sqrt{181 \cdot 26\,000}} \lg \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 29.2;$$

это показывает, что наружный и внутренний воздух придет в равновесие за время, несколько большее 29 сек., и что после этого вытекание совершенно прекратится. Но может случиться, что вследствие сжатия, которое жидкости испытывают перед отверстием (см. часть четвертую), а мы его совершенно не приняли во внимание при вычислении, указанное время увеличится почти в отношении 1 к $\sqrt{2}$.

Следствие 2

§ 37. Если представить себе, что воздух вытекает не непосредственно через отверстие, а через длинную трубу, то скорость вследствие этого не изменится, если только емкость всей трубы как бы бесконечно мала по сравнению с емкостью самого сосуда. При этом может показаться, что плотность воздуха, пока он находится в трубе, одинакова с плотностью воздуха, заключающегося в сосуде; однако, как я это покажу ниже, упругость воздуха в трубе не больше упругости наружного воздуха, окружающего трубу. Отсюда следует, что движущийся воздух плотнее покоящегося, но не более его упруг. Однако эта разность плотностей очень незначительна [101]. Действительно, ветер, проходящий даже 30 футов в каждую секунду, превзойдет по плотности соседний воздух, одинаково теплый и неподвижный, едва на 1/1700 часть.

Задача

§ 38. Определить затекание воздуха через очень малое отверстие в сосуд, заполненный более редким воздухом, если снова допустить, что и тот и другой имеют одинаковую степень теплоты.

Решение

Пусть сосуд сначала совершенно свободен от воздуха, а спустя время t пусть плотность внутреннего воздуха равна x; тогда, становясь на почти тот же путь, каким мы воспользовались в § 35, и сохраняя те же обозначения, можно будет найти

$$\frac{dx}{\sqrt{\delta - x}} = \frac{dt\sqrt{AD}}{L} \quad \text{или} \quad t = 2n\sqrt{s} = \frac{2L}{\sqrt{A}} - \frac{2L\sqrt{D-x}}{\sqrt{AD}}.$$

Таким образом, число секунд, за какое весь сосуд наполняется, пока установится равновесие между тем и другим воздухом, выражается через $\frac{L}{As}$, и время заполнения будет вдвое больше того, за какое он заполнился бы, если бы воздух все время затекал с начальной скоростью. В том случае, когда емкость

сосуда составляет 1 куб. фут, а отверстие равно 1 кв. линии, заполнение происходит за время приблизительно в 33 сек., если только заполнение не замедляется вследствие сжатия затекающей воздушной струи [102].

§ 39. Мы изложили различные свойства упругих жидкостей, движущихся или же покоящихся. Остается не упустить еще одного, чем упругие жидкости отличаются от неупругих, а именно, что упругой жидкости, даже покоящейся, присуща живая сила, но не в том смысле, что подобно другим движущимся телам она в состоянии подняться на известную высоту, ибо мы не рассматриваем здесь местного в ней движения, а в том смысле, что своей упругостью она может вызвать подобный подъем в других весомых телах. Мне будет, надеюсь, разрешено в дальнейшем воспользоваться выражением «живая сила, присущая сжатому упругому телу», когда под ним подразумевается не что иное, как потенциальный подъем, который упругое тело может сообщить другим телам раньше, чем оно утратит всю свою упругую силу.

Здесь заслуживает наперед быть отмеченным, что подобно тому, как если каким-либо образом происходит падение заданного тела с заданной высоты, то оно всегда порождает в теле одну и ту же живую силу, точно так же и пружина или упругая жидкость, после того как она каким-либо образом была переведена из данной степени напряжения или сгущения в другую заданную степень, всегда воспринимает одну и ту же живую силу и может в свою очередь обратным изменением сообщить ее другому телу.

О живых силах этого рода, присущих сжатому упругому телу, и об их измерениях я теперь вкратце поведу речь. Эта тема заслуживает внимания, так как с ее помощью устанавливаются меры сил для приведения в движение машин с помощью воздуха или огня или иных подобного рода движущих сил, из которых множество новых, вероятно, может быть придумано в будущем при очень сильном росте и усовершенствовании практической механики.

§ 40. Для того чтобы начать с воздуха в пустоте, рассмотрим вертикально поставленный цилиндр $ABCD$ (фиг. 62) с поршнем EF, который, будучи лишенным всякого веса, может весьма свободно передвигаться вверх и вниз. Пусть в пространстве $EBCF$ содержится воздух, а весь цилиндр вообразим себе помещенным в пустоте. Пусть давление воздуха в $EBCF$ таково, что оно в состоянии поддержать груз p, который равен давлению столба атмосферы, когда этот воздух является естественным. Пусть теперь прибавляется другой груз P; тогда произойдет то, что поршень снизится в GH и будет колебаться попеременным движением до точек H и F. Для того чтобы определить это движение, воспользуемся обычным допущением, что давления воздуха при прочих равных условиях пропорциональны плотностям.

Итак, пусть $FC = a$, $FH = x$, и скорость поршня в положении $GH = v$; тогда давление, побуждающее поршень GH к дальнейшему снижению, будет равно $P + p - \frac{a}{a-x}p$; этому давлению следует считать равной силу, которая воздействует на груз, лежащий на поршне. Следовательно, если разделить эту силу на массу, то получится ускоряющая сила, которая, будучи умножена на малый отрезок времени, т. е. на $\frac{dx}{v}$, даст приращение скорости dv. Таким образом,

$$dv = \left(P + p - \frac{ap}{a-x}\right) \times \frac{dx}{v} : (P + p)$$

или

$$\frac{1}{2}(P + p)v^2 = (P + p)x - ap\log\frac{a}{a-x}\,.$$

Но благодаря падению груза $(P + p)$ с высоты x возникает потенциальная живая сила $(P + p)x$, а когда поршень находится в положении GH, то телу $(P + p)$ присуща действительная живая сила $\frac{1}{2}(P + p)v^2$, т. е.

$$(P + p)x - ap\log\frac{a}{a-x}\,,$$

которая меньше вышеприведенной силы на величину $ap \log \frac{a}{a-x}$, и эта последняя переходит в сжатие воздуха.

Итак, я утверждаю, что воздух, занимающий пространство a, не может быть сгущен на пространстве $a-x$ без того, чтобы не была затрачена живая сила, вызываемая падением груза p с высоты $a \log \frac{a}{a-x}$, каким бы образом ни было выполнено это сжатие; оно может быть выполнено бесчисленным множеством способов. Я поясню теперь это правило на нескольких примерах.

Пусть основание цилиндра составляет 1 кв. фут, начальная высота его FC — 2 фута, и пусть в пространстве BF содержится воздух, каким он в среднем обычно бывает на поверхности земли, могущий поддержать на поверхности EF 2240 фунтов. Положим $x=1$, дабы таким образом получилась живая сила, способная в пустоте сжать 2 куб. фута естественного воздуха в пространство 1 фута. Эта живая сила будет равна $2 \times 2240 \times \log 2 = 3105$, т. е. она будет такой, какая вызывается свободным падением тела в 3105 фунтов с высоты 1 фута. Стало быть, и обратно, если имеется 1 куб. фут воздуха, вдвое плотнее естественного, то при посредстве него можно, пока он воспримет плотность естественного воздуха, поднять в пустоте груз в 3105 фунтов на высоту 1 фута.

Пусть далее при прочих неизменных обстоятельствах тот же воздух распространяется на вдвое большее, чем это было раньше, пространство и занимает теперь в цилиндре высоту в 4 фута, и пусть он снова сгущается в пространство в 1 куб. фут; тогда для этого сжатия потребуется живая сила, выражающаяся через $4 \times 1120 \log 4$, каковая вдвое больше предыдущей. Таким образом, если в пустоте имеется 1 куб. фут воздуха, вдвое плотнее естественного, то с его помощью можно поднять груз в 6210 фунтов на высоту 1 фута, пока он получит половину плотности естественного воздуха, или груз в 9315 фунтов, пока он станет вчетверо реже естественного воздуха.

Отсюда следует, что если воздух может расшириться на бесконечно большом пространстве и повсюду сохраняет упругость, пропорциональною плотности, то конечному количеству воздуха присуща бесконечно большая живая сила.

§ 41. Вышеизложенное относится к оценке живой силы, которая присуща воздуху, помещенному в пустоте. Несколько иначе производится вычисление для более плотного воздуха, помещенного в атмосфере. А именно, в данном случае максимальная степень расширения не может простираться дальше равновесия с воздухом атмосферы. Отсюда легко наперед предвидеть, что если, например, имеется 1 куб. фут воздуха, который вдвое плотнее естественного, то живая сила, которая может быть извлечена из этого сжатого воздуха в атмосфере, ни в коем случае не является бесконечно большой. Подобного рода живые силы могут быть определены нижеследующим образом.

§ 42. Пусть $EBCF$ представляет собой естественный воздух и пусть он находится в равновесии с наружным воздухом. Будем подразумевать под p давление атмосферы на поршень EF, которое находится, конечно, в равновесии с давлением внутреннего, еще не сгущенного воздуха. Положим на тот же поршень груз P; пусть теперь воздух сгустится в пространство $GBCH$, и пусть поршень, отягченный грузом P, обладает в положении GH скоростью v; тогда, если сохранить остальные обозначения, будет

$$dv=\left(P+p-\frac{ap}{a-x}\right)\times\frac{dx}{v}:P,$$

или

$$Pvdv=\left(P-\frac{xp}{a-x}\right)dx,$$

что после интегрирования дает

$$\frac{1}{2}Pv^2=Px+px-ap\log\frac{a}{a-x}\,.$$

Но при падении груза P с высоты x возникла **живая сила** Px; в грузе, поскольку он движется со скоростью v, име-

ется часть ее $^1/_2 Pv^2$, или $Px + px - ap \log \frac{a}{a-x}$; таким образом, часть ее, перешедшая к воздуху, равна $-px + ap \log \frac{a}{a-x}$, что меньше другой части, определенной в § 40.

Так, например, пусть имеется 1 куб. фут воздуха, вдвое плотнее естественного; тогда мы находим, что живая сила, которую теряет этот воздух, пока он принимает плотность окружающего естественного воздуха, равна той, какая возникает при свободном падении тела в 865 фунтов с высоты 1 фута.

На том же основании понятно, что 1 куб. фут воздуха, втрое плотнее естественного, обладает такой живой силой, какая соответствует свободному падению тела в 2898 фунтов с высоты в 1 фут, каковое число получается, если положить, как в § 40, $p = 2240$, $a = 3$ и $x = 2$.

§ 43. Из этого соответствия между сохранением живых сил, присущих сжатому воздуху, и телу, упавшему с заданной высоты, ясно, что не следует надеяться на какое-либо преимущество со стороны начала сжатого воздуха для улучшения машин, и что повсюду сохраняют силу те правила, которые были изложены в предыдущей части. Но так как многими путями получается так, что воздух сжимается или приобретает упругость большую, чем у естественного воздуха, не благодаря силе, а благодаря природе, то, конечно, имеется надежда, что с помощью этого рода естественных явлений можно будет придумать большие выгоды по приведению в движение машин [103]; вроде того способа приведения в движение машин с помощью силы огня, который был уже предложен г-ном Амонтоном. Я уверен в том, что если с пользой затратить на приведение в движение машин всю ту живую силу, какая скрывается в 1 куб. футе угля и извлекается из него путем сжигания, то отсюда можно получить больше пользы, чем от дневной работы восьми или десяти людей. Ибо угли, сгорая, не только необыкновенно увеличивают упругость воздуха, но и создают огромное количество нового воздуха [104].

Так, Галезий [105] в veget. statiks нашел, что из $^1/_2$ дюйма угля образовалось 180 дюймов воздуха такой же упругости, как

у естественного воздуха; следовательно, 1 куб. фут углей даст воздуха до 360 куб. футов. Но если бы в § 41 требовалось определить живую силу, которая может быть вызвана 1 куб. футом воздуха, в 360 раз более плотным, чем естественный, то было бы найдено, что она соответствует грузу в 3 938 000 фунтов, упавшему с высоты 1 фута; а если сверх того допустить, что упругость этого воздуха становится вчетверо большей благодаря теплоте сожженных углей, то эта живая сила соответствует грузу 15 752 000 фунтов, упавшему с той же высоты. Трудно, однако, придумать машину, подходящую для этой цели. Имеется сверх того много других естественных вещей, которые не только благоприятствуют сжатию воздуха, но, обогревая окружающий воздух, могут сделать его более упругим. Таковы живая известь, смешанная со сладкой водой, и все вещества, вызывающие брожение. Воде, которая силой огня превращена в пары, присуща невероятная сила: в Лондоне существует для этого весьма остроумная машина, которая при посредстве этого начала движения снабжает весь город водами, и эту машину описал знаменитый Вейдлер. Но особенно заслуживает исследования поразительный эффект, которого можно ждать от воспламенившегося пороха. Действительно, путем вычисления, которое я изложу ниже, выполненного на основании некоторых произведенных опытов, я установил, что упругость воспламененного пороха более чем в десять тысяч раз превышает упругость естественного воздуха, а если надлежащим образом взвесить все, то становится вероятным, что его упругость неимоверно выше. Допустим, что упругость газа взорвавшегося пороха убывает в таком же отношении, как его плотность. При этих допущениях определится живая сила, присущая 1 куб. футу пороха, если в § 42 положить

$$a = 10\ 000,\ x = 9999,\ p = 2240 \text{ и взять } -px + ap \log \frac{a}{a-x},$$

каковая величина оказывается тогда равной 183 913 864. Таким образом, теоретически получается машина, которая с помощью 1 куб. фута пороха может поднять 183 913 864 фунта на высоту 1 фута; а этой работы, я полагаю, не могли бы выполнить даже

сто весьма сильных людей в течение одного дня, какой бы машиной они ни воспользовались. Но, как я сказал, представляется вероятным, что эффект от пороха оказывается еще гораздо большим; во всяком случае он не меньше, ибо вычисление основывается на высоте, до которой может подняться в пустоте железный шар, выброшенный из военного орудия; а при этого рода опытах очень большая часть пороха пропадает.

Но изложенное выше становится понятнее, если указать, что то же вычисление (которое мы раньше произвели для обоснования эффекта, вызываемого восстанавливающимся сгущенным воздухом) выполняется и для воздуха, который хотя и не является более плотным, чем окружающий естественный воздух, но становится более упругим вследствие увеличившейся теплоты. Так, например, всякий раз, когда 1 куб. фут обыкновенного воздуха приобрел благодаря увеличению теплоты удвоенную упругость, он в состоянии с ее помощью поднять груз в 865 фунтов на высоту 1 фута, если только применяется весьма совершенная машина.

Эффекты всех описанных здесь вещей связаны с увеличением как плотности, так и теплоты воздуха.

§ 44. В то же время живую силу, которую можно использовать для приведения в движение машин, представляется возможным получить не только от сгущенного или нагретого воздуха, но и от разреженного или охлажденного воздуха. Ибо везде, где нарушено равновесие, имеется на лицо живая сила, которая может быть использована, если придумать надлежащую машину для подъема грузов и для вращения машин. А метод определения живой силы, которая может быть добыта из воздуха заданной плотности и заданной теплоты, занимающего заданное пространство, если изменить то, что подлежит изменению, остается тем же, что мы изложили в § 42.

§ 45. Действительно, пусть снова имеется вертикальный цилиндр *ABCD* (фиг. 63) с подвижным поршнем *EF*. Допустим, что воздух *EBCF*, как и в § 42, является естественным и что он находится в равновесии с наружным воздухом; давление того

и другого воздуха на EF обозначим через p. Вообразим затем, что груз P связан с поршнем с помощью веревки, переброшенной через два блока M и N, и тянет ее по направлению к AD, и что таким образом поршень переместится из положения EF в GH. Наконец, вновь примем $FC = a$, $FH = x$, скорость диафрагмы в положении GH, или груза в положении P, равной v. Если, приняв это, применить §§ 40 и 42, то станет ясно, что в данном случае получится

$$dv = \left(P + \frac{ap}{a+x} - p\right) \times \frac{dx}{v} : P,$$

или

$$Pvdv = \left(P - \frac{px}{a+x}\right) dx,$$

что после интегрирования дает

$$\frac{1}{2} Pv^2 = Px - px + ap \log \frac{a+x}{a}.$$

И вот снова падение груза P с высоты x создало живую силу Px, между тем как одновременно самому грузу, движущемуся со скоростью v, присуща лишь живая сила $\frac{1}{2} Pv^2$, или $Px - px + ap \log \frac{a+x}{a}$. Таким образом, избыточная живая сила, а именно $px - ap \log \frac{a+x}{a}$, перешла к воздуху, и путем восстановления равновесия между внутренним и наружным воздухом эта живая сила может быть по желанию снова сообщена другим телам. Таким образом, если ты имеешь пространство $GBCH$, заполненное воздухом, плотность которого относится к плотности наружного воздуха, как CF к CH, то в твоем распоряжении находится живая сила $px - ap \log \frac{a+x}{a}$.

А связана ли эта живая сила собственно с наружным воздухом или с внутренним, это представляет собой спор о словах; достаточно того, что путем нарушения равновесия между тем и другим воздухом может быть получена подобная живая сила, пока достигается равновесие.

Пусть, например, имеется 1 куб. фут воздуха вдвое более редкого, чем естественный, каковому допущению будут соответствовать следующие данные: $p=2240$ фунтов, $a=\frac{1}{2}$ фута и $x=\frac{1}{2}$ фута; тогда живая сила, о которой идет речь, будет равна $1120-1120 \log 2=344$, т. е. она тождественна с той, какая создается при свободном падении 344 фунтов с высоты 1 фута.

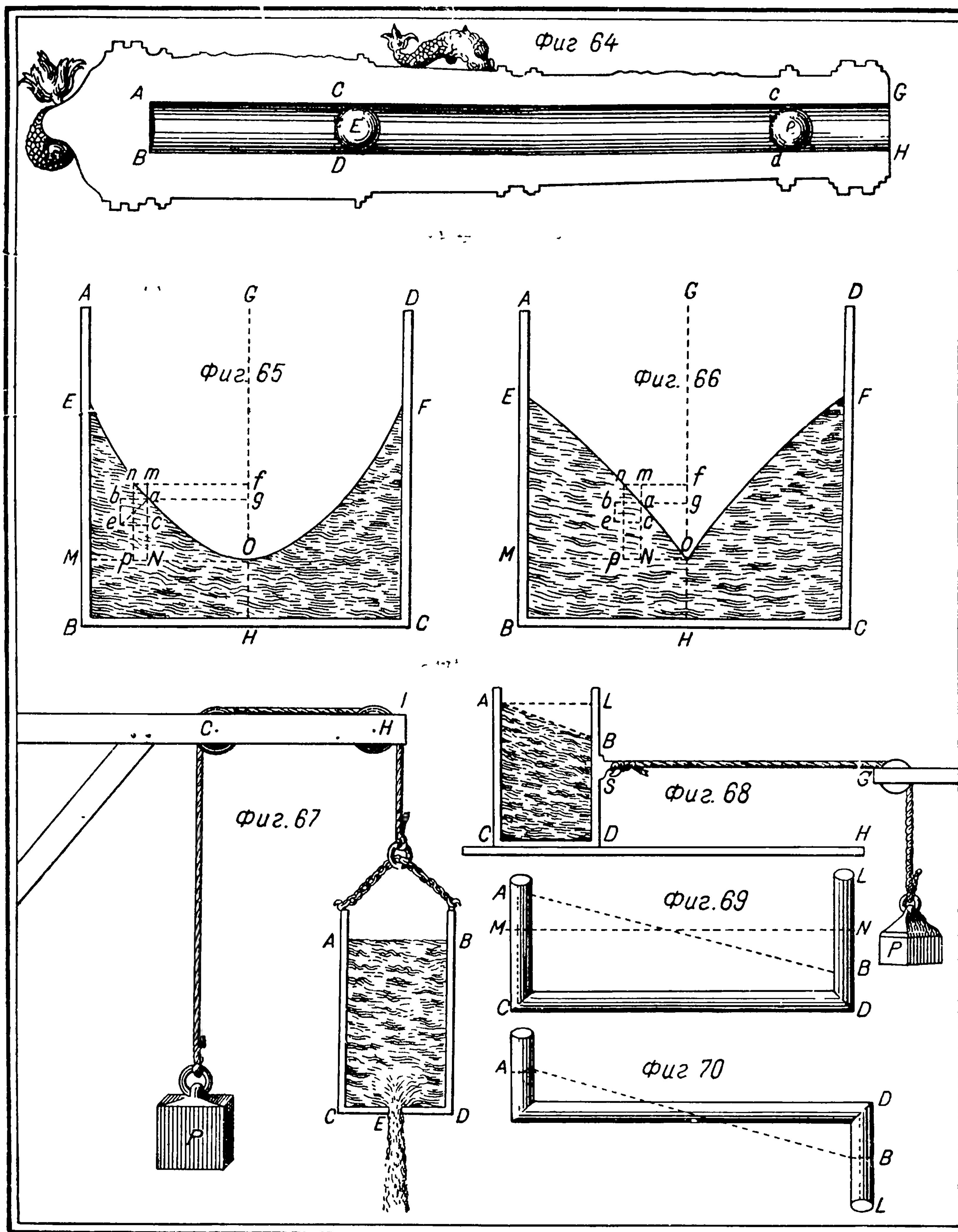
Если 1 куб. фут заполнен воздухом, который вчетверо реже естественного, то искомая живая сила $\left(\right.$а именно, если положить $p=2240$ и $a=\frac{1}{4}$, $\left.x=\frac{3}{4}\right)$ равна $1680-560 \log 4=904$, т. е. она равна силе, какая создается при свободном падении груза в 904 фунта с высоты 1 фута.

Наконец, если имеется 1 куб. фут, совершенно свободный от воздуха, то следует положить $p=2240$, $a=0$ и $x=1$. Тогда искомая живая сила будет равна $2240\times\left(1-0 \log \frac{1}{0}\right)$. Но известно, что $0 \log \frac{1}{0}$ бесконечно мало по сравнению с единицей. Таким образом, упомянутое выше число 2240 подтверждается; последнее показывает, что с помощью этой силы можно поднять 2240 фунтов на высоту 1 фута.

§ 46. К настоящей теме относится также изумительная сила сильно сжатого воздуха, а в особенности газа воспламененного пороха в практике пневматических пушек (sclopetum) и военных метательных орудий. Об этом, о чем я писал отдельно, я прибавлю в настоящей части.

О силе сгущенного воздуха и газа воспламененного пороха для метания ядер в практике пневматических пушек и военных метательных орудий

I. Пусть AG (фиг. 64) — длина дула в поставленном горизонтально метательном орудии или пушке, и пусть она равна a; пусть AC обозначает длину того пространства, которое сгущен-


Фиг 64
A
B
C
D
E
c
d
P
G
H
Фиг. 65
A
G
D
E
F
n m
f
b
a
g
e
c
O
M
p
N
B
H
C
Фиг. 66
A
G
D
E
F
n m
f
b
a
g
e
c
O
M
p
N
B
H
C
Фиг. 67
C
H
I
A
B
C
E
D
P
Фиг. 68
A
L
B
S
G
C
D
H
P
Фиг. 69
A
L
M
N
B
C
D
Фиг 70
A
D
B
L

ный воздух или газ воспламененного пороха занимает тотчас после начала взрыва, и пусть $AC = b$; вес ядра E, которое должно быть выброшено, равно 1; при этом мы допустим, что ядро в точности заполняет полость дула и движется в нем совершенно свободно. Плотность воздуха, сгущенного в пространстве AD, пусть относится к плотности естественного воздуха, как n к 1. Наконец, положим, что вес ртутного столба (основанием которого является CD и высота которого одинакова с высотой барометра) равен P. Мы воспользуемся при этом допущением, что сила этой выбрасывающей среды пропорциональна плотности, независимо от того, выбрасывается ли ядро сгущенным воздухом или пороховым газом [105a].

После того как вышеизложенное подготовлено для вычисления, рассмотрим ядро в положении e, положив $Ae = x$ и скорость ядра в этом положении равный v; тогда сила, выталкивающая ядро при положении e, будет равна $\left(\frac{nb}{x} - 1\right) \times P$, что, будучи разделено на массу 1 и умножено на элемент пространства dx, дает половину приращения квадрата скорости. Отсюда получается

$$vdv = \left(\frac{nb}{x} - 1\right) \times Pdx, \text{ или } \frac{1}{2}v^2 = \left(b - x + nb \log \frac{x}{b}\right) P.$$

Положим $x = a$; тогда получается высота, соответствующая скорости, с которой ядро выбрасывается при выстреле. Пусть эта высота называется α; тогда будет

$$\alpha = \left(b - a + nb \log \frac{a}{b}\right) P.$$

II. Пусть, например, в пневматической пушке длина дула, или a, равна 3 парижским футам, длина $AC = 4$ дюймам, воздух, заключающийся в AD, в 10 раз плотнее естественного, т. е. $n = 10$, диаметр дула или ядрышка, подлежащего выбрасыванию, составляет 3 линии, а удельный вес его по отношению ко ртути равен отношению 10 к 17. P будет приблизительно равно 286. Отсюда определяется $\alpha = 2788$; что показывает, что ядро будет выброшено с такой скоростью, с которой в пустоте оно могло бы

подняться на высоту в 2788 футов. Из предшествующей формулы понятно, что метание ядра при одном и том же количестве упругого газа будет наиболее сильным, если длину дула сделать равной nb. Но если принять во внимание другие помехи, которые ядро помимо своей инерции и сопротивления наружного воздуха испытывает при прохождении по дулу пушки, то становится ясно, что для получения наиболее сильного метания требуется гораздо меньшая длина дула. Если длина nb гораздо больше длины a, что и имеет место при более сильных метаниях, то без заметной ошибки будет

$$\alpha = nbP \log \frac{a}{b} .$$

Если метательное орудие поставлено вертикально, то вычисление становится несколько иным, но для более сильных метаний разница не может быть заметной. Поэтому, так как в дальнейшем мы будем рассматривать лишь очень сильные метания, мы ради краткости положим

$$\alpha = nbP \log \frac{a}{b} .$$

III. Подобно тому как выше мы определили высоту, соответствующую скорости, с которой ядро выбрасывается, исходя из заданной упругой силы газа, выбрасывающего ядро, так и, наоборот, ясно, что, наблюдая эту высоту, можно вывести из нее упругую силу газа; действительно, будет

$$n = \alpha : \left(bP \log \frac{a}{b}\right) .$$

Отсюда, хотя и не точно, может быть определена упругая сила воспламененного пороха; во всяком случае она может быть сведена к пределам, которые она наверное превышает. Как ответить на вопрос, каким образом может быть на опыте определена высота α? На это я отвечаю, что о ней можно достаточно точно заключить на основании времени, которое ядро, брошенное вверх, тратит от момента выстрела до падения на землю, если при вычислении принять в расчет сопротивление воздуха.

Я опишу здесь опыты, рассмотренные в «Комментариях Петербургской Академии наук» (т. 2, стр. 338 и 339), по которым я произвел вычисление, исходя по отношению к сопротивлению воздуха из допущений, что удельные веса железа и воздуха относятся друг к другу, как 7650 к 1, и что воздух, в котором ядро поднимается, обладает равномерной плотностью. Отношение удельных весов было, повидимому, принято несколько большим, чем это следовало бы, но при очень высоких метаниях ошибка возместится вследствие уменьшения плотности воздуха по направлению вверх.

Положение орудия было со всей тщательностью приспособлено к перпендикуляру, и всякий раз оно устанавливалось и закреплялось в этом положении. Каждый опыт был произведен повторно. Длина дула составляла 7.7 английских футов, диаметр ядра был равен 0.2375 фута; диаметр дула не был измерен, равно как не была измерена величина просвета зажигания. Каждый раз взвешивалось количество применяемого пороха, и с помощью маятника определялось время от момента взрыва до момента, когда ядро падало на землю. Табл. 2 показывает как то, что было наблюдено, так и то, что было отсюда получено путем вычисления.

Таблица 2

Количество пороха (в голландских унциях)	Время подъема и падения (в сек.)	Высота метания в сопротивляющемся воздухе (в английских футах)	Время подъема в сопротивляющемся воздухе (в сек.)	Время падения в сопротивляющемся воздухе (в сек.)	Высота метания в пустоте (в английских футах)	Время подъема и падения в пустоте (в сек.)
$\frac{1}{2}$	11	486	5.42	5.58	541	11.6
2	34	4550	14.37	19.63	13694	58
3	45	7819	16.48	28.16	58750	121

Для того же орудия и для того же ядра, но при укорочении первого на 1.7 фута, так что оставшаяся часть дула составляла в точности 6 английских футов, служит табл. 3, составленная согласно тому же закону.

Таблица 3

Количество пороха (в голландских унциях)	Время подъема и падения (в сек.)	Высота метания в сопротивляющемся воздухе (в английских футах)	Время подъема в сопротивляющемся воздухе (в сек.)	Время падения в сопротивляющемся воздухе (в сек.)	Высота метания в пустоте (в английских футах)	Время подъема и падения в пустоте (в сек.)
$\frac{1}{2}$	8	257	3.95	4.05	274	8.2
2	20.5	1665	9.74	10.76	2404	24.5
4	28	3187	12.5	15.5	6604	40.5
6	32.5	4304	13.9	18.6	11810	54.3
8	38	5643	15.54	22.46	22394	74

Многое делает исход этих опытов столь ненадежным, что в результате их не получается ничего такого, что неопровержимо указывало бы на существование одной и той же упругости газа. Я полагаю, что в наибольшей части неравенство происходит вследствие того, что в начале взрыва воспламеняется очень малая часть пороха, что большая часть его загорается лишь тогда, когда ядро уже близко к выходу из орудия и, наконец, что очень большая часть его выбрасывается невоспламененной. Уже одно это обстоятельство приводит, вероятно, к тому, что упругая сила газа, проталкивающего ядро, в 100 раз больше той, какая получается на основании опыта, если совершенно не принимать во внимание указанного выше обстоятельства. Это представляется мне весьма вероятным на основании того, что при применении 4 унций пороха в орудии длиной в 7.7 фута ядро могло бы подняться своим броском в пустоте на высоту 58 750 футов, между тем как при том же количестве пороха и при том

же орудии, но укороченном лишь на 1.7 фута, его бросок соответствует высоте в пустоте в 6604 фута, каковая высота едва превышает $^1/_9$ часть первой. Из сопоставления обоих этих опытов я заключаю, что очень большая часть пороха в более длинном орудии воспламенилась в то время, как ядро оказалось уже совсем близко к выходу и до последнего оставалось не свыше 1.7 фута.

Бросок ядра уменьшается также из-за большого размера просвета зажигания и из-за зазора, остающегося между ядром и внутренней поверхностью дула; по этим двум причинам значительная часть газа бесполезно улетучивается; но отсюда не получается столь значительного уменьшения, какое я предположил до того, как было произведено вычисление. Однако в дальнейшем я приведу вычисление, дабы получить метод установления для силы пороха весьма длинных пределов, за которые она наверно все еще переходит.

IV. Максимальную упругость газа выявляет третий опыт, произведенный с укороченным еще орудием, который указывает, что ядро могло бы с полученным им импульсом подняться на высоту $\alpha = 58\,750$ английским футам. При этом длина дула AG, или a, составляла 7.7; длина AC (поскольку я заключаю об этом на основании сечения дула и веса пороха) была равна 0.08. Наконец, значение самого P (т. е. веса ртутного столба, основанием которого является диаметральное сечение ядра и высота которого составляет 30 английских дюймов, по отношению к весу железного ядра, обозначенного через 1) окажется равным 26.8, если допустить, что удельные веса ртути и железа относятся друг к другу, как 17 к 10. А так как, согласно разделу III, n приближенно равно $\alpha : \left(bP \log \frac{a}{b}\right)$, то будет $n = 6004$. Отсюда следует, что если газ воспламененного пороха имеет упругость, пропорциональную его плотности, то максимальная его упругость по меньшей мере в 6000 раз больше упругости обыкновенного воздуха.

V. А если мы примем во внимание и бесполезную часть газа, которая улетучивается через просвет зажигания и через зазор,

оставляемый ядром, то мы получим еще большую упругость. Так как вычисление, требующееся для разрешения этой задачи, является весьма пространным и запутанным, то я не остановился перед тем, чтобы применить несколько более свободные допущения, благодаря которым вычисление сильно облегчается; хотя эти допущения не являются совершенно точными, тем не менее они не могут вызвать значительной ошибки. Во-первых, я допускаю, что оба отверстия, через которые газ может улетучиться, являются как бы бесконечно малыми по сравнению с сечением дула; при этом допущении можно будет скорость в отдельные моменты, с которой газ улетучивается, оценить непосредственно из одного давления; подобного рода допущение может быть без заметной ошибки сделано для всякой жидкости даже в том случае, когда отверстия не очень малы, как мы это в различных местах вывели в качестве следствия из нашей теории. А что оно может быть гораздо легче принято при весьма упругой жидкости, это всякий поймет, исходя из того, что приращение потенциального подъема по отношению к внутреннему движению гораздо меньше приращения потенциального подъема по отношению к движению частицы, выскакивающей через отверстие, в жидкости, которая выбрасывается благодаря собственной упругости, чем в жидкости, которая выбрасывается силой тяжести, ибо в первой местное внутреннее движение меньше, чем во второй. Во-вторых, упругая сила воспламененного пороха столь велика, что можно не принимать во внимание обратного давления атмосферы. В-третьих, хотя скорость ядра в орудии и очень велика, тем не менее ее можно считать очень малой по сравнению со скоростью, с которой газ улетучивается через оба зазора, ибо инерция этого газа не может не быть чрезвычайно малой по сравнению с той инерцией, которая присуща ядру. Согласно этому допущению газ будет улетучиваться через оба зазора с одинаковой скоростью; а так как в других местах скорость в просвете зажигания была принята равной $\sqrt{A}$, а скорость ядра равной v, то скорость газа в зазоре, остающемся между ядром и поверхностью дула,

должна быть обозначена через $\sqrt{A-v}$. Перехожу теперь к решению.

VI. Прежде всего надлежит отметить, что если упругости газа принимаются пропорциональными плотностям, то отсюда следует, что газ будет все время улетучиваться через оба отверстия с одной и той же скоростью, как мы это видели в задаче § 34, причем эта скорость будет в точности такой, какая вызывается высотой однородного газа, вес которого в состоянии удержать газ от того, чтобы он расширялся. Таким образом, указанная скорость определится следующим образом. Пусть тяжесть ядра равна 1; упругость или вес, который в состоянии удержать газ только что воспламенившегося пороха $ACDB$ в его состоянии сжатия, равен P; вес примененного пороха равен p; тогда и вес газа от воспламенившегося только что пороха будет тоже равен p. А если длину AC положить равной b, то ясно, что высота однородного газа, имеющего вес P, будет равна $\frac{P}{p}b$. Следовательно, скорость, с которой только что образовавшийся газ улетучивается через просвет зажигания, равен $\sqrt{\frac{P}{p}b}$, и с этой же скоростью он будет выбрасываться в течение всего взрыва, и притом не только через просвет зажигания, но приблизительно и через зазор, оставшийся между ядром и дулом.

VII. Пусть теперь, далее, сечение дула равно F; зазор, имеющийся между ядром и дулом, равен f; сечение просвета зажигания равно Φ; длина дула равна a; количество газа в самом начале взрыва равно g. Представим себе затем, что ядро переместилось из E в e, и обозначим $AC=x$; пусть количество газа, оставшегося в этот момент времени в орудии, равно z, а скорость ядра в этом положении равна v. Прочие обозначения останутся теми же, какие были указаны раньше.

Так как, согласно допущению, упругость прямо пропорциональна количеству и обратно пропорциональна пространству, то упругость газа, оставшегося в $AcdB$, будет: $\frac{zb}{gx}P$. На проталкивание ядра затрачивается, конечно, не вся эта упругость, а лишь

часть ее, которая относится ко всей упругости, как $F-f$ к f. Таким образом, если принять dt в качестве элемента времени, то

$$dv = \frac{F-f}{F} \times \frac{zb}{gx} P \times dt.$$

А согласно методу, изложенному в § 34, где было специально определено количество воздуха, вытекающего за заданное малое время, мы находим

$$-dz = \frac{f+\Phi}{F} \times \frac{z}{x} \times \sqrt{\left(\frac{P}{p} b\right) x dt}.$$

Из сопоставления этих двух равенств получается

$$-dz = \frac{f+\Phi}{F-f} \times \frac{g}{b} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{Pp}} x dv,$$

что после интегрирования и прибавления надлежащей постоянной дает

$$z = g - \frac{f+\Phi}{F-f} \times \frac{g}{b} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{Pp}} \times v.$$

Если же в первом уравнении подставить это значение, найденное для z, и одновременно положить $\frac{dx}{v}$ вместо dt, то получится

$$vdv = \frac{F-f}{F} \times \frac{b}{x} \times P \times dx - \frac{f+\Phi}{F} \times \frac{\sqrt{bP}}{x\sqrt{p}} \times vdx,$$

или

$$\frac{Fvdv\sqrt{p}}{(F-f) \times bP\sqrt{p} - (f+\Phi) \times v\sqrt{bP}} = \frac{dx}{x},$$

каковое уравнение после надлежащего его интегрирования, если сделать $x = a$, переходит в следующее:

$$\log \frac{a}{b} = \left[-F(f+\Phi) v \sqrt{p} - F(F-f) p \sqrt{Pb} \times \right.$$
$$\left. \times \log\left(1 - \frac{(f+\Phi)v}{(F-f)\sqrt{bPp}}\right)\right] : (f+\Phi)^2 \times \sqrt{Pb}.$$

VIII. Теперь, если на опыте будет выявлено значение самого v, то отсюда можно будет вывести значение самого P, обозначающего упругость не расширившегося еще порохового газа. Для

того чтобы пояснить это на примере, мы воспользуемся тем же опытом, который мы изложили уже в разделе IV, дабы отсюда стало ясно, на какое повышение упругости оно указывает вследствие улетучивания газа. Поэтому вычисление будет произведено следующим образом.

Так как вес ядра, составлявший 3 фунта, мы обозначили через 1, то 4 унции примененного пороха следует выразить с помощью $\frac{1}{12}$; следовательно, $p = \frac{1}{12}$. Рассматриваемых нами отверстий я не измерял; но обычно зазор, оставляемый ядром в подобном орудии, составляет приблизительно $^1/_{15}$ сечения дула; сечением просвета зажигания, полагаю, можно в данном случае пренебречь. Таким образом, я положу $F = 15$, $f = 1$, $\Phi = 0$. Затем мы снова имеем $a = 7.7$, $b = 0.08$; высота, до которой ядро может подняться в пустоте, или $\frac{1}{2}v^2$, равна 58 750 или $v = 343$. Таким образом, последнее уравнение предыдущего раздела будет иметь следующий вид:

$$\log 96 = -\frac{5251}{\sqrt{P}} + 17.5 \log \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P} - 300};$$

последнее приблизительно удовлетворяется, если взять $\sqrt{P} = 534$ и, следовательно, $P = 285\,156$, что дает вес ртутного столба одинакового сечения с дулом орудия, высота которого более чем в 10 000 раз превышает обычную высоту барометра. Но ранее, в разделе IV, мы нашли, что число n (обозначающее то же самое) равно 6004. Таким образом, теперь мы уже будем уверенно утверждать (ибо все, чем мы повсюду пренебрегли, указывает на большую силу пороха), что порох обладает такой упругой силой, которая по меньшей мере в 10 000 раз больше упругой силы обыкновенного воздуха. Из сопоставления чисел 10 000 и 6004 выявляется, сколько примерно сила пороха теряет благодаря неоднократно упоминавшимся зазорам. Правда, лично я полагал бы, что эта убыль еще больше. Приведенным выше вычислением я удостоверился в том, в чем когда-то меня уверял сведущий в этих делах муж, а именно, что в орудиях не наблюдалось

значительного ослабления, когда во время осады просвет зажигания вследствие ежедневного употребления чрезмерно расширялся [106].

IX. Но, для того чтобы из нашего уравнения можно было вывести некоторые более легкие, хотя лишь приблизительно верные следствия, мы заменим логарифмическую величину рядом. Мы имеем:

$$-\log\left(1-\frac{(f+\Phi)v}{(F-f)\sqrt{bPp}}\right)=\frac{(f+\Phi)v}{(F-f)\sqrt{bPp}}+\frac{(f+\Phi)^2v^2}{2(F-f)^2\times bPp}+$$
$$+\frac{(f+\Phi)^3v^3}{3(F-f)^3\times bPp\sqrt{bPp}}+\ldots$$

После подстановки этой величины в последнее уравнение раздела VII получается

$$\log\frac{a}{b}=\frac{Fv^2}{2(F-f)\cdot bP}+\frac{F\cdot(f+\Phi)v^3}{3\cdot(F-f)^2bP\sqrt{bPp}}+\ldots$$

Отметим здесь, что это уравнение прекрасно согласуется с последним уравнением раздела II, если отверстия f и Φ положить равными 0; ибо то, что здесь обозначается через $\frac{1}{2}v^2$ и nP, там обозначалось через α и P, причем остальные обозначения находятся между собой в согласии.

X. Для того чтобы стало ясно, насколько примерно уменьшается высота метания благодаря отверстиям, если эти отверстия очень малы, послужит нижеследующее уравнение. Пусть под α подразумевается высота, до которой ядро могло бы дойти в пустоте, если допустить, что через отверстия не улетучивается какое бы то ни было количество газа; тогда убыль этой высоты, которая должна быть вызвана истечением газа через указанные отверстия, будет примерно такой:

$$[(2\alpha)^{3/2}\times(f+\Phi)]:[3F\times\sqrt{bPp}].$$

Отсюда в одном и том же орудии, в случае применения одного и того же количества пороха и при неизменном весе ядра, убыли метаний пропорциональны сечениям отверстий.

Эти же убыли при прочих равных условиях следуют почти полуторному отношению примененных количеств пороха; действи-

тельно, так как логарифмы больших чисел растут в гораздо меньшем отношении, чем самые числа, и так как сверх того $\alpha = bP \log \frac{a}{b}$, то можно при прочих равных условиях принять α пропорциональным самому b, так как b на P не влияет. Но убыль, о которой идет речь, следует при прочих равных условиях отношению величины $(\alpha^{3/2}) : (\sqrt{bp})$, или отношению величины $\frac{b}{\sqrt{p}}$. Но p, обозначающее вес примененного пороха, пропорционально b; следовательно, вышеуказанная убыль следует приблизительно отношению $\sqrt{b}$, которое представляет собой корень квадратный из количества примененного пороха. Таким образом, если рассматривать метания, то убыли бывают гораздо большими при слабых метаниях, чем при более сильных, и это же, повидимому, подтверждают опыты, изложенные в разделе III, ибо я не вижу другой причины, почему в табл. 2, когда было взято 2 унции пороха, высота метания увеличилась в 26 раз по сравнению с высотой метания, когда было взято $^1/_2$ унции, и почему затем удвоенное до 4 унций количество пороха дает после вычисления метание лишь вчетверо более высокое, чем при количестве в 2 унции.

XI. Что касается других неравенств, которые выявляются при сопоставлении опытов в табл. 2 и 3, то их, как я сказал выше, я отношу преимущественно за счет того, что порох воспламеняется не полностью и что воспламеняющийся порох не весь с самого начала выстрела охватывается пламенем. И мы не станем, конечно, этому удивляться, если примем во внимание, что при опыте 4 табл. 2 все время выстрела не составляет и сотой доли 1 сек. Таким образом, если достоверно, что очень большая часть пороха выбрасывается невоспламенившейся, и немалая часть остального воспламеняется позднее, чем это было принято при вычислении, и если сверх того значительная часть пороха фальсифицируется дымами и почвенным веществом, которое не загорается, то отсюда следует, что сгоревшим частям присуща гораздо большая упругость, чем та, которая была определена пу-

тем расчета опыта в разделе X, быть может, в 10 или в 100 раз большая.

Но пусть она лишь такова, какую выявляет опыт, а именно: в 10 000 раз больше упругости обыкновенного воздуха. Отсюда следует, что либо тот упругий газ, который извлекается из горящего пороха, не является обычным воздухом, либо упругости возрастают в большей пропорции, чем плотности, ибо плотность воздуха, получающегося из только что воспламенившегося пороха, не может более чем в 10 000 раз превышать плотность обыкновенного воздуха, хотя бы весь порох состоял из сжатого воздуха, о чем я заключаю на основании удельного веса пороха по сравнению с воздухом.

Между прочим, давно уже стали обсуждать вопрос о том, является ли искусственный упругий газ, получающийся из тел, обыкновенным воздухом или же нет. Этого вопроса я не буду решать [[107]].

Но если допустить, что порох представляет собой воздух в 1000 раз более плотный, чем естественный, и в 10 000 раз более упругий, тогда из § 4 будет следовать, что воздух, будучи сжатым бесконечно большой силой, не может уплотниться более, чем в 1331 раз, и, согласно тому же правилу, упругость естественного воздуха, сжатого вчетверо, относилась бы к упругости естественного воздуха как $4^1/_4$ к 1.

А были ли с достаточной точностью проведены поставленные другими опыты, показавшие, что отношение вышеуказанных плотностей равно в точности отношению 4 к 1 и что теплота воздуха во время сжатия оставалась той же, этого я не знаю. Представляется правдоподобным, что тот же газ, который находится в скрытом виде в скважинах пороха, является также причиной упругости упругих тел или упругости поддающейся сжатию шерсти, а именно: когда при обилии его в скважинах тела последнее под действием какой-либо силы принимает необычную форму, то этот упругий газ сжимается и, возвращая скважинам наиболее емкую форму, приводит тела к первоначальной их форме и длине.

ГИДРОДИНАМИКИ

ЧАСТЬ ОДИННАДЦАТАЯ



О жидкостях, приведенных в состояние вихря, а затем о жидкостях, которые содержатся в движущихся сосудах [108]

§ 1. С того времени, как Кеплер и Картезий применили вихри для объяснения различных явлений природы, многие решили надлежащим образом посвятить свою работу тщательному исследованию этого вопроса, и первым, если я не ошибаюсь, в природу его правильно проник Гюйгенс в трактате «Рассуждение о тяжести» («Discours sur la pésanteur») [109]. Я прибавлю к этому кое-что, имеющее отношение к моему плану и, быть может, недостаточно исследованное другими.

Обычно принимают, что вихри приведены в состояние постоянства или устойчивости, так что жидкость, не подвергаясь никакому изменению, движется все время согласно одному и тому же закону [110].

§ 2. Пусть имеется вертикально поставленный цилиндр $ABCD$ (фиг. 65 и 66), осью которого является GH, и пусть он заполнен до определенной высоты. Допустим, что вода находится в вихревом состоянии и что все уже приведено в состояние устойчивости. Тогда поверхность воды снизится по направлению к оси и поднимется по направлению к стенкам. Сечение по оси, ограниченное поверхностью воды, мы представим кривой EOF и дадим теперь свойства этой кривой, исходя из заданного отношения, в каком находятся между собой скорости на определенных расстояниях от оси.

Проведем бесконечно близкие друг к другу горизонтальные прямые ga и fn и проведем вертикальную прямую am. Пусть $Og = x$, gf или $am = dx$, $ga = y$, $mn = dy$. Ясно, что любая капелька, находящаяся на поверхности, будет своим давлением, составленным из горизонтальной центробежной силы и из вертикальной силы тяжести, давить перпендикулярно на поверхность, ибо если бы она давила наклонно, то не существовало бы ничего, что удержало бы капельку на ее месте.

Таким образом, если центробежная сила капельки, находящейся в a, выражается с помощью горизонтальной прямой ba, а сила тяжести — с помощью вертикальной прямой ca, и если дополнить прямоугольник $abec$, то диагональ ae будет перпендикулярна к кривой. Отсюда треугольник eca подобен треугольнику amn и, таким образом, $dx : dy = ec : ca = ba : ca$, или как центробежная сила в точке a — к силе тяжести.

Но Гюйгенс доказал, что центробежная сила тела, вращающегося по кругу со скоростью, какую оно могло бы приобрести при свободном падении с высоты, составляющей половину радиуса, равна силе его тяжести. Поэтому, если высоту, соответствующую вращательной скорости капельки, назвать V и силу тяжести g, то центробежная сила будет равна $\frac{2gV}{y}$, откуда $dx : dy = \frac{2gV}{y} : g$, или $dx = \frac{2V\,dy}{y}$ [111].

3. Если допустить $V = \frac{1}{2}y$, то получится $x = y$, и, стало быть, линия EO будет прямой, составляющей полупрямой угол с осью GH, а полость будет иметь форму конуса. Но если будет поддерживаться одно и то же соотношение скоростей, а именно, если последние будут повсюду пропорциональны корням расстояний от оси и воды станут вращаться более быстро или более медленно, то угол EOG будет становиться тем более острым, чем быстрее они будут двигаться, так что если скорость станет бесконечно большой, то тогда воды должны будут давить на дно перпендикулярно, наподобие стены, и образовывать внутри цилиндрическую полость, если только в AD существует стенка, которая препятствует выбрасыванию всех вод.

§ 4. Если допустить несколько более обще $2V = fy^e$, то получится $dx = fy^{e-1}dy$, или $x = \frac{f}{e} y^e$. Отсюда следует, что кривая будет всегда вогнутой по направлению к оси, как на фиг. 65, когда e больше единицы, и выпуклой, как на фиг. 66, когда e меньше единицы. В первом случае угол EOG всегда прямой, в другом — он всегда равен нулю. Только в одном случае, когда $e = 1$, этот угол может быть каким угодно.

§ 5. Сказанное выше может послужить для некоторого определения шкалы скоростей в искусственно созданном вихре. А именно, если поверхность вогнута, то отсюда следует, что скорости увеличиваются в бо́льшем отношении, чем растут расстояния от оси; если же поверхность выпукла, то надо сделать обратное заключение. Если покажется, что кривая не относится к роду параболических, то это послужит указанием того, что скорости нельзя сравнивать с какой либо определенной степенью расстояний. Чем большей будет наблюдаться прямая EM, ограниченная горизонтальной прямой OM, тем большей надо будет признать абсолютную скорость частиц, т. е. f.

§ 6. Но я полагаю, что вихрь не может оставаться в своем состоянии в течение какого-нибудь значительного времени, если центробежные силы одинаковых частей в однородной жидкости возрастают по направлению от оси к окружности. Ибо если бы это имело место, то, так как нет ничего такого, что в достаточной мере сдерживало бы центробежную силу частей, более близких к оси, получалось бы так, что эти более близкие к оси части постоянно отходили бы от оси, а более далекие части направлялись бы к ней, и в этом положении никогда не могло бы получиться равновесия или состояния устойчивости. Отсюда ясно, что величина $\frac{2gV}{y}$ (т. е. величина, выражающая центробежную силу одинаковых частей в однородных жидкостях) либо возрастет вместе с y, либо по крайней мере не убывает; таким образом, если мы снова вернемся к сделанному раньше особому допущению ($2V = fy^2$), то e не может быть меньше единицы.

Следовательно, во всех рассматриваемых здесь вихрях, приведенных в состояние устойчивости, поверхность никогда не будет выпуклой, как на фиг. 66, но всегда будет либо вогнутой, как на фиг. 65, либо конической; а так как *e* или больше единицы, или же равно ей, то может быть лишь так, что скорости возрастают либо в равном, либо в большем отношении, чем корни расстояний от оси. Продумывая все это, я не понимаю, каким образом Ньютон мог представить себе два вихря однородной повсюду жидкости, приведенными в состояние постоянной устойчивости, причем в одном из них периодические времена [112] их частей пропорциональны их расстояниям от оси цилиндра, а в другом они пропорциональны квадратам расстояния от центра шара. Ибо в одном из этих вихрей скорости были бы повсюду одинаковыми, а в другом они уменьшались бы прямо от оси по направлению к периферии.

Более правдоподобным представляется, что в большинстве вихрей, достигавших уже состояния устойчивости, периодические времена отдельных частей однородной или разнородной жидкости будут такими же, как если бы весь цилиндр был твердым, но при этом удельно более тяжелые части были бы ближе к окружности. В этом случае v оказывается пропорциональным самому y, V — пропорциональным его квадрату, а кривая EOF представляет собой Аполлониеву параболу, вершина которой находится в O и осью которой является OG.

Полагаю, что это будет иметь место главным образом тогда, когда вихрь образуется вследствие вращения цилиндрического сосуда вокруг оси HG, или также вследствие равномерного движения палки возле стенок сосуда, какового рода вихревые явления изложил г-н Сольмон [113] в «Комментариях королевской Академии в Париже» за 1716 г. (Comm. Acad. Reg. Sc. Paris) [114].

§ 7. Давления, испытываемые различными частями цилиндра $ABCD$ со стороны жидкости, пропорциональны высотам вертикальных столбов, соответствующих этим частям. Ведь нет необходимости в том, чтобы к указанному выше весу я прибавил

натиск жидкости, вызываемый центробежной силой, ибо этот натиск проявил уже свое действие, подняв воды. А если сосуд будет не цилиндрическим, а иметь какую-нибудь неправильную форму, то можно будет вообразить цилиндр, ось которого совпадает с осью вращения, заполненным жидкостью таким образом, что точка O как в рассматриваемом сосуде, так и в воображаемом цилиндре будет находиться в одном и том же месте; ибо в любой точке цилиндра давление будет равновеликим тому, каким оно является в той же точке, поскольку она относится к рассматриваемому сосуду. Из этого видно, что поверхность вихрей можно определить, исходя из иного начала, чем то, которым мы воспользовались раньше. А именно, если провести горизонтальную прямую OM и вертикальную Na с бесконечно близкой к ней pn, то отсюда следует, что высота Na, или Og, пропорциональна центробежной силе всех частиц, находящихся на ON, и что разность двух весьма близких высот, т. е. am, или gf, пропорциональна центробежной силе частицы Np. Отсюда вновь получается окончательное уравнение, данное нами в § 2, а именно: $dx = \frac{2V\,dy}{y}$.

§ 8. Посмотрим теперь, что должно произойти с телами, вовлекаемыми в вихрь. Но для того чтобы данный вопрос стал более раздельным и простым, мы рассмотрим вместо тела малый шарик, имеющий тот же удельный вес, что и завихренная жидкость.

Подобный шарик, будучи присоединен к жидкости, тотчас же приводится в движение двумя силами, одной — касательной, которая возникает вследствие натиска жидкости, и другой — центростремительной, которая вызывается центробежной силой жидкости. Обе эти силы постоянно сохраняют между собой одно и то же отношение, а именно равное квадрату относительной скорости жидкости; тело будет либо покоиться, либо уноситься круговым движением.

Заслуживает быть отмеченным теми, которые в пояснении явлений тяжести примыкают к картезианским началам, что касательная сила несоизмеримо больше центростремительной, так

как первая из них относится ко второй, как расстояние тела от оси вихря относится к восьми третьим частям диаметра шара; доказательство можно найти в «Комментариях Петербургской Академии» (т. II, стр. 318 и 319).

§ 9. Различные лица много ссылались на то, что будто они показали, что легкая материя, приведенная быстро в состояние вихря, может вытеснить тела по направлению к оси, однако отсюда не следует, чтобы эти тела уносились вихрем; несмотря на то, что эти утверждения мне известны, я все-таки сомневаюсь в них после того, как выяснил, что касательная сила почти бесконечно больше центростремительной. А не лучше ли будет справиться с этим затруднением, если мы допустим существование около одной и той же оси двух противоположных и равной мощности вихрей? Ибо мне кажется, что очень многие явления природы не могут быть приведены в согласие с гипотезой вихрей, если только мы не допустим, что два или большее количество вихрей могут весьма свободно взаимно перемещаться в каком угодно направлении. По крайней мере уже одно всеобщее взаимное друг к другу тяготение небесных тел, которое не может быть взято под сомнение, в достаточной мере показывает, что следует либо распроститься с вихревой гипотезой, либо допустить совершенно свободное перекрещивание многих вихрей во всех направлениях. Следовательно, если вообразить два противоположных вихря одинаковой мощности около одной и той же оси, то тогда противоположные натиски уничтожили бы касательные силы обоих этих вихрей, но вместе с тем оба вихря действовали бы совместно в оттеснении тела по направлению к оси.

§ 10. Существует еще и другое затруднение, в силу которого тяжесть тела не может получиться в результате действия двух противоположных вихрей, вращающихся около одной и той же оси. Ведь при этих условиях тела тяготели бы не по направлению к общей точке или почти к точке, а по направлению к оси, и двигались бы перпендикулярным к ней движением, что не согласуется с вертикальным падением тел и с шарообразностью или почти шарообразностью земли и небесных тел.

Это другое затруднение можно также устранить, если вообразить себе две взаимно перпендикулярных или почти таких оси, вокруг каждой из которых вращаются два противоположных вихря равной мощности [115]. Действительно, можно представить себе, что сила, образующаяся из всех вихрей, такова, что тело вытесняется почти по направлению к той точке, где обе оси взаимно пересекаются; но при этом земля была бы всегда несколько сжата по направлению к плоскости, проходящей через обе оси. Однако и это неудобство, если только оно есть неудобство, можно обойти, сильно увеличивая число вихрей, ибо если даже допустить наличие почти бесчисленного количества вихрей, то все они смогут проходить друг через друга с такой же легкостью, как проходят световые лучи, которые в очень малой степени препятствуют друг другу.

Вышеизложенное я хотел прибавить здесь в интересах тех, которые увлекаются вихрями, дабы они видели, можно ли это движение постичь легче того, какое представлял себе Гюйгенс, ибо как тем, так и другим можно одинаково объяснить явления природы. Эту мысль я несколько точнее изложил в работе, которую Королевская Парижская Академия наук по присуждении в 1734 г. премии постановила напечатать.

§ 11. Так как нельзя сомневаться в том, что в соответствии с мнением Ньютона все планеты тяготеют к солнцу, а все спутники — к своим планетам и что причина этого тяготения находится в сродстве с той причиной, вследствие которой земные тела устремляются по направлению к центру земли, то вихревую гипотезу, если ее применяют для объяснения тяжести земных тел, следует распространить на всю систему мира. Но тогда планеты, плавающие в тонкой материи, двигались бы в сопротивляющейся среде и должны были бы, теряя кое-что из своего движения, постепенно приближаться к центру солнца по спирали. А так как из древнейших наблюдений последнее не явствует, то вихревая гипотеза требует, чтобы мы представили себе вихревую жидкость чрезвычайно разреженной и тонкой и чтобы она двигалась с такой скоростью, какую человеческая мысль едва может

постичь, ибо чем более жидкость разрежена, тем более быстрым, по необходимости, мы должны представить себе ее движение. Возможно, что предварение равноденствия можно будет более удовлетворительно объяснить на основе некоторой взаимной передачи движения, так что частицы, которые сейчас отбрасываются небесным телом, в другое время со схожей силой отбрасывают это тело [[116]].

§ 12. Перехожу теперь к остальным свойствам тяготеющих тел, вытекающим из вихревой гипотезы. Итак, допустим, что имеется покоящееся в вихревой жидкости тело, которое не пропускает через свои поры никаких частиц жидкости. Тогда тело будет стремиться к центру вихря, и его центростремительная сила будет в точности равна центробежной силе вихревой жидкости, которая находилась бы в подобном же объеме на таком же расстоянии от центра. Таким образом, любые тела, расположенные на схожем месте вихря, обладают одинаковой центростремительной силой, если они имеют одинаковый объем, хотя бы количества вещества в отдельных телах и были сколько угодно неравными, и если бы подобного рода тела могли свободно двигаться по направлению к центру вихря, то они уносились бы с неравными скоростями, а именно — со скоростями, обратно пропорциональными корням квадратным из количеств веществ, если пройденные пути равны.

§ 13. То, что было отмечено в предшествующем параграфе, может быть легко применено к тяжести тел, если только началом тяжести является центробежная сила некоей тонкой жидкости, приведенной в весьма быстрое вихревое движение. Так как опыт показывает, что в пустоте все земные тела падают с одинаковой скоростью и что все тела, подвешенные на равных по длине нитях, совершают таутохронные колебания, то мы отсюда сделаем такой вывод. Предельные весомые частицы, через которые не может проникнуть жидкость, создающая тяжесть, обладают во всех земных телах одинаковой удельной плотностью, т. е. в равных объемах они содержат равные количества твердого вещества; это имеет место как в тех весомых части-

цах, из которых состоит золото, так и в тех, из которых состоят перья. Но для того чтобы вышесказанное не было истолковано в ином, чем я хочу, смысле, я должен буду сказать, что я понимаю под *предельными весомыми частицами* и под *твердым веществом*, которое в них находится.

§ 14. Итак, *весомыми частицами* в собственном смысле являются те частицы, которые непроницаемы для тонкой вихревой жидкости, ибо эти частицы делают то же, что и расположенные в вихре тела, о которых мы говорили в § 12. Но хотя они и являются непроницаемыми для упомянутого только что тонкого вещества, я тем не менее не склонен считать их совершенно твердыми, какими, повидимому, их предполагает Гюйгенс в своем трактате «О тяготении» (De gravitate), т. е. такими, что у них все пространство заполнено веществом без пор или включенной в них жидкости. Я скорее полагаю, что эти *весомые частицы* имеют опять-таки свои поры, и что в последних существует другая, гораздо более тонкая жидкость, проходящая сквозь весомые частицы столь же свободно, как жидкость, порождающая тяжесть, течет через ощутимые тела. Остаток же, находящийся в *весомых частицах* в тесной внутренней связи, я называю *твердым веществом*, принадлежащим тем же частицам [117].

§ 15. Из вышесказанного ясно, что различные удельные веса тел ни в коем случае не следует основывать на различной плотности *весомых частиц*, а на том, что в различных телах в одном и том же объеме они могут быть не одинаковыми по числу, а также по величине, так что в телах более плотных, или большего удельного веса, *весомые частицы* либо располагаются с меньшими промежутками, либо обладают большим объемом.

И если бы *весомые частицы* в различных телах имели различные удельные плотности, то вследствие этого при прочих равных условиях тела не обладали бы еще различными удельными весами, но, падая с высоты, подобные тела должны были бы снижаться по направлению к центру земли не с одинаковой для всех них скоростью. Таким образом, могло бы случиться, что тела равного

удельного веса падали бы с неодинаковой скоростью в так называемой пустоте; на самом деле мы видим, что и тела с различным удельным весом падают с одинаковой скоростью. Но в подобного рода телах законы движения были бы совсем иными, да они и теперь являются иными в тех случаях, когда массы оцениваются только по весам [[118]].

§ 16. Между прочим, так как все земные тела, поскольку это известно из опыта, имеют весомые частицы равной удельной плотности, как это было указано в § 13, то это, конечно, привело меня к выводу, что то же самое имеет место и на всех отдельно рассмотренных планетах. Но мне представляется весьма вероятным, что планеты, если их сопоставить друг с другом, имеют весомые частицы неодинаковой удельной плотности, ибо я не вижу никакого основания для утверждения, будто указанные частицы должны были бы быть схожими на всех планетах. Но от плоскости весомых частиц на какой-нибудь планете зависит ее центробежная сила или усилие отойти от солнца. Следовательно, нельзя еще приходить к заключению, что центробежные силы планет находятся между собой в квадратном отношении, обратном отношению их расстояний от солнца, только на основании того, что периодические времена следуют полуторному отношению расстояний [[119]], ибо подобного рода заключение предполагает одинаковую плотность весомых частиц на всех планетах.

§ 17. Центробежные силы планет, конечно, равны обратным силам, которые влекут их по направлению к солнцу. Но так как, в соответствии со сказанным мною в предыдущем параграфе, еще неизвестно, в каком именно отношении изменяются центробежные силы планет в зависимости от расстояний от солнца, то, значит, не представляется возможным утверждать что-нибудь достоверное об их силах тяготения по направлению к солнцу. Конечно, в гипотезе вихрей есть много такого, что устанавливает и определяет силы тяготения на различных расстояниях.

Действительно, так как сила тяготения равна центробежной силе тонкого вещества, которое не в состоянии проникнуть сквозь

весомые частицы тела, то отсюда следует, что сила тяготения тем больше, чем большему количеству тонкого вещества не дается прохода. Но так как мы знаем, что зачастую бывает непроницаемо для одной жидкости такое тело, которое представляет очень свободный проход для другой более тонкой жидкости, то может случиться, если только мы допустим, что вихревое вещество неодинаково тонко на различных расстояниях от центра вихря, что одна и та же планета на разных расстояниях от солнца оттесняется к нему неодинаково; тем легче это может иметь место на различных планетах, ибо тогда прибавляется и возможна другая структура весомых частиц.

Сверх того неодинаковыми являются также плотность вихревого вещества, скорость и расстояние от центра, которые встречаются для образования силы тяжести. А если принять их в соображение, то станет ясно, что силы тяготения, конечно, убывают по мере увеличения расстояний от центра сил, и тем не менее центробежные силы равных объемов вихревого вещества не убывают вследствие этого в одинаковой мере; в силу соображения, изложенного в § 6, я признаю, что последнее не может иметь места.

Но этих наших общих и попутно изложенных рассуждений о природе вихрей и об их применении к явлениям тяготения будет достаточно. У нас не было намерения рекомендовать эту гипотезу, но лишь вывести из нее некоторые заключения, без которых, как я полагаю, самая гипотеза устоять не может.

Перехожу теперь к другому разделу этой части, в котором мы вкратце исследуем состояние жидкостей, содержащихся внутри движущихся сосудов. Эта тема является весьма плодотворной, и ее можно варьировать на бесчисленное множество ладов. Но мы затронем в качестве примеров лишь малое количество вопросов, к которым можно будет свести много других.

§ 18. Если в просверленном сосуде содержится вода и этот сосуд свободно падает, то само по себе ясно, что во время падения сосуда вода из него совершенно не вытечет, так как верхние частицы не воздействуют своей тяжестью на нижние. Если сосуд

будет падать хоть бы ускоренным движением, но более медленным, чем то движение, каким тела естественно ускоряются в пустоте, то вода будет вытекать, но с меньшей скоростью, чем если бы сосуд находился в покое. Обратное будет иметь место, если сосуд тянуть ускоренно вверх. Наконец, если сосуд движется горизонтально ускоренным движением (других направлений мы теперь не будем рассматривать), то может случиться, что скорость вытекающей воды окажется больше или меньше обычной скорости в зависимости от положения отверстия. Скорости же воды определятся нижеследующим образом.

§ 19. Пусть, например, имеется наполненный водой до AB сосуд $ACDB$ (фиг. 67), дно которого (CD) снабжено очень малым отверстием E; через это отверстие воды вытекают в то время, как весь сосуд увлекается вверх падающим грузом P с помощью веревки, пробегающей через два блока H и G. Наконец, допустим, что сверху все время подливается столько воды, сколько ее вытекает через отверстие E; вес же цилиндра и содержащейся в нем воды мы обозначим через p. Тогда ясно, что любая капля воды, как бы покоящейся в сосуде, одушевляется силой к подъему, которая относится к естественной силе тяжести как $\frac{P-p}{P+p}$ к 1. Но так как реакция капельки на дно у каждой капельки равна силе, вызывающей подъем, то помимо естественного она производит и иное давление на дно, которое надлежит изобразить через $\frac{P-p}{P+p}$. А оба эти давления, взятые вместе, будут относиться к единому естественному давлению как $\frac{2P}{P+p}$ к 1, так что дно будет испытывать со стороны лежащей над ним воды совершенно такое же давление, как если бы цилиндр находился в покое и высота воды была равна $\frac{2P}{P+p}\times AC$, из чего следует, что высота, соответствующая скорости равномерно вытекающей воды, равна $\frac{2P}{P+p}\times AC$.

Таким образом, если $P=0$, то вода не будет совершенно вытекать, так как сосуд будет свободно падать; если $P=p$, то

вода будет вытекать с обычной скоростью, так как в этом случае сосуд пребывает в покое, а если $P=\infty$, то скорость вытекающей воды будет так относиться к обычной скорости, как $\sqrt{2}$ к 1.

§ 20. Теперь спрашивается, что должно случиться с жидкостью, содержащейся в сосуде, которому сообщается равномерно ускоренное горизонтальное движение. А это очень легко усмотреть только из одного того, что в этом случае инерция частиц, как противоположная направлению, в котором движется сосуд, является горизонтальной, между тем как инерция тяжести этих же частиц является вертикальной. Обе они остаются все время неизменными.

Следовательно, после того как жидкость придет в состояние устойчивости или постоянства, ее поверхность станет плоской, но наклонной в сторону движения. Угол же наклонения может быть определен следующим образом.

Пусть имеется вертикально расположенный цилиндрический сосуд $ACDL$ (фиг. 68), который приводится в равномерно ускоренное движение на горизонтальной плоскости CDH грузом P, присоединенным к сосуду в S с помощью блока G, и пусть вес сосуда и содержащейся в нем воды относится к P как p к P. Естественное тяготение равно 1. Тогда давление любой капельки в направлении GS по сравнению с ее тяготением будет равно $\frac{P}{P+p}$. Следовательно, если AB находится в одной и той же плоскости с SG и с поверхностью воды и если провести AL, то ясно, что действие естественной тяжести будет относиться к реакции, вызываемой грузом P как BL к AL, или как 1 к $\frac{P}{P+p}$. Если полный синус обозначить через 1, то синус угла LAB будет равен

$$\frac{P}{\sqrt{2P^2+2Pp+p^2}}.$$

Отсюда также понятно, что дно CD испытывает со стороны лежащей над ним воды большее давление в C, чем в D, а именно в отношении высот AC к BD, и что если в этом дне пробуравить

очень малое отверстие, то вода будет выбрасываться из него со скоростью, которая соответствует высоте лежащего над ним вертикального столба. Но это будет иметь место после того, как все придет в состояние п о с т о я н с т в а. Если груз P является переменным, то поверхность AB никогда не будет оставаться в одном и том же положении, а от указанного выше груза зависит скорость, с которой сосуд двигается в отдельных местах. Следовательно, если удалить весь груз после того как сосуд уже пришел в движение, то сосуд будет продолжать двигаться со своей скоростью, а поверхность воды оставит свое наклоненное положение и вновь расположится горизонтально, как если бы сосуд находился в покое. Так, в этих случаях не движение сосуда изменяет состояние жидкостей, но изменение движения.

§ 21. То, что в предыдущем параграфе было нами доказано о цилиндрическом вертикально поставленном сосуде, может быть легко распространено на сосуд любой формы; ибо каков наклон водной поверхности AB по отношению к горизонту в цилиндрическом сосуде, таковым он будет и во всех остальных сосудах. Давление же воды на стенки сосуда можно будет повсюду определить, если взять вертикальный столб от той точки, для которой необходимо определить давление, до поверхности воды, которую надо будет мысленно создать, если в этом будет надобность. Так, например, если вместо сосуда взять изогнутую с обеих сторон трубу, как $ACDL$ (фиг. 69), и двигать ее в направлении CD, то обе поверхности M и N будут изменять свое положение в положение A и B до тех пор, пока прямая AB не получит должный, ранее определенный наклон. Может даже случиться, что раньше чем наступит равновесие, часть воды вытечет через A. Если, как на фиг. 70, колено DL направлено вниз, то вода останется как бы подвешенной, ибо в том и в другом случае наклон прямой AB окажется, при прочих равных условиях, одинаковым.

На фиг. 69 прямая MA будет тем больше, чем длиннее горизонтальное колено CD. Такое именно колено следует брать, чтобы можно было наблюдать очень малые ускорения или также замедления,

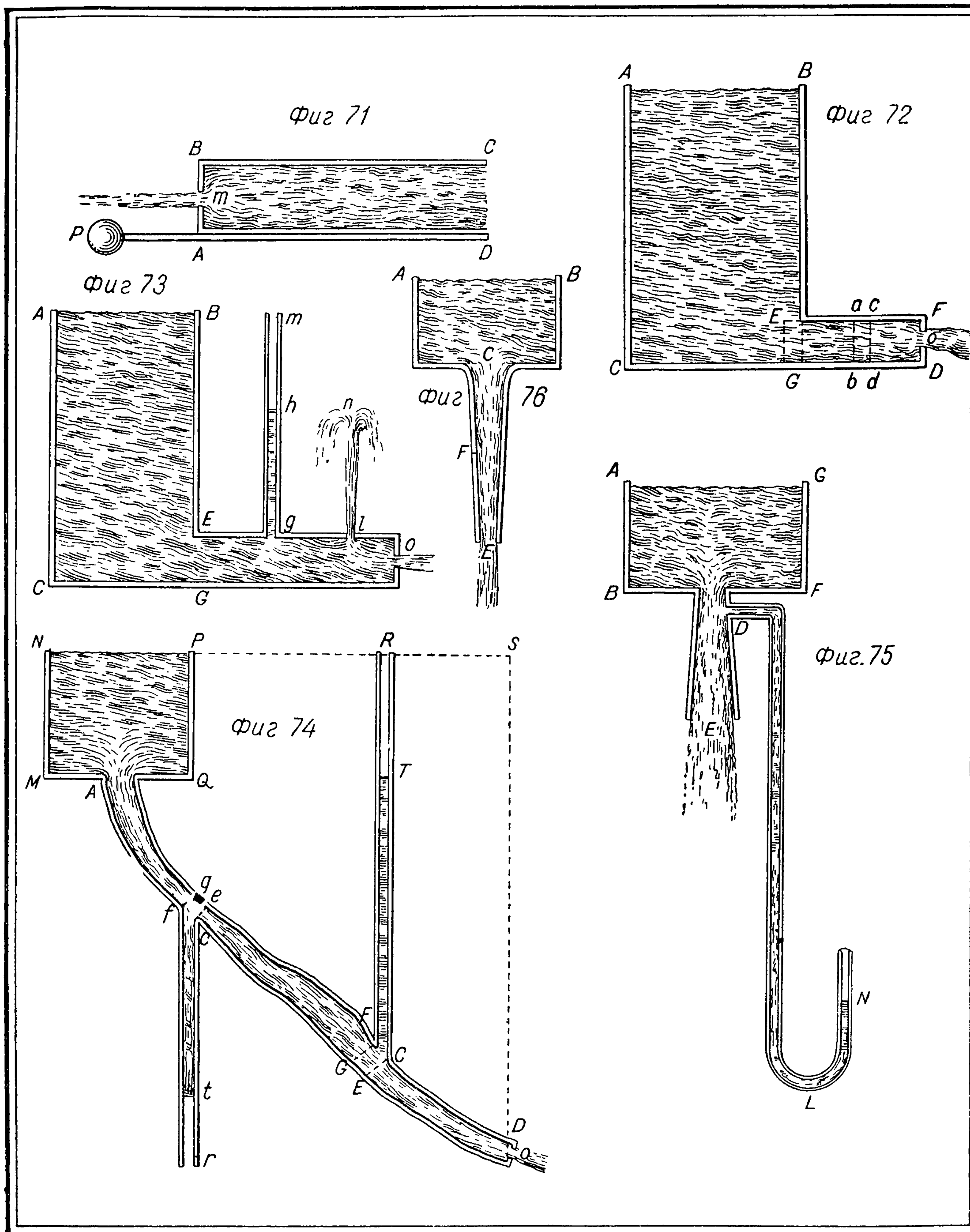
что зачастую может пригодиться для других целей, например для определения ускорений судов и давлений, вызываемых гребцами при отдельных погружениях весел. Однако в этих случаях, так как при них нельзя предполагать состояния устойчивости или постоянства, подлежало бы исследованию все движение жидкости, которое развивается в результате каждого отдельного чередования.

Это же соображение приводит к тому, что не представляется еще возможным на основании изложенного выше полностью определить, что должно произойти, когда сосуды, содержащие в себе жидкости, соударяются.

Однако правила соударений могут быть выведены на основании обычных законов давлений, так как соударение представляет собой не что иное, как очень большое давление, которое длится весьма короткое время.

§ 22. Пусть, например, имеется горизонтально расположенная цилиндрическая труба $ABCD$ (фиг. 71), которая наполнена водой, и пусть шар P ударяется о выступ трубы AP. Тогда вода внезапно сильно нажмет на дно BA по направлению P. Для того чтобы нам было легче понять это давление, допустим сначала, что труба совершенно не имеет веса. Тогда из равенства между действием и противодействием явствует, что в период удара шара дно испытает совершенно такой же толчок со стороны воды, какой оно испытало бы с противоположной стороны от шара, если бы он ударился непосредственно о дно. Но если допустить, что веса воды и трубы находятся между собой в отношении p к π, то удар воды на дно уменьшится, и весь удар будет относиться к остаточному удару как $p+\pi$ к p; ибо удар распределяется равномерно по всему веществу как воды, так и трубы, а на дно воздействует только жидкость.

Представим себе теперь, что в дне BA имеется очень малое отверстие m, но что тем не менее через него вода протекает весьма свободно. Тогда нам ясно, что в период удара через отверстие m будет выброшена капля воды. Однако количества этой воды нельзя будет определить, ибо оно зависит от жесткости


Фиг 71
B
C
m
P
A
D
Фиг 72
A
B
E
a c
F
o
C
G
b d
D
Фиг 73
A
B
m
h
n
E
g
l
o
C
G
A
B
C
Фиг
76
F
E
A
G
B
F
D
Фиг.75
E
N
L
N
P
R
S
Фиг 74
T
M
A
Q
q
e
f
c
F
C
G
E
t
D
r
o

вещества AP, воспринимающего удар. А именно, если это вещество является очень жестким, то удар следует заменить более сильным, но более кратковременным давлением. Рассмотрим, например, один и тот же удар в двух различных случаях, и пусть в одном случае будет учетверенным давление, а в другом пусть будет учетверенной длительность давления; это может иметь место, когда в первом случае вещество является более жестким, чем во втором. Тогда при ударе меньшего давления и большей длительности вытечет почти вдвое большее количество, чем в другом случае. Этим путем можно определять жесткости веществ, но их можно определять и с помощью звука.

ГИДРОДИНАМИКИ

ЧАСТЬ ДВЕНАДЦАТАЯ

которая излагает статику движущихся жидкостей, названную мною гидравлико-статикой

§ 1. Среди тех, которые предложили меры давления жидкостей, находящихся внутри сосудов, немногие переступили через обычные правила гидростатики, которые мы доказали во *второй части*. Однако имеется много другого, что относится к собственно так называемой гидростатике, например, когда к действию тяжести присоединяется центробежная сила или сила инерции, что мы рассмотрели в предыдущей части, а подобного рода мертвые силы можно придумать и сочетать на бесчисленное множество ладов. Но это не является тем, что мне представляется наиболее желательным, ибо для этого дела нетрудно дать общие правила. Мне представляется более существенной статика жидкостей, движущихся поступательно внутри сосудов, например вод, текущих по трубам к фонтанам; ведь она имеет многообразное применение, но никем не была исследована. Если кое-кто и упоминает о ней, то дает совершенно неправильное ее толкование, ибо те, которые говорили о давлении вод, протекающих через водопроводы, и о крепости последних, необходимой для того, чтобы выдержать это давление, преподали совершенно те же законы, что и для жидкостей, не уносимых каким-либо движением.

§ 2[120]. В этой гидравлико-статике особенным является то, что нельзя определить давления вод раньше, чем будет правильно выяснено движение; последнее и послужило причиной того, что это учение так долго оставалось неизвестным, ибо до сих пор авторы очень мало интересовались исследованием движения вод, а скорости они почти повсюду определяли лишь на основании высоты воды. Но хотя часто движение столь быстро приближается к этой скорости, что ускорения совершенно не могут быть восприняты чувствами, и кажется, будто все движение возникает мгновенно, тем не менее представляется интересным правильно изучить эти ускорения, ибо иначе зачастую бывает невозможно определить давления текущих вод; поэтому я решил, что представляется очень важным исследовать со всей тщательностью эти изменения с самого начала движения и до заданного момента, хотя бы они были мгновенными, и подкрепить это опытами, что я и сделал в различных местах настоящего трактата и в особенности в третьей части.

§ 3. Если бы можно было повсюду определить движение, то было бы легко создать самую общую статику в движущихся жидкостях. Ведь если вообразить отверстие, но при этом бесконечно малое, в том самом месте, для которого желательно определить давление вод, то прежде всего встанет вопрос о том, с какой скоростью воды могут прорваться через это малое отверстие и какой высоте соответствует эта скорость; понятно, что этой именно высоте пропорционально то давление, которое необходимо определить.

Исходя из этого начала, следует определить давление, выдерживаемое горизонтальной стенкой LQ на фиг. 43, если она не будет просверлена. Именно после того как нами было доказано в следствии II § 27 восьмой части, что если бы отверстие H было бесконечно мало по сравнению с отверстиями M и N и если бы отношение между этими последними отверстиями было обозначено через α и γ, то высота, соответствующая скорости воды, вырывающейся через H, была бы равна $\frac{\alpha^2 + LB - \gamma^2 NQ}{\alpha^2 + \gamma^2}$;

отсюда мы заключим, что давление воды на непросверленную пластинку LQ пропорционально этой самой высоте. Это же самое, доказанное иным путем, мы дали в § 19 упомянутой выше части. Отсюда вытекает возможность того, что стенка LQ не испытывает никакого давления, сколь бы большой ни была над нею высота воды, а именно, когда $\gamma = \alpha\sqrt{LB : NQ}$, и даже возможность того, что давление может превратиться во всасывание.

§ 4 [121]. Аналогично определяется давление воды на стенку LQ, если в последней даже просверлено отверстие конечного размера по сравнению с обоими остальными отверстиями. Ведь когда стенка просверлена бесконечным малым отверстием помимо того отверстия, которое имеется в H, то вода не может не вытекать с одной и той же скоростью через то и другое отверстия. А так как эта скорость установлена (согласно § 30 части восьмой) для отверстия H, то тем самым дана и скорость, с которой вода должна вырываться через малое отверстие, т. е. через то отверстие, которое мы себе представляем, а таким образом мы устанавливаем давление воды. Пусть, например, имеются равные между собой отверстия M, H и N, а высота BL относится к высоте NQ как 10 к 3; тогда давление на пластинку LQ будет в 10 раз меньше того давления, какое имеет место, если заткнуть отверстия H и N.

Наконец, если желательно определить давление в другом месте, то к высоте броска из отверстия H надо прибавить по крайней мере высоту, на какую стенка αQ возвышается над указанным местом. Тот же метод служит для определения давления вод в остальных сосудах, которые мы рассматривали в восьмой части. Все эти вопросы отличаются от тех, которые относятся к движению жидкостей по трубам, так как в силу предположенннного нами бесконечно большого размера сосудов воды как бы покоятся в них, и тем не менее они производят совершенно другое давление, чем обычно при иных обстоятельствах. В трубах же воды тем больше изменяют свое давление, чем с большей скоростью они протекают, и они производят почти все обычное давление, когда эта скорость очень мала.

Так обстоит дело в тех случаях, когда скорости жидкостей могут быть определены с помощью тех методов, которые уже были нами изложены выше. Но этот вопрос должен быть рассмотрен с помощью особого метода, когда воды текут по трубам, и это-то учение я главным образом подразумеваю под названием гидравлико-статики. В данном случае может быть определено не столько давление на основании скорости, сколько, если сделано малое отверстие в стенках трубы, наоборот, скорость на основании давления. Этой именно гидравлико-статикой, применение которой является весьма обширным, я и решил преимущественно заняться в настоящей части.

Задача

§ 5. Пусть имеется весьма обширный сосуд *ACEB* (фиг. 72), который должен постоянно поддерживаться полным воды, снабженный цилиндрической и горизонтальной трубой *ED*, и пусть в конце трубы имеется отверстие *o*, выбрасывающее воды равномерной скоростью. Требуется определить давление воды на стенки трубы *ED*.

Решение

Пусть высота поверхности воды *AB* над отверстием *o* равна a; тогда скорость воды, вытекающей в *o*, если исключить первые моменты вытекания, следует признать равномерной и равной $\sqrt{a}$, так как мы принимаем, что сосуд поддерживается постоянно полным. А если допустить, что отношение сечения трубы и ее отверстия равно $\frac{n}{1}$, то скорость воды в трубе будет равна $\frac{\sqrt{a}}{n}$. Но если бы дно *FD* полностью отсутствовало, то предельная скорость воды в этой же трубе была бы равна $\sqrt{a}$, что больше чем $\frac{\sqrt{a}}{n}$. Таким образом, вода в трубе стремится к большему движению, но ее упор встречает сопротивление со стороны дна *FD*. Этот упор и противодействие ему сжимают воду, каковое сжатие выдерживается стенками трубы, и, стало быть, последние испытывают на себе подобное же давление. Таким образом,

ясно, что давление стенок пропорционально ускорению или приращению скорости, которую приобрела бы вода, если бы мгновенно исчезла всякая помеха для движения, так что она выбрасывалась бы прямо в воздух [122—123].

Итак, теперь дело свелось к тому, чтобы, отрезав трубу ED в cd в какой-либо момент времени при продолжающемся протекании воды через o, определить, какое ускорение может вследствие этого получить капелька $abdc$; такое именно давление будет испытывать со стороны протекающей воды частица ac, взятая на стенках трубы. Для этой цели надлежит рассмотреть сосуд $ABEcdC$ и для него найти ускорение весьма близкой к вытеканию частицы воды, если она будет иметь скорость $\frac{\sqrt{a}}{n}$. Это мы и сделали в очень общем виде в § 3 части пятой. Но так как в настоящем частном случае вычисление является очень коротким, то мы здесь заново произведем вычисление движения в укороченном сосуде $ABEcdC$.

Рассматриваем скорость как переменную. Пусть скорость воды в трубе Ed равна v; сечение трубы, как и раньше, равно n, длина Ec равна c. Обозначим длину бесконечно малой и весьма близкой к вытеканию водной частицы ac через dx. В E будет находиться равная капелька, которая будет готова вступить в трубу в тот самый момент времени, когда другая капелька $acdb$ выбрасывается. Но в то время как капелька в E, масса которой равна ndx, вступает в трубу, она приобретает скорость v, а также живую силу nv^2dx [124], каковая живая сила полностью возникла вновь, ибо вследствие бесконечно большого размера сосуда AE капелька E, не вступившая еще в трубу, не обладала никаким движением. К указанной живой силе nv^2dx следует прибавить приращение живой силы, получаемое водой в Eb, пока капелька ad вытекает, а именно $2ncvdv$. Эта сумма соответствует действительному снижению капельки ndx с высоты BE, т. е. a. Таким образом, мы имеем

$$nv^2dx + 2ncvdv = nadx,$$

или

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{a - v^2}{2c}.$$

Но при всяком движении приращение скорости dv пропорционально давлению, умноженному на малое время, которое в данном случае равно $\frac{dx}{v}$. Таким образом, в нашем случае давление, испытываемое капелькой ad, пропорционально величине $\frac{vdv}{dx}$, т. е. величине $\frac{a - v^2}{2c}$ [125].

А в тот момент времени, когда труба разрезается, $v = \frac{\sqrt{a}}{n}$, или $v^2 = \frac{a}{n^2}$; стало быть, это значение надлежит поставить в выражение $\frac{a - v^2}{2c}$, которое таким образом превращается в следующее выражение: $\frac{n^2 - 1}{2n^2c} a$. Последнее же представляет собой величину, которой пропорционально давление воды на частицу трубы ac, каким бы сечением ни обладала труба и каким бы отверстием ни было просверлено ее дно. Итак, если давление воды будет установлено в одном случае, то вместе с тем оно станет известно и во всех остальных случаях. Этот случай мы имеем именно тогда, когда отверстие бесконечно мало или когда n бесконечно велико по сравнению с единицей; ведь само по себе ясно, что в этом случае вода применяет все свое давление, которое соответствует высоте a, каковое давление мы обозначим через a. Но когда n бесконечно велико, то единица по сравнению с числом n^2 исчезает, а величина, которой пропорционально давление, оказывается равной $\frac{a}{2c}$. Таким образом, если мы желаем вообще узнать, каково будет давление, когда n является каким угодно числом, то следует установить такую аналогию. Если величине $\frac{a}{2c}$ соответствует давление a, то каковым будет давление для величины $\frac{n^2 - 1}{2n^2c} a$. Этим путем устанавливается, что искомое давление равно $\frac{n^2 - 1}{n^2} a$, что и требовалось определить.

Следствие 1

§ 6. Так как буква c выпала из расчета, то отсюда следует, что все части трубы, как те, которые расположены ближе к сосуду AG, так и более отдаленные, испытывают одинаковое давление со стороны протекающей воды и притом меньшее, чем части дна CG. Эта разница тем больше, чем больше отверстие o. И стенки трубы не испытывают уже никакого давления, когда в ней совершенно отсутствует перегородка FD, так что воды вытекают из полного отверстия.

Следствие 2

§ 7. Если где-нибудь в трубе пробуравить очень малое отверстие, т. е. очень малое по сравнению с отверстием o, то вода будет выскакивать с такой скоростью, с какой она могла бы подняться на высоту $\frac{n^2a - a}{n^2}$, если только посторонние помехи не создают никакого препятствия. А именно высота броска на фиг. 73, т. е. ln, будет равна $\frac{n^2a - a}{n^2}$. А если имеется вертикальная или хотя бы как угодно наклонная трубочка gm, сообщающаяся с горизонтальной трубой, но, однако, чтобы край вставленной трубочки не выдавался внутри полости горизонтальной трубки, дабы протекающая вода не наскакивала на этот край, то вертикальная высота gh воды во вставленной трубке будет точно так же равна $\frac{n^2a - a}{n^2}$; в этом последнем случае нет надобности в том, чтобы трубочка gm была очень узкой.

Пояснение

§ 8. Таким образом, настоящую теорию можно будет подтвердить на очень легком опыте, который будет иметь тем большее значение, что до сих пор никто не определил подобного рода равновесий, применение которых чрезвычайно ясно; что с помощью этого же метода можно самым общим образом получить давление вод, текущих по трубам, для водопроводов, как угодно накло-

ненных, изогнутых, при изменяющемся сечении и при любой скорости вод; что этого рода опытами подтверждается не только настоящая теория давлений, но сверх того вся теория движений, которую мы дали выше, ибо они указывают на то, что мы правильно определили ускорения вод. Но при этом опыте надлежит принимать меры к тому, чтобы горизонтальная труба была внутри хорошо отполирована, чтобы она была совершенно цилиндрической, а также горизонтальной. Она должна быть достаточно широкой, дабы от прилипания воды к стенкам трубы не могло произойти значительного ослабления движения. Самый же сосуд должен быть очень широким и должен все время поддерживаться полным. Следует также выяснить путем наблюдения, как велика способность стеклянной трубки gm поднимать покоящиеся воды, каковая способность присуща всем капиллярным или очень узким трубкам; ибо этот подъем надо вычесть из высоты gh. Или лучше следует взять трубку равной толщины и, заткнув отверстие o, отметить точку m, а затем, предоставив водам течь, отметить также точку h. Согласно же теории, снижение mh будет равно $\frac{1}{n^2}a$, т. е. $\frac{1}{n^2}EB$.

Наконец, следует также обратить внимание на струю воды, вытекающей в o; ибо сжатие струи тоже приводит к тому, что вода в горизонтальной трубе протекает со скоростью, меньшей, чем $\frac{\sqrt{a}}{n}$. На это сжатие и на способ его предупреждения я обращал внимание в части четвертой. Но хотя с этими осложнениями может получиться так, что в опыте не сможет получиться значительной ошибки, тем не менее, если мы хотим применить большую точность, следует на опыте определить количество воды, вытекающей за заданное время, которое, будучи очень точно сопоставлено с сечением трубы, даст скорость воды, протекающей внутри трубы, которую при вычислении мы положили равной $\frac{\sqrt{a}}{n}$. Если же на опыте будет найдено, что она меньше, а именно, что она является такой, какая соответствует высоте b, тогда давление протекающей воды будет приблизительно равно $a - b$.

Следствие 3

§ 9[126]. Если сначала заткнуть пальцем отверстие в o, а затем предоставить водам течь, то с первого момента течения давление a переходит в давление $\frac{n^2a-a}{n^2}$. Но эта смена давлений не происходит мгновенно. Больше того, если говорить точно, она происходит лишь спустя бесконечно большое время, ибо, как мы видели в части пятой, никогда не имеется на лицо в точности вся та скорость вод, которую при вычислении мы приняли соответствующей всей высоте a. Тем не менее они стремятся к этой скорости с невероятным ускорением тотчас же после выбрасывания первых капель, так что, кажется, поскольку об этом можно судить на основании чувств, что она без какого-либо заметного промедления приобрела полную скорость, если только водоводы не являются очень длинными, ибо тогда можно ясно на глаз различать ускорения; пример этого я дал в § 13 части пятой. Таким образом, если в этих трубках, подводящих воду из весьма далеко расположенного водоема к фонтану, определить на опыте в каком-либо месте давления, пользуясь тем способом, о котором я говорил выше, то можно будет установить, что давление, хотя и быстро, однако не мгновенно уменьшается, и можно будет распознать разности давлений.

А для того чтобы в общем виде определить давление вод, следует принять в качестве v ту скорость, которой вода обладает в том самом месте и в тот самый момент времени, в которые желательно определить давление, и если предполагается, что эта скорость соответствует высоте b, то давление вод будет $a—b$. Отсюда, если к настоящему присоединить то, что было изложено в пятой части, можно будет определить, каким будет давление в отдельные моменты времени.

Из сказанного выше можно очень ясно предвидеть законы настоящей гидравлико-статики, если мы по желанию представим себе любую форму сосуда и любую скорость вод, текущих по трубам. В самом деле, давление вод будет постоянно равно $a—b$, где под a подразумевается высота, соответствующая

скорости, с которой вода должна была бы вытекать спустя бесконечно большое время, если бы труба была разрезана и если бы сосуд поддерживался все время полным, а под b — высота, соответствующая скорости, с которой вода в действительности протекает. Весьма удивительно, что это простейшее правило, которого придерживается природа, могло до сих пор оставаться неизвестным. Поэтому я докажу его теперь более ясно.

Задача

§ 10. Определить давление воды, протекающей с любой равномерной [127] скоростью по трубе, имеющей какую угодно форму и наклон.

Решение

Пусть имеется труба ACD (фиг. 74), через отверстие o которой протекают, допустим, воды с постоянной скоростью и притом с такой, какая соответствует вертикальной высоте oS. Проведем SN и представим себе бесконечно широкий сосуд $NMQP$, наполненный водой до NP, из которого труба постоянно и равномерно засасывает свои воды. Я выбрал такие условия, чтобы имелась налицо однообразная причина или побуждающая сила, которая гонит вперед воды с заданной скоростью, т. е. поддерживает одинаковое течение вод. Без этого допущения наша задача была бы неопределенной, ибо в одной и той же трубе к какому-либо моменту времени одна и та же скорость может быть создана на бесчисленное множество ладов; поэтому для того чтобы можно было бы измерить причину, толкающей вперед воду, следует представить себе однообразие в движении вод [128].

Пусть теперь требуется определить давление в CF (или в cf). Для этой цели мы снова предположим, что труба разрезана в CE (или в ce) с тем, чтобы определить в перпендикулярном к трубе сечении, какое ускорение или замедление получит капля $CEGF$ (или $cegf$) после первого момента разрыва. Поэтому нам следует определить вообще мгновенное движение через укороченный сосуд $NMAECQP$ (или $NMAceQP$). Следовательно, пусть скорость бесконечно малой капельки $CEGF$ (или $cegf$) в самой точке

укорочения равна v, ее масса — dx; тогда живая сила воды, движущейся в укороченном сосуде, будет пропорциональна количеству v^2; поэтому мы положим ее равной αv^2, понимая под буквой α какую-нибудь постоянную величину, которая зависит от размеров разорванной трубы; однако точного определения ее здесь не требуется. Заметим, что живая сила воды в воображаемом сосуде $NMQP$ не принимается в расчет в силу его бесконечно большого размера; однако если бы он даже не обладал бесконечно большим размером, то от этого все-таки не получилось бы никакого изменения в вычислении. Итак, мы видим, что приращение живой силы воды, движущейся в укороченном сосуде, равно $2\alpha vdv$; если к последнему прибавить живую силу, одновременно порожденную в выброшенной капельке, то получается $2\alpha vdv + v^2dx$, что представляет собой полное приращение живой силы, соответствующее действительному снижению капельки dx на величину высоты точки C (или c), каковую мы обозначим через a. Поэтому указанное выше полное приращение живой силы надлежит приравнять к adx, так что получится

$$2\alpha vdv + v^2dx = adx,$$

или

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{a - v^2}{2\alpha}.$$

Если остальное сделать так, как в § 5, и если допустить, что скорость v является такой, какая соответствует высоте b, то окажется, что давление воды в CF (или в cf) столь же велико, как в воде, стоящей на высоте $a—b$. При этом можно отметить, что если не имеется никаких посторонних помех для движения и если вытекающая в o струя не подвергается сжатию, то высота b находится к высоте oS в квадратном отношении отверстия o к сечению CE (или ce) [129, 130].

Следствие

§ 11. Когда b больше a, то величина $a—b$ оказывается отрицательной, и, таким образом, давление превращается во всасывание, т. е. стенки трубы испытывают давление внутрь. А тогда

следует рассматривать это дело таким образом, как если бы вместо столба воды CT, который располагается наверху и находится в равновесии с текущей водой, существовал подвешенный водяной столб ct, стремлению которого упасть противодействовало бы притяжение текущей воды. Так, например, если сечение трубы ce равно отверстию o, тогда $b = oS$, если совершенно не принимать во внимание случайных помех для движения. Отсюда, если из трубы вниз будет идти трубочка cr, а последняя будет заполнена водой от своего начала и до точки t, расположенной на одном уровне с отверстием o, то вода ct будет оставаться подвешенной без движения. Но если точка t будет расположена ниже o, то вода будет спускаться по трубочке cr и будет постоянно вытекать в r, однако скорость воды, вытекающей в r, вопреки тому, что мог бы легко подумать всякий, незнакомый еще с настоящей теорией, не будет такой, какая соответствует высоте NP над r, хотя бы и были устранены все помехи, а скорее эта скорость будет соответствовать, если только трубочка очень узка по сравнению с трубой, высоте tr. Если точка t будет расположена выше точки o, то вода сама собой поднимется, а после того как она вся войдет в трубу, через трубочку будет втягиваться воздух, и в скором времени водяная струя, вытекающая в o, помутнеет вследствие примешавшегося воздуха и потеряет свою прозрачность и плотность. Таким образом, ясно, в каких случаях давление будет положительным и в каких отрицательным; а именно, давление в трубе бывает тем бо́льшим, чем она шире и чем ниже она расположена.

Действительно, в теории высота $b = \frac{1}{n^2} \times oS$, если $\frac{1}{n}$ обозначает отношение между сечением отверстия и тем сечением трубы, для которого необходимо определить давление. Но если помехи значительно уменьшают движение, то при определении давлений представляется более подходящим установить на опыте, какова в действительности скорость воды, и вместо b подставить высоту, соответствующую этой скорости. Равным образом давление будет определено более точно, если вместо a подставить не высоту

водной поверхности NP над местом вытекания, а высоту той скорости, с которой воды в действительности вытекают из той же трубы в месте разреза. Однако эти поправки не всегда имеют место. А теперь я поясню эту общую теорию на некоторых примерах.

Пример 1

§ 12. Пусть имеется сосуд $ABFG$ (фиг. 75), из середины дна которого вниз идет труба DE, имеющая форму усеченного расширяющего книзу конуса. Пусть в AG постоянно подливается вода, так что сосуд поддерживается таким образом полным.

Пусть высота водной поверхности над отверстием E равна a, а над D (это то место, для которого требуется определить давление воды) равна c; сечение отверстия в E равно m, а сечение, т. е. горизонтальный разрез в D, равно n. Тогда давление воды в D будет равно $c - \frac{m^2}{n^2}a$, каковая величина в силу сделанных выше допущений является отрицательной, так что стенки трубы испытывают давление внутрь со стороны столба воды высотой в $\frac{m^2}{n^2}a - c$.

Таким образом, если вообразить себе изогнутую трубу DLN, вставленную в другую DE, то вода, протекающая в D, будет находиться в равновесии с водой DLN, когда высота D над N равна $\frac{m^2}{n^2}a - c$. Если эта высота меньше, то вода сама собой будет подниматься, и не перестанет подниматься, пока выход N погружен в воды, так что, таким образом, воды могут без всякой внешней силы подниматься из более низкого места в более высокое, если в AG воды притекают в достаточном количестве. Если же вертикальная высота D над N больше, чем $\frac{m^2}{n}a - c$, то вода в колене LN поднимается до тех пор, пока высота не сравнится с этой величиной.

Между прочим, здесь следует возобновить в памяти то, чему, как я несколько раз отмечал, нас учит опыт, а именно, что по трубам, расходящимся от сосуда, в который они вставлены,

воды вытекают далеко не с той скоростью, какую они должны были бы приобрести согласно теории. Причины этого я указал в § 26 части третьей.

Отсюда получается, что высота D над N оказывается гораздо меньше той, какая должна была бы получиться согласно теории. Это расхождение будет устранено, если вместо $\frac{m^2}{n^2}a$ взять высоту той скорости, которую вода имеет в D, каковая высота может быть получена путем опыта, проведенного над количеством воды, вытекающей за заданное время [131].

Пример 2

§ 13. Если к подобному же сосуду приделать снизу вертикальную трубу вроде той, какая на фиг. 76 представлена с помощью CE, причем сечения в ней будут повсюду находиться между собой в отношении, обратном корню квадратному из высот вышележащей воды, то на эту трубу протекающая вода не будет производить никакого действия, и труба нигде не будет испытывать никакого давления или всасывания.

Отсюда следует, что естественная форма вертикальной водяной нити, пока она смежна с трубой, тождественна с формой трубы, что подтверждается и вычислением и опытом. Нить будет тем скорее утоньчаться, чем меньше высота водной поверхности над отверстием C или чем медленнее будут вытекать воды. Ясно, что водяная нить обладает тем свойством, что через все ее сечения протекает одинаковое количество воды и что скорость нигде не изменяется, где бы ни перерезать эту нить, каковое свойство относится и к трубе CFE, так что они точнейшим образом соответствуют друг другу.

Пример 3

§ 14. Пусть воды доставляются из водоема по трубе, имеющей в конце отверстие, из которого, как из фонтана, воды выскакивают вверх. Я утверждаю, что давление воды в отдельных

точках трубы будет повсюду одинаковым, если сечения ее соответственно пропорциональны $\sqrt{\frac{a}{x-b}}$, где a выражает высоту воды в водоеме над отверстием вытекания, x — высоту той же воды над местом, произвольно избранным на трубе, а b — произвольную постоянную высоту, и что тогда повсюду давление текущей воды будет относиться к давлению покоящейся воды как b к a. А так как при прочих равных условиях более широкие трубы меньше противостоят разрыву, чем более узкие, и именно в отношении радиусов, или так как усилие воды по разрыву трубы при прочих равных условиях следует отношению корней квадратных из сечений, то ясно, что труба будет в отдельных местах подвержена одинаковой опасности разрыва, если отношение между сечением y и отверстием, выбрасывающим воды, принятым за единицу, повсюду подчинятся закону следующего уравнения:

$$\left(x-\frac{a}{y^2}\right)\sqrt{y}=b$$

или

$$x^2y^4-b^2y^3-2axy^2+a^3=0.$$

В трубе, имеющей на всем своем протяжении одинаковое сечение, усилие вод по разрыву трубы повсюду пропорционально крепости трубы, если толщина стенок трубы следует отношению $x-\frac{a}{m^2}$, где под m подразумевается отношение сечения трубы к сечению отверстия, принятому за единицу.

Пример 4

§ 15. Может случиться так, что высота поверхности воды по отношению к тому месту, для которого требуется определить давление, является отрицательной, как, например, в изогнутых сифонах, подводящих воду из одного сосуда в другой, ниже расположенный. В этом случае давление становится отрицательным по двум причинам, а именно: оно равно $-a-b$, где a

обозначает высоту места над поверхностью воды, а b — высоту, соответствующую скорости воды в упомянутом месте [132].

Но я полагаю, что изложенного уже достаточно, чтобы правильно понять статику движущихся жидкостей. Перехожу теперь к некоторым другим явлениям, разрешение которых зависит от этих только что данных нами правил.

§ 16. В части третьей (§ 25) я упомянул о прилипании воды, текущей по трубам. Но определение повсюду истинных мер этого прилипания представляет собой дело, которое не может быть выполнено успешно, если ему не предпослать настоящей гидравлико-статики. Ибо недостаточно принимать во внимание вертикальные высоты над отверстием вытекания, как это обыкновенно полагают, но следует также знать соответственные скорости вод, а последние познаются по сечениям. Для того же чтобы сразу выявился общий закон при определении силы прилипания, или усилия, с помощью которого жидкости побуждаются ко взаимному разделению, я утверждаю, что сила прилипания равна силе, давящей на стенки трубы внутрь, определение которой мы дали в § 10. Мне кажется, что это предложение не требует еще иного доказательства. Ибо подобно тому как сжатие воды, или сила, с помощью которой ее части прижимаются друг к другу, равна расположенному наверху покоящемуся столбу воды, так в свою очередь усилие разделить жидкости следует признать равным подвешенному покоящемуся вертикальному столбу воды, находящемуся в равновесии с текущими водами. Взамен примеров мы возьмем то же, чем мы воспользовались выше для того, чтобы показать отрицательные давления вод.

I. Если на фиг. 75, поясненной в § 12, в трубочке DLN высота D над N такова, что стоящая в ней вода находится в равновесии с водами, протекающими в D, то сила прилипания в D, дабы вода там не разделилась на части, должна быть такой, какой вес имеет столб воды с тем же основанием и с вертикальной высотой DN. Отсюда понятно то, что я говорил в § 25 части третьей, а именно, что длина трубы может настолько возрасти, что воды в трубе перестают,

наконец, быть сплошными, а скорее разделяются на столбы, и что это имеет место в цилиндрических трубах, когда они опускаются ниже 32 футов, в конических же трубах достаточно меньшего снижения. Так, например, если нижнее отверстие будет вдвое больше верхнего отверстия, вставленного в водоем, то трубы не могут снизиться более, чем на 8 футов без того, чтобы не возникла опасность разделения вод. Однако во всех этих теоретически рассмотренных примерах предполагается, что воды вытекают со всей своей скоростью без уменьшения движения.

II. На том же основании ясно, что если трубы по направлению вниз сходятся, то они тогда допускают снижение большее, чем на 32 фута. А в случае фиг. 76, поясненного в § 13, а также во множестве других случаев снижение можно продолжать до бесконечности.

III. Но если высота водной поверхности в водоеме по отношению к рассматриваемому месту отрицательна, как это, например, бывает, когда воду приходится проводить через гору, то как бы это дело ни было устроено, высота никогда не может превысить 32 футов, что явствует из § 15. Ибо если даже воды текут определенно с бесконечно малой скоростью, то уже требуется сила прилипания, которая равна всему столбу воды, и требуется бо́льшая сила, когда они текут со значительной скоростью. Поэтому я полагаю, что те средства исцеления, которые были предложены некоторыми писателями, являются тщетными. Конечно, мне известно, что без какого-либо постороннего приспособления воды зачастую крепко держатся на высоте более 32 футов, а ртуть — на высоте свыше 30 дюймов, но этот эффект является ненадежным и непостоянным. Некоторые также утверждают, что в пустоте происходит течение вод по изогнутым сифонам. Но была ли пустота такова, что в приемнике не осталось даже $^1/_{60}$ части воздуха, и почему высота трубы более чем на $^1/_2$ фута превышала поверхность подлежавшей засасыванию

воды, этого я не знаю. Таким образом, то, что я сказал о возможном последующем разделении вод, я прошу рассматривать исключительно как гипотетическое суждение. Достаточно того, что я точно определил, сколь большая сила побуждает воды ко взаимному разделению.

§ 17. Далее, существуют и другие явления природы, правильное объяснение которых зависит от этой гидравлико-статической теории. Приведем 2 примера. Дым, поднимаясь в печи, увлекает за собой с большим натиском и воздух через отверстие, сделанное в печи. Ветер, переносясь из более тесного места в более открытое, теряет кое-что из своей упругости, о чем, например, можно заключить на основании того, что окна, открытые воздухом, вышедшим из помещения вследствие своей большой упругости, после закрываются. Можно было бы привести и другие явления, которые не представляется возможным все исследовать.

Давления движущихся жидкостей могут, конечно, изменяться на бесчисленное множество ладов, но я полагаю, что все они могут быть сведены к нашим началам. Мы исследовали два образца этой теории. Первый я вывел из известного движения, которое имеет жидкость, если в том месте, где требуется определить давление, в сосуде просверлить бесконечно малое отверстие; второй же я вывел из нашей общей теории как говорится, à priori. Зачастую одновременно имеет место и то и другое, так что одно из них требует помощи со стороны другого, и тогда возникает другая оценка давлений, которую я поясню на одном примере.

§ 18. Вообразим, что в сосуде, представленном на фиг. 72, горизонтальная труба имеет не только в своем конце, но и в месте своего присоединения EG поперечную, вертикально поставленную, просверленную посредине пластинку, причем все остальные допущения, указанные в § 5, остаются без изменения. Тогда стенки трубы ED будут испытывать иное давление со стороны протекающей воды, чем если бы не было поставлено никакой пластинки EG, и притом меньшее, с какой бы меньшей скоростью ни происходило движение. Чтобы точно определить это давление, следует пойти

по тому же пути, что и в упомянутом выше § 5, а именно: прежде всего следует определить ту скорость, с которой воды протекают в трубе ED, после того как эта скорость стала уже равномерной, Затем надлежит также исследовать значение $\frac{vdv}{dx}$, если допускается, что труба где-нибудь разорвана.

А каким образом указанное выше может быть определено, это — вопрос, связанный преимущественно с восьмой частью, если одновременно применить меры предосторожности, указанные в § 14 части седьмой. В восьмой части в общем виде излагается движение жидкостей, протекающих через многие отверстия, а в § 14 части седьмой особо показывается, каким образом надлежит оценивать потенциальный подъем, возникающий в капельках, когда последние затекают через отверстие не в покоящуюся как бы воду, а в воду, увлекаемую движением, которым нельзя пренебречь.

Если пойти правильно по указанному здесь пути, то можно найти, что скорость, с которой вода равномерно протекает по трубе ED, соответствует высоте

$$\frac{m^2p^2a}{m^2n^2+n^2p^2-m^2p^2},$$

где m, p и n обозначают соответственно сечения отверстий, сделанных в пластинках EC и FD, а также трубы ED. Под a же подразумевается высота воды над горизонтально расположенной трубой ED.

Если далее предположить, что труба разрезана в cd и что капелька ad движется со скоростью v, или что высота, соответствующая этой скорости, равна v^2, и одновременно длину Ec обозначить через c, а очень малую длину ac — через dx, то получится следующее уравнение:

$$2cvdv+\frac{n^2}{m^2}v^2dx=adx,$$

или

$$\frac{vdv}{dx}=\frac{m^2a-n^2v^2}{2m^2c};$$

подставив теперь вместо v^2 указанное только что значение $\frac{m^2p^2a}{mn^2+n^2p^2-m^2p^2}$, получим

$$\frac{vdv}{dx}=\frac{m^2n^2-m^2p^2}{2c\,(m^2n^2+n^2p^2-m^2p^2)}\,a,$$

чему пропорционально искомое давление. Но если сечение крайнего отверстия, обозначенное через p, как бы бесконечно мало, то давление будет равно a. Таким образом, искомое давление в силу § 5 вообще равно

$$\frac{m^2n^2-m^2p^2}{m^2n^2+n^2p^2-m^2p^2}\,a.$$

§ 19. Если сечение n трубы как бы бесконечно велико по сравнению с сечениями отверстий в пластинках, то давление будет равно $\frac{m^2a}{m^2+p^2}$. Таковой является и высота, на какую может подняться со своей скоростью вода, вытекающая в o. Таким образом, это выражение находится в соответствии с § 4 части восьмой, ибо форма сосуда, как бы бесконечно большого повсюду размера, приводит к тому, что скорость выскакивающей воды не изменяется.

Если в F нет никакой пластинки, то $p=n$, и все давление исчезает. Последнее заслуживает быть отмеченным, так как это указывает на причину, в силу которой в расходящихся трубах засасывание не бывает столь большим, каковым оно должно было бы быть в силу допущения, полагающего, что вся живая сила сохраняется, ибо в настоящем случае мы принимали во внимание ту живую силу, которая постоянно отнимается. Таким образом, никакого давления не испытывают и стенки трубы, так как пластинка, находящаяся в EG, имеет отверстие, которое как бы бесконечно меньше отверстия, находящегося в FD. Наконец, заслуживает также быть отмеченным, что хотя жидкости, движущиеся по трубам, не снабженным какими-либо пластинками, вообще оказывают давление, которое соответствует разности высот, отвечающих этим скоростям, а именно той скорости, с которой жидкость будет вытекать через разрезанную трубу

спустя бесконечно большое время, и той скорости, с которой она фактически течет по неразрезанной трубе, тем не менее в настоящем случае этот закон не имеет совершенно силы, на что рекомендуем обратить внимание тем, которые, поняв нашу гидравлико-статику, пожелают синтетически доказать общее предложение § 10. Ибо найдутся, быть может, такие, которым это покажется настолько само по себе понятным, что оно едва ли требует доказательства. Но этого рода частные законы, встречающиеся в гидравлико-статике, показывают, что подобные люди, если таковые в будущем найдутся, сами себя вводят в заблуждение благодаря некоему ложному правдоподобию.

§ 20. В интересах дела будет произвести опыты и над тем, о чем была речь в § 18, как над скоростью вод, вытекающих в o, так и над давлением. Ибо, помимо законов давления, этим путем получит подтверждение и та теория ускорений, которая имеет место, когда некоторая часть живой силы постоянно без пользы растрачивается, чем мы преимущественно занимались в части восьмой. Но при проведении этих опытов следует избегать, поскольку это возможно, помех, о которых мы уже неоднократно упоминали.

§ 21. Прибавлю сюда вопрос, который относится, конечно, не к статике жидкостей, а к гидравлике, или к движению жидкостей, но который не может быть разрешен без вышеприведенных гидравлико-статических правил. Спрашивается, если на фиг. 72 (я не принимаю здесь уже больше во внимание никакой пластинки в EG) просверлить в трубе отверстие в ac, имеющее конечное отношение как к сечению трубы, так и к сечению отверстия o, и если движение вод станет теперь равномерным, то, говорю я, спрашивается, с какой скоростью могут вырываться воды через то и другое отверстия?

Пусть теперь снова высота $BE = a$, сечение трубы равно n, сечение отверстия в o равно p; сечение отверстия ac равно m, скорость воды, вытекающей через o, равно v. Тогда скорость воды, протекающей у отверстия ac, будет равно $\frac{p}{n}v$. Следова-

тельно, она так же производит на стенки трубы давление, которое равно $a-\frac{p^2v^2}{n^2}$ (согласно § 5); поэтому я допускаю, что и высота будет почти такой, какая может породить скорость, с которой вода выделяется из отверстия ac. А сама эта скорость равна $\sqrt{a-\frac{p^2v^2}{n^2}}$. При этом скорости в отверстиях o и ac будут относиться друг к другу как v к $\sqrt{a-\frac{p^2v^2}{n^2}}$. Таким образом, всякая вступающая в трубу GE капелька, дойдя до района первого отверстия, разделяется на две части, из которых одна вытекает через ac, а другая — через o. Эти части относятся между собой как скорости, с которыми происходит здесь и там вытекание, умноженное на сечения отверстий. Таким образом, если массу всей капельки GE назвать g, то ее часть, вытекающая через ac, будет равна

$$gm\sqrt{a-\frac{p^2v^2}{n^2}} : \left(pv+m\sqrt{a-\frac{p^2v^2}{n^2}}\right),$$

а другая часть, вытекающая через o, будет равна

$$gpv : \left(pv+m\sqrt{a-\frac{p^2v^2}{n^2}}\right).$$

А если эти части умножить **соответственно** на квадраты их скоростей, то получатся их **живые силы**, суммы которых следует приравнять к $g\times a$, т. е. к **действительному снижению** капельки g с высоты a. Таким образом, получится нижеследующее уравнение, если произвести приведение

$$n^3v^2-n^3a=mpv\sqrt{n^2a-p^2v^2}$$

или

$$v^2=\frac{2n^6+m^2n^2p^2+n^2mp\sqrt{4n^4+m^2p^2-4n^2p^2}}{2n^6+2m^2p^4}a,$$

а эта величина выражает высоту, соответствующую скорости воды, вытекающей в o; если же последняя известна, то мы имеем также аналогичную высоту для другого отверстия ac, каковая, конечно, равна $a-\frac{p^2v^2}{n^2}$.

§ 22. Если $p = n$, то v^2 будет равно a; следовательно, в этом случае воды выходят через отверстие o со всей обычной скоростью, а через другое отверстие, ac, ничего не вытекает. Далее, в том и другом отверстии скорость соответствует всей высоте a, если p является как бы бесконечно малой величиной. Если же m бесконечно мало, то получается, конечно, $v^2 = a$, но высота скорости для весьма малого отверстия $ac = a - \frac{p^2}{n^2} a$, как это было уже указано в § 7. Если $m = p$, то получается

$$v^2 = \frac{n^4 a}{n^4 - n^2p^2 + p^4} \quad \text{или} \quad a - \frac{p^2v^2}{n^2} = \frac{(n^2 - p^2)^2 a}{n^4 - n^2p^2 + p^4}.$$

Наконец, можно заметить, что через отверстие o воды всегда выбрасываются со скоростью, большей той, которая соответствует высоте a; это имеет, конечно, место потому, что воды в Ed как бы производят натиск на воды dF.

Между прочим, хотя все эти следствия находятся в прекрасном согласии с характером предмета, тем не менее решение этой задачи можно признать лишь приблизительно верным.

Опыты гидравлико-статические для части двенадцатой

К §§ 3 и 4. Давления, описанные в вышеуказанных параграфах, можно легко подтвердить на опыте, если распорядиться изготовить сосуд, какой имеется на фиг. 43 и который описан в § 30 части восьмой, и если в его пластинку LQ вертикально вставить стеклянную с обеих сторон открытую трубку Тогда, заткнув отверстия H и N и заполнив всю эту систему водой, можно будет наблюдать, что в стеклянной трубке вода поднимется до уровня AB или же в силу природы капиллярных трубок — выше этого уровня. Если же затем отнять палец от отверстия N, то можно будет наблюдать, что вода в стеклянной трубке опустится, и после измерения будет найдено, если я не ошибаюсь, что оставшаяся в стеклянной трубке высота воды (за вычетом той высоты, кото-

рая обязана своим происхождением свойству капиллярных трубок) будет равна

$$\frac{\alpha^2 \times LB - \gamma^2 \times NQ}{\alpha^2 + \gamma^2},$$

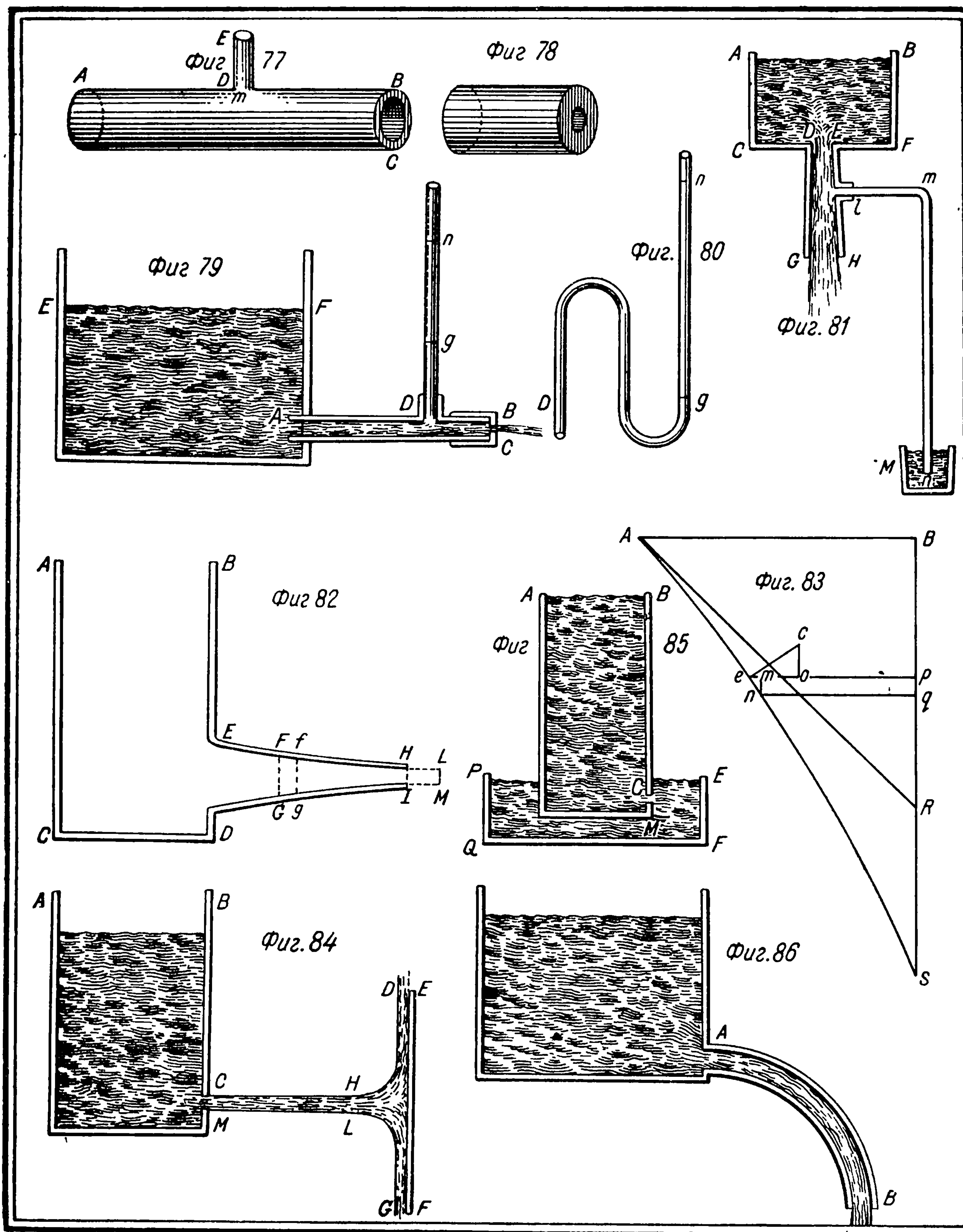
как указано в § 3, где объяснены обозначения этих букв.

Далее, если отнять палец от обоих отверстий H и N, тогда остаточная высота воды в стеклянной трубке будет такой, какая указана в § 4. Аналогично, можно вставить в пластинку QN стеклянную трубку, а затем ее изогнуть, чтобы можно было выяснить, были ли и на пластинке QN правильно определены давления.

А опыты, относящиеся к давлениям вод, проходящих по трубам, я сам произвел в присутствии нашего Общества; они описаны в т. IV «Комментариев» (стр. 194). Итак, я изложу их здесь в том виде, как они были там описаны.

«Я воспользовался деревянным ящиком, ширина которого составляла 1 фут, длина — 3 фута, высота — 14 дюймов. Я наполнил его водой, а в самой нижней части его я горизонтально вставил правильную цилиндрическую трубу, изготовленную из железа. Эта железная труба была сделана следующим образом: именно она имела длину AB (фиг. 77) в 4 дюйма 2 английских линии и диаметр BC — в 7 линий. Посредине трубы было просверлено малое отверстие m; туда была вставлена точно так же железная трубка DE, имевшая 6 линий в длину и $1^1/_2$ линии в диаметре, так что малое отверстие m находилось посредине ее основания. Позднее я в эту трубку вставил стеклянную трубку всюду одинакового сечения, как это явствует из фиг. 79, показывающего постановку всего опыта. Затем я распорядился изготовить три подогнанных к железной трубе надставки, в которых были пробиты отверстия разного размера. Подобная надставка показана на фиг. 78.

«После того как все было составлено таким образом, как это показано на фиг. 79, и было устроено так, чтобы вода не вытекала через какие-либо иные скважины, кроме отверстия в BC, я заткнул отверстие в BC и затем заметил на вертикально поставленной стеклянной трубке точку n, до которой поднялись воды, и отметил ее, обвив трубку нитью из шелковой ткани. Но до этого


Фиг 77
E
A
D
m
B
C
Фиг 78
A
B
C
D
E
F
l
m
G
H
Фиг. 81
M
n
Фиг 79
E
F
A
D
B
C
n
g
Фиг. 80
D
g
n
Фиг 82
A
B
C
D
E
F f
H
L
G g
I
M
Фиг 85
A
B
P
E
Q
F
C
M
Фиг. 83
A
B
c
e
m
o
p
n
q
R
S
Фиг. 84
A
B
C
M
H
L
D
E
G
F
Фиг.86
A
B

я определил капиллярную способность этой стеклянной трубки и установил, что она составляет 5 линий, так что если трубку вставить вертикально в воду, то разность между обоими поверхностями воды составит 5 линий. Благодаря этому точка n поднималась на столько же линий выше поверхности EF, поэтому при вычислении следует всякую высоту Dn, Dg принимать уменьшенной на 5 линий.

«При всех опытах ящик поддерживался настолько полным воды, чтобы высота AF составляла 9 дюймов 7 линий, а высота Dn — 10 дюймов. После того как все это было указанным образом подготовлено для опыта, открывали отверстие в BC и предоставляли водам вытекать; тотчас же вода в стеклянной трубке снижалась, например, из n в g, каковое место я опять-таки отмечал с помощью другой шелковой нити, ранее обвитой вокруг трубы. Указанным образом мы, наконец, произвели такие опыты, которые соответствуют § 5 и след.».

Опыт 1

«Когда диаметр отверстия в надставке BC составлял $2^1/_5$ линии, то снижение настолько мало превышало 1 линию, что нельзя было найти никакого расхождения между теорией и результатом опыта».

Опыт 2

«Когда была взята другая надставка, в которой диаметр отверстия составляет $3^2/_5$ линии или несколько больше этого, то снижение ng оказалось равным $6^2/_3$ линии, опять-таки совершенно так, как указывает теория».

Опыт 3

«Применяя третью надставку, в которой диаметр отверстия был равен 5 линиям или чуть меньше этого, мы наблюдали, что снижение ng было равно 28 линиям. Согласно теории, оно должно было бы составить 29 линий, ибо отверстие как будто не имело полных 5 линий в диаметре. Это небольшое расхождение следует отнести за счет помех, которые вода испытывает при протекании через трубку, которые оказываются большими, чем в предыдущих опытах, благодаря усиливающемуся движению внутри трубки».

Опыт 4

«Наконец, не приставляя никакой надставки, мы предоставили водам вытекать через все отверстие, и тогда почти вся вода ушла из стеклянной трубки. Однако осталась некоторая часть ее, которую мы нашли по высоте, равной 8 линиям. Но из них 5 линий следует отнести за счет свойства капиллярной трубки, а остальные 3 обязаны тем помехам, которые вода встречает при протекании от D до B.

«Таким образом, опыты в точности соответствуют теории. А отсюда нетрудно предвидеть возможность того, что стенки трубки не только не будут испытывать давления наружу, но будут испытывать давление внутрь по направлению к оси трубки (ср. § 11). И я убедился в этом с помощью другого, изложенного ниже опыта».

Опыт 5

«Вместо цилиндрической трубы AB я применил коническую, у которой наружное отверстие было больше внутреннего отверстия, и одновременно я воспользовался изогнутой стеклянной трубкой, какая показана на фиг. 80. И если до начала течения вода стояла в стеклянной трубе в n, то в той же трубе вода опускалась до g, когда воды вытекали через коническую трубу. Точка g была ниже D, показывая, что в продолжение течения коническая труба была сжата. Но в этих случаях оказываются значительными помехи для движения; в результате этих помех скорости в наружном отверстии становятся гораздо меньше тех скоростей, которые соответствуют высоте воды. По этой именно причине высота точки D над g не была столь большой, какой она была бы в других случаях, но все-таки какой-то она была. Аналогичный эффект, но только гораздо более заметный (ср. § 12), я получил иным путем. Этот другой опыт я провел в следующем году перед академиками, в присутствии светлейшего португальского принца Эмануила».

Опыт 6

«На фиг. 81 $ACFB$ изображает цилиндр, в дно которого была вставлена коническая труба $DGHE$. Последняя имела на своей стенке в l очень малую трубочку, в которую входил край изогну-

той стеклянной трубки *lmn*. Высота *CA* составляла 3 дюйма 10 линий, *El* — 4 линии, *lH* — 2 дюйма $9^1/_2$ линий; сечение конической трубы в *l* относилось к сечению отверстия *GH* как 10 к 16; длина *ln* составляла 5 дюймов 6 линий; ее наружный конец *n* был погружен в воду в небольшом сосуде *M*.

«Когда отверстие *GH* затыкалось пальцем, а сосуд наполнялся, то через стеклянную трубочку *lmn* вода по каплям перетекала в сосуд *M*. Но когда палец убирался и воды начинали уже вытекать через *GH*, то возвратным движением вода сама собой поднималась из малого сосуда *M* по трубке *nml* и вместе с остальными водами вытекала через *GH*, пока малый сосуд *M* полностью не опорожнялся. Наверху же все время подливались воды, дабы сосуд поддерживался полным. Затыкая пальцем часть отверстия *GH*, можно было легко добиться того, чтобы в стеклянной трубке *lmn* воды по желанию двигались вверх или вниз».

Если бы кто-нибудь еще пожелал выяснить на опытах, находится ли теория в согласии с задачей § 18, то он потрудился бы с пользой, так как этим путем он пояснил бы на прекрасном, и притом очень легко воспроизводимом, примере не только настоящую нашу г и д р а в л и к о - с т а т и к у, но равным образом и новую, никем еще не рассмотренную теорию части восьмой.

После того как изложенное выше было уже занесено на бумагу, я сам проделал те опыты, которые я только что упомянул. При этом я все пользовался тем же прибором, который я только что описал и который изображен на фиг. 79; однако сверх этого, как того требует природа дела, я поставил к трубе *A* другую надставку. При этом высота воды *AF* составляла 8 лондонских дюймов, а диаметр железной трубы *AC* составлял снова 7 линий. Я также воспользовался теми же покрышками, что и раньше.

При каждом опыте я наблюдал снижение поверхности *n*, когда палец отнимали от надставки *BC*. Измеряя одновременно вертикальную высоту отверстия *C* над полом, я наблюдал расстояние этой вертикальной линии от того места, на которое падала водяная струя. Это расстояние я буду называть в е л и ч и н о й б р о с к а.

При всех опытах эта вертикальная высота составляла каждый раз 19 дюймов. После того как все это было вышеуказанным образом подготовлено, я произвел такие опыты.

Опыт 7

Когда диаметр внутреннего отверстия надставки составлял $^1/_2$ линии, а диаметр внешнего отверстия надставки $3\,^2/_5$ линии, то снижение ng оказалось несколько меньше чем 7 дюймов; величина броска — 9 дюймов. В теории же, изложенной в § 18, указывается, что снижение ng равно 6 дюймам 10 линиям и величина броска — $9\,^1/_2$ дюймам.

Опыт 8

Затем диаметр внутреннего отверстия был равен 5 линиям, а диаметр другого отверстия — 3 линиям. Снижение ng составило почти 17 линий, а величина броска — 24 дюйма. В теории же ng равно $17^1/_4$ линии, а величина броска — 23 дюймам.

Опыт 9

Далее, когда диаметр внутреннего отверстия составлял $3^2/_5$ линии, а диаметр внешнего отверстия — 5 линий, то снижение ng оказалось почти тем же, что и в опыте 7, а именно, около 7 дюймов. Правда, величина броска оказалась большей, а именно 11 дюймов. В теории ng составляет 6 дюймов 11 линий, а величина броска почти 11 дюймов.

Опыт 10

Наконец, при диаметре внутреннего отверстия в $3^3/_5$ линии и диаметре внешнего отверстия в $2^1/_5$ линии снижение ng составило почти 1 дюйм, а величина броска — 23 дюйма. В теории $ng = 14$ линиям, а величина броска — 22.6 дюйма.

Все эти опыты находятся, конечно, в отличном согласии с теорией. Возможно, что это согласие было бы еще большим, если бы

можно было более точно измерять отверстия. Полагаю, однако, что никто не найдет недопустимым указанные небольшие расхождения чисел. А вызываются они больше всего сжатием воды в AC, которое происходит в то время, когда капли, вступающие в трубу через внутреннее отверстие, теряют часть движения; поэтому величина броска получается в теории несколько большей, а снижение ng — меньшим, чем на опытах. Хотя и была к этому возможность, но я решил не присоединять сюда измерение, чтобы не осложнять вычисления.

ГИДРОДИНАМИКИ

ЧАСТЬ ТРИНАДЦАТАЯ

О реакции жидкостей, вытекающих из сосудов, и об их натиске на плоскости, на которые они попадают после вытекания

§ 1. Воды во время их выбрасывания из сосуда действуют на сосуд, из которого они вытекают, совершенно так же, как действует ядро на военное метательное орудие или на пушку, из которой его выбрасывают при выстреле, а именно: они отталкивают сосуд обратно. На это уже указал Ньютон в «Математических началах естественной философии» (1-е изд., стр. 332); он правильно выводит подъем мячей, наполняемых порохом, надлежащим образом смешанным с углем, ибо воспламенившееся вещество, постепенно вырываясь из отверстия, выбрасывает эти шары вверх [133].

Однако названный выше автор исследовал этот вопрос недостаточно обще по сравнению с важностью дела (так как это не вытекало из его плана) и не дал истинной его меры. Больше того, в последующих двух изданиях он обошел его полным молчанием; но он высказал мысль, что *эта сила отталкивания равна весу водяного цилиндра, основанием которого является отверстие, пропускающее воды, и высота которого равна высоте поверхности воды над отверстием*. Конечно, эта мера правильно выводится из того мнения, которого в то время придерживался Ньютон по вопросу о скорости воды, вытекающей из сосуда, поскольку он ут-

верждал, что вода в состоянии со своей скоростью подняться до половины высоты поверхности.

Но подобно тому, как ложность последнего предложения теперь уже ни для кого не остается открытой, точно так же отсюда всякий легко поймет неправильность другого предложения, хотя на первый взгляд оно кажется достаточно правдоподобным.

§ 2. Рассмотрим прежде всего этот вопрос в простейшем случае, а именно, если мы допустим, что воды вытекают из сосуда бесконечно большого размера по горизонтальному направлению. Но я уже доказал, что сила отталкивания не возникает полностью сразу с начала движения, а только поскольку вся скорость будет налицо в текущих водах, так что если сосуд не имеет бесконечно большого размера, то сила отталкивания увеличивается только постепенно вместе со скоростью вытекающих вод или даже убывает в зависимости от характера сопутствующих обстоятельств.

Но от этих мгновенных изменений мы по началу отвлечемся, допустив, что имеет место равномерное течение из бесконечно большого сосуда. И силу обратного толчка будет удобнее всего определить, если поставить вопрос, какова сила, необходимая для того, чтобы создать данное движение. Для этой цели придется принять во внимание не только скорость вытекающей воды, но и ее количество. Количество же зависит частью от размера отверстия, частью от сокращения струи, которое при этом является изменчивым. Правда в части четвертой мы видели, что сокращения струи можно полностью избежать. Однако если некоторое сокращение имеется, надлежит рассматривать в качестве отверстия сечение максимально сжатой или утоньшенной струи, и в этом случае я утверждаю, что сила **отталкивания будет равна весу водяного цилиндра, основанием которого является отверстие, выпускающее воды** (т. е. сечение максимально сжатой горизонтальной струи), **и высота которого равна удвоенной высоте поверхности воды над отверстием, или, точнее, удвоенной высоте, соответствующей скорости вытекающей воды.** Таким образом, если нет никакого сжатия струи, как, например, его нет, когда воды протекают че-

рез короткую трубочку, то отталкивание бывает вдвое или почти вдвое большим, чем это было определено Ньютоном.

§ 3. Чтобы доказать это положение, необходимо рассмотреть здесь некое механическое начало, в пригодности которого для разрешения также и других вопросов я зачастую убеждался. Начало это следующее: если тело из состояния покоя получит одну и ту же скорость при посредстве прямых движущих давлений, которые изменяются любым образом, и если все давления умножить на соответствующие им малые отрезки времени, то сумма всех этих произведений будет всегда одинаковой, т. е. если давление равно p, малый отрезок времени равен dt, то $\int pdt$ будет постоянным [134]. Это я изложил более ясно в «Комментариях Петербургской Академии наук» (т. 1, стр. 132).

§ 4. Представим теперь цилиндр как бы бесконечно большого размера, из которого воды вытекают горизонтально с равномерной скоростью, если отвлечься от действия, производимого тяжестью на частицы, после того как они уже вытекли, так что все они продолжают двигаться горизонтально и равномерно. Но частицы ускоряются и продолжают испытывать давление все время, пока еще не наступит наивысшая степень скорости, последнюю же они приобретают, когда приходят в место максимально сжатой струи. Это и является причиной того, что, как я указал, сечение струи в этом именно месте следует рассматривать в качестве отверстия вытекания. Пусть размер этого сечения равен 1 и пусть в этом месте воды обладают скоростью, соответствующей высоте A. Допустим, что вытек цилиндр воды, имеющий в качестве основания 1 и в качестве длины L. Если время выразить с помощью расстояния, деленного на скорость, то скорость, соответствующая высоте A, должна будет выразиться через $\sqrt{2A}$, а время вытекания через $\frac{L}{\sqrt{2A}}$. После указанных предпосылок исследуем движущее давление, которое в состоянии за время $\frac{L}{\sqrt{2A}}$ сообщить цилиндру L скорость $\sqrt{2A}$. Пусть это давление равно p. Для краткости вычис-

ления допустим, что оно действовало в течение времени t и что оно сообщило цилиндру скорость v. Тогда будет $dv = \frac{pdt}{L}$ и $v = \frac{pt}{L}$; отсюда $p = \frac{Lv}{t}$. Подставим теперь $\sqrt{2A}$ вместо v и $\frac{L}{\sqrt{2A}}$ вместо t; тогда будет $p = L\sqrt{2A} : \frac{L}{\sqrt{2A}} = 2A$. Таким образом, давление, побуждающее постоянно воду к вытеканию, равно весу водяного цилиндра, основанием которого является определенное выше отверстие, пропускающее через себя воды, и высота которого равна удвоенной высоте, соответствующей скорости вытекающей воды; столь велика и реакция, толкающая сосуд обратно, что и требовалось доказать.

§ 5. Доказательство остается тем же, если воды вытекают не через отверстие, а через горизонтальную цилиндрическую трубу с равномерной скоростью или также через трубу с произвольно неравным сечением. Это последнее можно доказать и прямо, если надлежащим образом выразить давление, которое должно быть в отдельных каплях, дабы последние с должной скоростью получили приращения или убыли скоростей.

§ 6. Высота, которую мы назвали A, при опытах, конечно, незначительно отличается от высоты воды над вытечным отверстием, в особенности если воды вытекают из очень обширного сосуда через простое отверстие, и притом не слишком малое; но чаще вытечное отверстие значительно отличается от минимального сечения струи, которое мы рассматриваем в качестве отверстия, пропускающего через себя воды; на это указывает количество воды, вытекающей за заданное время, сопоставленное при опытах с ее скоростью.

Отсюда получается, что наше предложение § 3, будучи применено к опыту, обычно не намного расходится с предложением Ньютона, изложенным в § 1; если же тщательно избежать всего того, что может вызвать сжатие струи и что может уменьшить скорость, то сила отталкивания, согласно нашей теории, окажется почти что вдвое больше той, какая была определена Ньютоном, и как таковая она подтверждается на опытах.

Для того чтобы довести этот вопрос до полной ясности, мы рассмотрим его теперь более обще и попытаемся определить отталкивающую силу, начиная с момента возникновения движения, когда скорости непрерывно изменяются; ибо первая наша теорема имеет место лишь в том случае, когда скорость остается неизменной. Для того чтобы нас легче быле понять при рассмотрении этого несколько сложного вопроса, будет полезно предварительно остановиться здесь на некоторых более общих положениях.

§ 7. Количество движения есть произведение скорости на массу. В случае неравных скоростей получается абсолютное количество движения, если каждую из частиц умножить соответственно на ее скорость и взять сумму этих произведений. Количество движения создается движущими давлениями, воздействующими в течение заданного времени, и эффект следует признать равным причине. Таким образом, сумму движущих давлений, умноженных на соответствующие им малые отрезки времени, следует оценивать по вызванному ею количеству движения. А так как любое движущее давление воздействует на сосуд, из которого воды вытекают, то вся отталкивающая сила в любой момент времени равна новому количеству движения, разделенному на малый промежуток времени, в течение которого оно возникает. После этих предварительных замечаний я перехожу к самому вопросу.

§ 8. Итак, пусть имеется сосуд бесконечно большого размера $ACDB$ (фиг. 82) и в нем горизонтально прикрепленная труба $EHID$, сечения которой мы предполагаем сколь угодно неравными. Пусть сечение отверстия $HI=1$, длина трубы равна m; скорость, сколь угодно изменяющаяся, в HI равна $\sqrt{2v}$, т. е. такова, что она соответствует высоте v. Тогда я утверждаю прежде всего, что абсолютное количество движения воды, содержащейся в трубе, равно $m\sqrt{2v}$, т. е. что оно таково, как если бы труба была цилиндрической и по своему сечению равнялась отверстию HI, ибо, конечно. скорость каждой струи $FGgf$ обратно пропорциональна массе.

А теперь вообразим, что за заданный бесконечно малый промежуток времени через отверстие HI выскочил столбик воды $HLMI$, длину которого HL, или IM, мы примем равной α. Тогда масса этого столбика будет равна α, и он будет обладать количеством движения, равным $\alpha\sqrt{2v}$. Но за это же время масса воды, содержащейся в трубе, приобрела количество движения $\frac{mdv}{\sqrt{2v}}$ (так как она имела его $m\sqrt{2v}$); таким образом, абсолютное количество движения, возникшее за данный малый промежуток времени, равно $\alpha\sqrt{2v}+\frac{mdv}{\sqrt{2v}}$. Если же последнее разделить на тот же малый промежуток времени $\left(\text{который следует выразить через } \frac{\alpha}{\sqrt{2v}}\right)$, то получится, как мы это видели в § 7, искомое давление, толкающее сосуд обратно; поэтому, если мы его обозначим через p, то будет

$$p=\left(\alpha\sqrt{2v}+\frac{mdv}{\sqrt{2v}}\right):\frac{\alpha}{\sqrt{2v}},$$

или

$$p=2v+\frac{mdv}{\alpha}$$ [135].

(α) Отсюда ясно, что окончательное определение вопроса зависит от отношения, существующего между dv и α. Но последнее мы определили в общем виде в части третьей, не принимая, однако, совершенно во внимание тех помех, которые связаны с данным случаем. Следовательно, здесь оказывает некоторое влияние и форма трубы.

(β) Отсюда, далее, следует, что если допустить, что течение стало равномерным, то p постоянно равно $2v$, так как в этом случае $dv=0$. А это находится в соответствии с тем, что мы доказали в § 5. Но пока течение получает приращения (что оно заметно делает, и притом достаточно долгое время, если труба более длинна), то сосуд испытывает на себе все иную и иную силу отталкивания.

(γ) Величина dv находится всегда в действительном отношении к α. Следовательно, отталкивающая сила никогда не бывает нулевой, так что сосуд отталкивается обратно уже с первого момента течения, хотя тогда воды почти совершенно не вытекают вследствие незначительной их скорости. Однако для того, чтобы каждому было ясно применение нашего общего правила, мы применим его к частному случаю, приписав трубе $EHID$ цилиндрическую форму с сечением, равным 1.

§ 9. Таким образом, если допустить, что цилиндрическая труба полностью открыта в HI, то в случае сохранения остальных положений и обозначений живая сила воды, содержащейся в трубе, будет равна mv; ее приращение равно mdv; к последнему следует прибавить живую силу столбика $HLMI$, т. е. αv, и их сумму следует приравнять к произведению высоты, какой обладает поверхность воды AB над отверстием HI и которую мы назовем a, и малой массы α. Таким образом, $mdv + \alpha v = \alpha a$, откуда получается

$$\frac{dv}{\alpha} = \frac{a - v}{m}.$$

А если это значение подставить в уравнение предыдущего параграфа, то получится

$$p = a + v,$$

откуда я вывожу следующие заключения.

(α) Длина трубы нисколько не влияет на силу отталкивания, испытываемую сосудом, если допускается, что скорость остается неизменной, ибо буква m исчезла из расчета, но эта длина (как мы это достаточно и даже более чем достаточно доказали в предшествующем) приводит к тому, что скорости получают более быстрые или более медленные приращения; ибо чем длиннее труба, тем медленнее ускоряются воды, и наоборот, так что когда длина трубы равна нулю, они мгновенно от состояния покоя получают свою максимальную степень скорости. А если та же труба имеет бесконечно большую длину, то воды в состоянии получить заметное приращение скорости лишь по истечении бесконечно большого времени.

(β) Таким образом, при неизменной высоте вод может случиться, что хотя бы при малом расходе вод сила отталкивания оказывается значительной, причем она длится произвольно долго; это может быть достигнуто двумя способами, а именно как удлинением трубы, так и частым затыканием отверстия раньше, чем воды достигнут значительной степени скорости. Но первый способ предполагает свободное протекание вод по трубе; ибо если под влиянием внешних помех, которых никогда нельзя избежать в очень длинных трубах, течение вод замедляется, то уменьшается и сила отталкивания.

(γ) Да будет дозволено коснуться здесь в нескольких словах некоего предложения из Ньютоновских «Математических начал естественной философии» (2-е изд.). Этот автор, после того как он изменил свое мнение о скорости вод, вытекающих из сосуда, изложенное в первом издании названной выше работы, и признал во 2-м ее издании, что воды, если их направить вверх по вертикали, поднимаются до полной высоты поверхности воды, во второй книге, предлож. 36, след. 2, прибавил следующие слова: «Сила, которая может вызвать все движение выскакивающей воды, равна весу цилиндрического столбика воды, основанием которого является отверстие EF (см. рис. у Ньютона), а высотой является $2GI$, или $2CK$». Это мнение когда-то мною и еще некоторыми оспаривалось, другими же, наоборот, поддерживалось. Но теперь, после того как я продумал настоящую теорию движущихся вод, мне кажется, что этот спор надлежит закончить на том, что когда воды достигают равномерного движения, а это допущение и делает Ньютон, то упомянутая выше сила правильно определяется с помощью высоты $2GI$, но с начала движения, когда скорость еще равна нулю, эта сила соответствует простой высоте GI, а затем с увеличением скорости одновременно увеличивается и сила, побуждающая воды к вытеканию, и, наконец, она достигает того размера, который указал Ньютон. В настоящее время это ясно всякому, так как сила, вызывающая движение воды, о которой говорит Ньютон, не может не быть равной силе отталкивания,

которая, как мы видели, равна $a+v$. И правильно знаменитый Риккати, с которым я беседовал на эту тему, спрошенный, откуда может возникнуть эта сила вод, соответствующая удвоенной скорости, когда совершенно ясно, что при закрытом отверстии прилегающая к последнему капля находится под действием силы простой высоты, ответил, что следует отличать состояние покоя от состояния движения.

§ 10. Если вставленная в сосуд труба не является цилиндрической, то вычисление надлежит производить следующим образом.

Пусть сечение трубы в FG, или fg, равно y, расстояние слоя $FGgf$ от отверстия ED равно x; остальные обозначения мы сохраним прежними. Тогда живая сила воды, содержащейся в трубе, будет равна $v\int\frac{dx}{y}$, а ее приращение — $dv\int\frac{dx}{y}$, к чему, как это было сделано в предыдущем параграфе, следует прибавить живую силу столбика $HLMI$, или αv, и тогда будет

$$dv\int\frac{dx}{y}+\alpha v=\alpha a.$$

Отсюда получается

$$\frac{dv}{\alpha}=(a-v):\int\frac{dx}{y};$$

если это значение подставить в уравнение § 8, то будет

$$p=2v+m(a-v):\int\frac{dx}{y}.$$

Следовательно, так как при равномерном течении вод будет $v=a$, то тогда снова получается $p=2a$. Между прочим, пока течение вод ускоряется, здесь не следует пренебрегать движением в сосуде $ACDB$ воды, прилегающей к отверстию DE, от которого мы во всей этой работе отвлекались. Однако это движение не может быть правильно определено, поэтому и выражение, данное мною для силы отталкивания, когда воды еще не начали течь равномерно, не оказывается точным; но когда воды текут равномерно, то это выражение становится весьма точным.

§ 11. После того как для равномерного вытекания вод мы, таким образом, доказали, что сила отталкивания всегда равна весу водяного цилиндра, построенного над отверстием и имеющего удвоенную высоту воды, представляется желательным доказать то же самое косвенно через **приведение к нелепости**, дабы и не знающие механических правил поняли правильность этого достаточно парадоксального предложения.

С этой целью мы рассмотрим воды, вытекающие вертикально из цилиндра, отвлекаясь от помех, которые несколько уменьшают скорость вод, и от того сжатия струи, которого можно избежать. Пусть отверстию соответствует вертикальная труба, какая показана на фиг. 76; пусть все будет устроено так, как это было указано в § 13 части двенадцатой. Пусть воды текут равномерно; будем считать, что стенки сосуда и трубы не имеют веса, что высота цилиндра равна a, высота трубы — b, высота cF — x, сечение в E равно 1. Тогда сечение в F будет равно $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+x}}$, а в c — $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}}$. Наконец, примем, что сечение цилиндра равно M. При этих положениях определим вес всей воды $ABCE$. Выразим вес воды ABC через Ma; таким образом, вес воды CE будет равен $2a+2b-2\sqrt{a^2+ab}$; следовательно, вес всей воды $ABCE = Ma+2a+2b-2\sqrt{a^2+ab}$. Таким образом, если предположить, что воды в сосуде и в трубе покоятся, то сила, необходимая для того, чтобы поддержать воду в поднятом состоянии, будет равна

$$Ma+2a+2b-2\sqrt{a^2+ab}.$$

А теперь определим аналогичную силу, когда воды вытекают через E со всей своей скоростью (т. е. с той, с какой они могут подняться на высоту $a+b$). Эта сила получится, если из первой силы вычесть силу отталкивания. Следовательно, если эту силу отталкивания положить, как мы это приняли, равной $2a+2b$, то сила, поддерживающая воды на высоте во время вытекания, будет равна $Ma-2\sqrt{a^2+ab}$.

Но представим себе, что труба CE отсутствует; тогда, согласно нашим правилам, поддерживающая сила, пока воды выходят через отверстие C, снова будет равна $Ma - 2\sqrt{a^2 + ab}$, ибо вес воды ABC равен Ma, а сечение отверстия c равно $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}}$, что, будучи умножено на удвоенную высоту a, дает $2\sqrt{a^2 + ab}$. Таким образом, наша оценка сил отталкивания доказывает, что поддерживающая сила во время вытекания вод оказывается одинаковой, отсутствует ли труба, или же она имеется, и какую бы она ни имела длину, лишь бы она имела форму, описанную в § 13 части двенадцатой. Необходимость этого соответствия и тождественности явствует и без вычисления из самой природы вещей, так как устроенная подобным образом трубка не вызывает никакого изменения в протекающих водах, когда водяная струя сама собой принимает ту форму, какую имеет трубка, пока воды с ней соприкасаются. Но если мы иначе оценим силу отталкивания, то мы никогда вообще не получим этого соответствия между поддерживающими силами. Так, например, если, согласно общепринятому мнению, мы будем утверждать, что сила отталкивания равна весу простого, часто упоминавшегося цилиндра, то сила отталкивания при протекании воды по трубе CE из сосуда ACB будет равна $a + b$, и если эту силу вычесть из веса всей воды $ABCE$, т. е. из $Ma + 2a + 2b - 2\sqrt{a^2 + ab}$, то остается $Ma + a + b - 2\sqrt{a^2 + ab}$, что представляет собой силу, необходимую для поддержания на высоте системы $ABCE$, пока воды текут. А мы видели, что эта сила должна быть такой же, если труба CE отсутствует. Но тогда поддерживающая сила равна $Ma - \sqrt{a^2 + ab}$, так как вес воды ABC равен Ma, и силой отталкивания, согласно допущению, является простой цилиндр, построенный над отверстием C до высоты a. Таким образом, при этом допущении должно было бы быть всегда $Ma + a + b - 2\sqrt{a^2 + ab} = Ma - \sqrt{a^2 + ab}$, или $a + b = \sqrt{a^2 + ab}$, что является нелепым. Аналогичную нелепость можно было бы доказать, если предположить, что струя поднимается вертикально вверх; и тщетно возражали бы здесь

для поддержания общепринятого мнения, что вытекающую струю CE невозможно представить себе как бы сплошной, если не представить одновременно некоторой вязкости воды (ибо иначе струя скоро разорвалась бы перед отверстием на капли), и что вязкость изменяет положение вещей; ибо, конечно, ни скорости воды не изменяются от взаимного прилипания воды в CE, ни стенки трубы CE не испытывают никакого давления, как я это доказал в § 13 части двенадцатой, не говоря уже о том, что прилипание воды происходит не от вязкости, а от некоторой магнитной способности или от взаимного притяжения, от каковой способности ни в одной системе центр тяжести не может приобрести ни большей, ни меньшей скорости. Но затем это возражение противников совершенно не имеет места при вертикально поднимающихся струях, ибо воды постоянно оставались бы там же, если бы им даже и не была присуща какая бы то ни было вязкость или взаимное притяжение.

Я мог бы подтвердить наше мнение бесчисленным множеством других путей и частных примеров, если бы я захотел дольше на этом остановиться. Так, например, если на фиг. 29, описанной в § 4 части пятой, высота $NS=1$, отверстие $LM=1$ и отверстие $RS=2$, то будет $PB={}^1/_3$; сила отталкивания, возникающая вследствие вытекания воды через RS, равна $2\times{}^2/_3={}^4/_3$, и я могу доказать, что сила отталкивания, вызываемая вытеканием из простого цилиндра RN через LN точно так же равна ${}^4/_3$ и что, таким образом, вся сила отталкивания равна ${}^8/_3$, что в точности дает удвоенный водяной цилиндр, поднимающийся над отверстием LM на высоту $NS+PB$. Подобное согласие совершенно не получается из других ложно принятых теорий, так что в нашей теории уже нельзя больше сомневаться, разве только если кто-нибудь совершенно несведущ в подобных вопросах. Но если бы я захотел доказать вышесказанное, что сила отталкивания воды, вытекающей из простого цилиндра RN через LM, равна ${}^4/_3$, то это потребовало бы определения силы отталкивания в том случае, когда воды вытекают не из бесконечно большого сосуда с какой-либо заданной неизменяющейся скоростью. Но я не буду больше

распространяться по данному поводу, предоставляя это сделать другим; да оно и не составит уже теперь большого труда. Перехожу к другому.

§ 12. Данные нами до сих пор доказательства имеют силу лишь для прямых трубок, а именно для таких, в которых движущая сила всех капель и возникающая отсюда сила отталкивания находятся во взаимном согласии и имеют общее направление. Но когда вставленные в сосуд трубки, через которые вытекают воды, являются изогнутыми, следует применить другой способ доказательства. Для того чтобы ничего не пропустить в этом совершенно новом вопросе, мы исследуем и этот случай. Здесь не будет ничего такого, что заставило бы пожалеть о затраченном труде, так как отсюда выявятся истинные законы давлений, которым природа следует не только в данных случаях, но и во многих других.

§ 13. Итак, допустим, что в бесконечно большом сосуде устроена трубка постоянного сечения, но изогнутая согласно какой-либо кривой AS (фиг. 83), так что A является местом ее прикрепления и S местом вытекания. Проведем в A и S касательные, а именно AR и SB, и пусть AB будет перпендикулярно к SB. Пусть скорость воды, протекающей через трубку, будет равномерной и притом такой, что она соответствует высоте A; сечение трубки повсюду равно 1. *Тогда я утверждаю, что вся сила отталкивания, взятая в направлении SB, будет снова равна $2A$* и что только эта сила будет иметь место.

Для доказательства проведем бесконечно близкие прямые nq, ep, перпендикулярные к SB; прямая nm параллельна той же линии SB. Пусть $Sq = x$, $qp = dx$; $qn = y$, $em = dy$; радиус соприкасающегося круга в en будет равен $-\frac{ds\,dy}{d^2x}$, если элементы en, которые я обозначу через ds, принять в качестве постоянных. Но столбик воды, заключающейся между e и n, обладает центробежной силой, которую можно определить следующим образом. Вес столбика равен ds (так как его основание равно 1, а высота — ds), и если радиус

соприкасающегося круга равен $2A$, то, согласно теореме Гюйгенса, центробежная сила частицы будет равна ее весу, а центробежные силы будут находиться, при прочих равных условиях, между собой в обратном отношении радиусов. Таким образом, центробежная сила столбика равна $-\frac{2A\,d^2x}{dy}$. Выразим эту центробежную силу через ec, перпендикулярную к кривой, и проведем прямую co, параллельную BS; разложим силу ec на oc и eo. Тогда (в силу подобия треугольников eoc и nme) сила oc равна $-\frac{2A\,d^2x}{ds}$, сила eo равна $-\frac{2Ad^2x^2}{dyds}=\frac{2Ad^2y}{ds}$ (вследствие постоянства ds).

Но в направлении SB действует лишь одна элементарная сила oc, между тем как другой, eo, можно в данном направлении пренебречь. Возьмем интеграл элементарной силы oc с такой постоянной, чтобы интеграл обращался в нуль вместе с абсциссой. Этот интеграл равен $-\frac{2Adx}{ds}$, так как в S будет $dx=ds$. Теперь, чтобы получить силу в направлении касательной SB для всей трубки, следует положить $\frac{RB}{RA}$ вместо $\frac{dx}{ds}$; следовательно, вся сила в направлении касательной SB равна $2A-\frac{2A\times RB}{RA}$. Эта сила возникает из центробежной силы каждой частицы. Но остается еще рассмотреть другую силу. А именно, в то время как вода непрерывно затекает из бесконечно большого сосуда в трубочку с равномерной скоростью, соответствующей высоте A, сосуд отталкивается обратно в направлении RA силой $2A$ (согласно § 4). Если последнюю разложить на касательную по SB и на перпендикулярную к ней по BA, то необходимо принять во внимание лишь одну первую $\frac{2A\times RB}{RA}$; а так как она имеет направление, общее с силой $2A-\frac{2A\times RB}{RA}$, возникшей от центробежной силы, которая была только что определена, то ее надлежит к ней прибавить, и, таким образом, сумма $2A-\frac{2A\times RB}{RA}+\frac{2A\times RB}{RA}$, или $2A$, выразит силу отталкивания в направлении SB.

Далее, для того чтобы доказать, что сосуд не отталкивается в каком-либо ином направлении, обратимся к элементарной силе *eo*, которая, как мы видели, равна $\frac{2Ad^2y}{ds}$. Интеграл последнего равен $\frac{2A \times AB}{AR}$, что в точности уничтожается силой $2A$, отталкивающей сосуд в направлении RA, после надлежащего ее разложения, что и требовалось доказать.

§ 14. Эта простота чрезвычайно общей теоремы, а именно, что сила, отталкивающая в направлении, противоположном равномерно вытекающим водам, оценивается всегда равной $2A$, может послужить argumentum ad hominem, в пользу ее добротности, для тех, кто или не проследит за нашим ходом рассуждений, или не пожелает проверить его с достаточным вниманием. Если же силу отталкивания воды, затекающей из бесконечно большого сосуда в трубку по направлению AR, принять равной A, то можно увидеть, что система отталкивается в направлении SB силой, которая равна $2A - \frac{A \times RB}{RA}$, нелепость чего, как мне кажется, выявляется из самой этой формулы. При подобной точке зрения по направлению, перпендикулярному к первому, даже не существовало бы никакой силы. Действительно, сосуд должен был бы испытывать давление по направлению BA со стороны силы $\frac{A \times AB}{AR}$, что снова представляется мне нелепым и ложность чего я установил на опыте в том случае, когда угол ARS был прямым и AB было равно AR.

Можно построить и доказать много других теорем на данную тему, взятую во всей широте для случая неравномерного течения вод, для течения их по произвольно изогнутой трубе, если только при этом принять во внимание то, что было указано в § 8. Но так как у нас нет времени входить в детали, то я перейду к рассмотрению другой силы, которая равна первой и направлена в противоположную сторону, а именно той силы, которую вытекающая струя проявляет по отношению к плоскости, когда она ударяет по ней перпендикулярно.

§ 15. Натиск водяной струи, ударяющей о плоскость, исследовали многие; было проведено очень много опытов. Я тоже дал кое-что по этому вопросу в «Комментариях имп. Петербургской Академии наук» (т. 2). Опыты имеются у Мариотта в трактате «О движении вод» (De mot. aquarum), в «Истории Парижской Академи наук» (Hist. Acad. Sc.), написанной г. Дюгамелем [136] на стр. 48 и в других местах. Хотя эти опыты не очень хорошо согласуются между собой, однако весьма многие из них на первый взгляд указывают, повидимому, на то, что давление водяной струи, текущей равномерно, равно весу водяного столба, основанием которого является отверстие, через которое воды вытекают и высота которого равна высоте воды над отверстием. Этого мнения придерживались и до тих пор придерживаются очень многие, почти все, так как оно удивительно согласуется с другими опытами, в особенности с теми, которые обычно производятся с шарами, движущимися в сопротивляющейся среде. Поэтому и я, хотя многое меня и смущало, придерживался этого мнения в упомянутых «Комментариях Петербургской Академии наук» и не поколебался также в настоящей работе, а именно в §§ 31 и 32 части девятой, использовать его в качестве примера. Однако продумав этот вопрос более внимательно и применив новые начала, а также поставив одновременно другие опыты нового вида, я в конце концов ясно увидел, что это общераспространенное мнение о натиске водяной струи должно быть изменено в том же смысле, как и мнение Ньютона о силе отталкивания, а именно так, чтобы вместо отверстия принять во внимание сечение сжатой струи и вместо высоты воды применить удвоенную высоту, соответствующую действительной скорости вод. Ибо у меня имеется доказательство того, что сила отталкивания, представленная в § 2, вполне равна натиску струи, если последняя целиком падает перпендикулярно на плоскость. Отсюда следует, что натиск струи бывает тем большим, чем меньше сжатие струи, и что когда последнее совершенно исчезает, а воды вместе с тем вырываются со всей своей скоростью, какую они могут иметь в теории, то натиск оказывается тогда вдвое большим того, какой

обычно принимают. Но так как скорость всегда кое-что теряет, а струя нередко почти наполовину сокращается, то получается так, что большинство опытов при оценке этого натиска указывало как будто на простую высоту в цилиндре. Но я хотел бы надлежащим образом отметить, что в данном случае у меня речь идет только о струях, которые целиком перехватываются плоскостями, а не о жидкостях, обтекающих тела и производящих на них натиск, например, о ветрах или о реках; ибо я утверждаю, что эти два вида натиска, которые авторы до сих пор смешивали, следует надлежащим образом отличать друг от друга в силу тех соображений, которые вкратце будут изложены ниже.

§ 16. Относительно водяной струи я полагаю следующее. Я принимаю, что воды вытекают по горизонтальному направлению с равномерной скоростью из бесконечно большого вертикального сосуда ABM (фиг. 84) через боковое отверстие CM и что струя ударяет перпендикулярно о пластинку EF. Тогда я легко вижу, что, так как последующие частицы не дают передним отскочить обратно, все они отклоняются в стороны и притом движением параллельным или почти параллельным пластинке EF (если только последняя достаточно велика, чтобы струя, хотя бы и рассыпавшись, целиком ею перехватывалась). А так как все находится в состоянии установившемся, то можно представить, что пластинка EF скреплена с сосудом и что струя охвачена стенками $CHDGLM$, так что можно считать, что воды вытекают из сосуда $ABCHDEFGLM$ через круговую расселину $DEGF$. Если это так, то, как мы показали в § 13, капли, вытекающие в DE, конечно, создают силу отталкивания по направлению EF. Но в то же время ясно, что сила отталкивания в GF направлена противоположно первой, так что этот вид сил отталкивания должен быть здесь оставлен без внимания. Что же касается направления, перпендикулярного к пластинке EF или к цилиндру BC, то в конце того же § 13 мы доказали, что в этом направлении совершенно не происходит никакого отталкивания. Таким образом, пластинка EF проталкивается в такой же мере вперед, как цилиндр отталкивается назад. А это и есть то, что я хотел доказать. Отсюда

теперь следует, что **давление водяной струи, которая полностью попадает на пластинку, равновелико весу водяного цилиндра, имеющего в качестве основания сечение струи (после того как последняя получила равномерный размер) и в качестве высоты удвоенную высоту, соответствующую скорости вод (после того как последняя точно так же стала равномерной).**

§ 17. Я не сомневаюсь в том, что найдутся многие, которым это совершенно новое предложение покажется сомнительным и противоречащим опытам. Но я рекомендовал бы им принять во внимание, что произведенные до сих пор опыты ни в коем случае не соответствуют в точности общепринятому правилу и что в большинстве случаев наше правило лишь незначительно отличается от общепринятого, хотя в теории они очень сильно отличаются друг от друга. Затем я хочу им наперед указать, что я произвел другие опыты, которые все точнейшим образом подкрепляют мою точку зрения и совершенно опровергают старую. Проведенные мною опыты я изложу в конце настоящей части. Возможно, что тот способ доказательства, который я применил, покажется некоторым еще недостаточно точным, но у меня имеется иное прямое доказательство, которое основывается на новом, когда-то мною наблюденном механическом свойстве и которое я здесь изложу как потому, что из него всякий будет в состоянии легко вывести упомянутое выше доказательство, так и потому, что он сможет использовать его для других применений. Это свойство заключается в следующем.

Если тело движется с равномерной скоростью, но постоянно изменяет свое направление благодаря каким угодно и любым образом действующим причинам до тех пор, пока оно получит движение, перпендикулярное к первоначальному направлению, и если отдельные давления, отклоняющие тело, разложить на два вида, один — параллельный первоначальному направлению, а другой — перпен-

дикулярный, и, наконец, если отдельные параллельные давления умножить на соответствующие им времена, то я утверждаю, что сумма произведений будет всегда одинаковой и притом будет равна той, которая в состоянии вызвать все движение из покоя или же уничтожить все вызванное движение.

Если в настоящем нашем рассуждении мы воспользуемся приведенным динамическим свойством, то надлежит рассмотреть пластинку *EF*, которая путем своей реакции на воды изменяет их направление до тех пор, пока оно становится перпендикулярным к первоначальному. Следовательно, предложение предыдущего параграфа будет доказано с помощью этого свойства тем же путем, каким мы воспользовались в § 4 для определения силы отталкивания с помощью начала, изложенного в § 3. Таким образом, представляется правильной та идея, которую мы должны себе составить о натиске вод; а она предполагает, что отдельные капли воды отклоняются в стороны по направлению пластинки, от какового свойства, как я наблюдал, воды никогда не отступают. Однако я также видел, что некоторые, но немногие капли отскакивают назад, а они вызывают бо́льшее давление, чем те частицы, которые отклоняются в стороны. Из этого я заключаю, что когда водяная струя с большим натиском косвенно ударяет о пластинку, например, под углом в 30°, то давление, которое может отсюда возникнуть, превышает половину того давления, какое возникает от той же струи, ударяющей прямо, между тем как согласно общепринятым правилам она должна развивать в точности половину этой силы; причина этого заключается в том, что при косвенном натиске может отскочить большее количество частиц, чем при прямом натиске; могут отскочить даже все частицы, если скорость велика.

А если допустить, что все частицы отскакивают таким образом, что угол падения равен углу отражения, то оба эти натиска следует признать одинаковыми. Наилучшим способом оценки давлений вод является в данном случае тот, который основывается на исчислении à posteriori.

§ 18. Далее, из вышеизложенного свойства, если его понять надлежащим образом, следует, что в результате давлений получается одинаковый эффект, отклоняет ли пластинка воды в стороны, или же мы вообразим себе причину, поглощающую все движение, которое приобрели частицы воды, вышедшие из цилиндра. Отсюда понятно, что произойдет, если отверстие *CM* (фиг. 85), через которое воды вытекают из цилиндра *ABM*, погружено в другие воды, покоящиеся в сосуде *PQEF*. А именно, цилиндр *ABM* будет отталкиваться по направлению к *PQ* в сосуде *PQFE*, если последний не связан с цилиндром. Но если эти сосуды скреплены друг с другом, то система не испытает никакого преобладающего давления, ибо сколь велико давление по направлению к *PQ* со стороны вытекающих вод, столь же большое возникнет обратное давление по направлению к *EF* вследствие непрерывного уничтожения движения, приобретенного вышедшими из цилиндра частицами.

§ 19. Я говорил о давлении струи, которую пластинка перехватывает полностью, хотя бы струя была рассеяна. Перехожу теперь к другому виду натиска вод, а именно к тому, который испытывают пластинки, со всех сторон погруженные в жидкость; я полагаю, однако, что последний не может быть определен абсолютно, так как отдельные частицы, ударяющиеся о пластинку, отклоняются различно. Но если допустить, что отклонение любой частицы установлено, то разрешение этой задачи будет уже нетрудным, если несколько видоизменить теорему, которой мы воспользовались в § 17, и если придать ей более общий вид, а именно следующий: если угол измененного в движущемся теле направления будет не прямым, а меньше прямого, то будет меньше и сумма произведений (о которых речь была выше), в таком же отношении, как синус верзус [137] измененного направления относится к полному синусу.

Таким образом, следовало бы для каждой капельки выяснить, насколько преграда, т. е. пластинка, поставленная на пути ее движения, заставляет ее изменить направление своего движения.

Но теория едва ли сможет дать точный ответ на подобные вопросы, да и опыт не убеждает в применимости к этому случаю обычных теорем, например, что усилие реки, ударяющей прямо о круг, вдвое больше усилия той же реки, ударяющей в шар того же диаметра, и т. п. А тот факт, что величина давления на шар, которая обычно дается авторами, достаточно точно согласуется с опытами, проведенными Ньютоном и другими и изложенными в «Математических началах естественной философии», то это, как я полагаю после всестороннего тщательного обдумывания, следует отнести за счет случайного обстоятельства.

Во втором томе «Комментариев Петербургской Академии наук» и в следующем я дал теоремы, относящиеся к теоретическому исследованию движения в сопротивляющихся средах, а также различные физические наблюдения. Поэтому я не буду здесь их повторять, хотя они и относятся к нашей теме; у нас нет свободного времени задерживаться дольше на этого рода гидродинамических рассуждениях. Итак, я спешу к концу. Эту новую теорию о реакции и натиске жидкостей, которая в вопросе большой важности опрокидывает мнение, принятое до сих пор всеми авторами, я изложил в особой диссертации, которая в свое время будет помещена в «Комментариях Петербургской Академии наук» и подтвердил ее не вызывающими сомнения опытами. Перехожу теперь к другой теме, весьма заслуживающей внимания геометров.

§ 20. Мне как-то пришло на ум, что мои размышления о силе отталкивания выбрасываемых вод, очень большую часть которых я здесь изложил, могут быть с пользой применены для установления нового способа судоходства. В самом деле, я не вижу, что может воспрепятствовать тому, чтобы очень большие корабли могли продвигаться вперед без парусов и без весел, пользуясь нижеследующим способом: воды будут непрерывно подниматься вверх с тем, чтобы они вытекали через отверстия в нижней части корабля, причем будет устроено таким образом, чтобы направление вытекающих вод было обращено в сторону кормы. Но для того чтобы с самого начала кто-нибудь не высмеял этой мысли, как слишком нелепой, представляется в интересах нашего дела

более точно исследовать эту тему и подвергнуть ее вычислению, ибо она может оказаться полезной и явиться весьма плодотворной для многих геометрических исследований [138].

Я начну с того, из чего затем станет ясно, при каких обстоятельствах следует ожидать наибольшего успеха от этого нового судоходства.

§ 21. Итак, надлежит указать, что корабль постоянно замедляется зачерпываемыми водами благодаря инерции последних, так как им сообщается та же скорость, с которой корабль движется, и пока она им сообщается, корабль вследствие реакции вод оттесняется назад и в то же время он проталкивается вперед благодаря их же вытеканию. Это соединение противоположных действий полагает предел силе продвижения кораблей, которая может быть получена от заданной абсолютной мощи; ибо если бы первого действия не существовало (о нем, признаюсь по правде, я долгое время не думал), то с помощью сколь угодно малой работы людей можно было бы получить сколь угодно большую силу, продвигающую корабли, что я доказываю следующим образом.

В восьмой части (см. в особенности § 26) я показал, что работу людей, затрачиваемую на поднятие вод, которую я обозначаю термином абсолютная мощь, следует оценивать по произведению количества вод на высоту подъема, так что, например, с помощью одной и той же, выраженной в любых мерах работы можно поднять 4 куб. фута на высоту в 16 футов и 16 куб. футов на высоту 4 футов. Далее, теперь я утверждаю, что в то время как жидкости вытекают с одинаковой скоростью, существует равномерное давление, толкающее корабли в противоположную сторону, каковое давление надлежит оценивать по количеству вытекающих вод и по корню квадратному из высоты вод в сосуде над отверстием, а именно: пусть количество вод, вытекающих за заданное время равно Q, высота их равна A; тогда величину отверстия, извергающего воды, следует считать пропорциональной $\frac{Q}{\sqrt{A}}$ за то же время. А сила отталкивания, которая в этом

случае продвигает корабль вперед, равна величине отверстия, умноженной на удвоенную высоту вод (согласно § 4), т. е. равна величине $\frac{Q}{\sqrt{A}} \times 2A$, или $2Q\sqrt{A}$. Из сопоставления обоих этих предложений следует, что работа людей, затрачиваемая на поднятие вод, относится к силе по продвижению вперед кораблей, которая может быть отсюда получена, как QA относится к $2Q\sqrt{A}$ или как $\sqrt{A}$ относится к какому-либо постоянному количеству. Таким образом, чем меньше высота, на которую поднимают воды, тем большая сила по продвижению кораблей получается от одной и той же работы, так что с помощью сколь угодно малой работы людей можно получить произвольно большую силу по продвижению кораблей. Правда, и инерция зачерпываемых вод (о которой мы говорили в начале этого параграфа), замедляющая движение кораблей, тоже приобретает тем большее отношение к силе, продвигающей вперед корабли, чем меньшей берется высота A, на что здесь следует обратить надлежащее внимание.

§ 22. Из предыдущего параграфа ясно, что высота, на которую надлежит поднимать воды, принадлежит к тому виду величин, которые где-нибудь имеют максимальное значение. Но для того чтобы определить ту высоту, которая является наиболее полезной для предложенной цели, нам надлежит раньше исследовать другие вопросы.

Задача

Допустим, что корабль продвигается вперед с равномерной скоростью, которая создается благодаря свободному падению с высоты B, и вообразим, что воды непрерывно текут на корабль, например в виде дождей, и притом в таком количестве, какое в случае устранения всех посторонних помех давал бы через отверстие величины M цилиндр, постоянно заполненный до высоты A. Спрашивается, какое сопротивление будет испытывать корабль вследствие этого непрерывного и разномерного притока вод и вследствие их инерции.

Решение

Возьмем какое-нибудь время t; если последнее определить по расстоянию, проходимому со своей скоростью притекающей жидкостью, разделенному на эту же скорость, то тогда эту скорость надлежит выразить через $\sqrt{2A}$, и количество воды, притекающей за время t, будет равно цилиндру высоты $t\sqrt{2A}$, построенному над основанием M. Но это количество за время t, пока оно уносится кораблем, приобретает скорость, которая соответствует высоте B и должна быть выражена через $\sqrt{2B}$. Таким образом, следует определить равномерную силу, которая в состоянии за время t сообщить водяному цилиндру $Mt\sqrt{2A}$ скорость $\sqrt{2B}$, и эта сила ввиду реакции, воздействующей на корабль, должна быть признана равной искомому сопротивлению. Пусть вышеупомянутая сила равна p; допустим, что она за время θ сообщила водяному цилиндру $Mt\sqrt{2A}$ скорость v. Тогда будет $dv=\frac{pd\theta}{Mt\sqrt{2A}}$, а также $v=\frac{p\theta}{Mt\sqrt{2A}}$. Примем теперь $\sqrt{2B}$ для v и t для θ; тогда будет $\sqrt{2B}=\frac{p}{M\sqrt{2A}}$, или $p=2M\sqrt{AB}$.

Таким образом, искомое сопротивление равно весу водяного цилиндра, основание которого равно отверстию M и длина которого равна удвоенной средней пропорциональной величин A и B.

Задача

§ 23. Пусть на корабле имеется цилиндр высотой A над поверхностью моря, через отверстие которого (величины M) находящееся на той же поверхности, воды вытекают без всякой помехи по направлению к корме, и пусть цилиндр постоянно поддерживается полным воды. Определить силу, постоянно продвигающую корабль вперед.

Решение

Сила, продвигающая корабль вперед, равна реакции вод во время их вытекания, т. е. силе отталкивания, уменьшенной на определенную в предшествующем параграфе силу, происходящую

вследствие инерции вод, которые постоянно забираются. Сила отталкивания, согласно § 4 настоящей части, равна $2MA$, и она продвигает корабль вперед. Другая сила, задерживающая корабль, согласно предыдущему параграфу, равна $2M\sqrt{AB}$. Следовательно, абсолютная сила, продвигающая корабль вперед, равна $2MA - 2M\sqrt{AB}$.

Следствие

§ 24. Если корабль не обладает никакой скоростью, то сила, воздействующая на корабль, равна $2MA$; а если корабль движется с такой же скоростью, с какой воды вытекают в противоположном направлении, то $B = A$, и тогда никакой силой корабль не проталкивается вперед. Поэтому если бы даже корабль двигался по морю совершенно свободно, то он не приобретал бы от действия вод, которые постоянно забираются и вытекают, большей скорости, чем та, с какой воды вытекают, но не потому, что воды, вытекающие из равномерно движущегося сосуда, толкают обратно сосуд с меньшей силой, чем воды, вытекающие из неподвижного сосуда, а потому, что в данном случае инерция вод вызывает сопротивление, равное силе отталкивания.

Задача

§ 25 При заданной силе рабочих, поднимающих воду, и при заданной высоте, на которую поднимаются воды, определить величину вытечного отверстия и силу отталкивания.

Решение

Пусть эта сила такова, что в течение каждой секунды может быть поднято на высоту 1 фута число кубических футов воды N, каковую силу, согласно второму опыту, приложенному к части девятой, может развить число работников, которое следует обозначить через $^5/_4\ N$. Пусть высота, на которую воды непрерывно поднимаются, выраженная в футах, равна A; сечение отверстия, выраженное в квадратных футах, равно M. Тогда число куби-

ческих футов воды, которое работники могут при заданной силе поднять в каждую секунду на высоту A, равно $\frac{N}{A}$ (согласно § 22 части девятой). Следовательно, надлежит устроить отверстие такого размера, чтобы в каждую секунду через него могло протекать указанное выше количество кубических футов воды, если последние будут протекать совершенно свободно. Но вместо секунд возьмем время, какое тело затрачивает, падая свободно с высоты A; в данном случае это время должно быть выражено через $\frac{1}{4}\sqrt{A}$ (если для сокращения расчета допустить, что тело, свободно падая из состояния покоя, проходит за 1 сек. 16 футов), и за это время должно вытечь такое количество кубических футов воды, которое следует обозначить через $\frac{N}{A} \times \frac{1}{4}\sqrt{A}$, или $\frac{N}{4\sqrt{A}}$. В действительности же вытекает $2MA$, т. е. водяной цилиндр, основанием которого является M и длина которого составляет удвоенную высоту A. Таким образом, $\frac{N}{4\sqrt{A}} = 2MA$, откуда сечение отверстия, т. е.

$$M = \frac{N}{8A\sqrt{A}}.$$

Сила же отталкивания равна $2MA$, т. е. $\frac{N}{4\sqrt{A}}$.

Пояснение

§ 26. На каждом корабле приходится поднимать воды на ту или другую высоту, чтобы при одной и той же силе, применяемой для забирания вод, получить мексимальную силу, продвигающую корабль вперед, и для определения этой наиболее полезной высоты при известном количестве работников необходимы два условия. Во-первых, следует выяснить, какую скорость получает рассматриваемый корабль от данной силы. В отношении этого требования мы допустим, что от давления, равного весу 1 куб. фута воды, т. е. приблизительно от 72 фунтов, корабль получает такую скорость, какая вызывается свободным падением с высоты C, и так

как в дальнейшем мы все меры будем выражать в футах, то следует вес 1 куб. фута воды изобразить через единицу. Во-вторых, следует принять отношение между скоростями корабля и силами, продвигающими корабль вперед, как известное. Здесь везде допускается, что скорости относятся между собой, как корни квадратные из сил, проталкивающих вперед; конечно, опыты не подтверждают в точности этого допущения при медленных движениях, но в то же время мы полагаем, что ему следует отдать предпочтение перед всеми остальными. Если кто-нибудь желает исследовать этот вопрос при ином допущении, то он может произвести вычисление тем же способом, каким мы пользуемся сейчас.

Задача

§ 27. Найти высоту, на какую следует постоянно поднимать воды, установив наиболее полезную, т. е. такую, чтобы при применении для подъема вод одной и той же силы получалась максимальная сила, продвигающая корабль вперед.

Решение

Сохраним все обозначения, примененные в данной теме. Прежде всего следует определить скорость корабля или соответствующую этой скорости высоту, которую мы обозначим через B. А так как скорости корабля принимаются пропорциональными корням из сил, воздействующих на корабль, то высоты этих скоростей будут пропорциональны самим силам. Таким образом, надлежит провести следующую аналогию.

Как вес 1 куб. относится к высоте C (ср. § 26), так давление, воздействующее на корабль, т. е. $2MA - 2M\sqrt{AB}$ (см. § 23), относится к высоте, соответствующей скорости корабля, которая, следовательно, будет равна $2MC \times (A - \sqrt{AB})$. А эту высоту мы обозначили через B. Таким образом,

$$B = 2MC \times (A - \sqrt{AB}).$$

Отсюда давление, воздействующее на корабль, равно $\frac{B}{C}$ и, следовательно, оно пропорционально B, так как C есть постоян-

ное количество. Таким образом, и давление, продвигающее корабль вперед, и высота, соответствующая скорости корабля, одновременно становятся максимальными. Следовательно, если для настоящей цели продифференцировать количество $2MA - 2M\sqrt{AB}$, выражающее силу, проталкивающую корабль вперед, то можно будет положить $dB = 0$. Однако раньше чем произвести дифференцирование, следует вместо M подставить его величину из § 25, и тогда давление, продвигающее корабль вперед, оказывается равным $\frac{N}{4\sqrt{A}} - \frac{N\sqrt{B}}{4A}$, где буква N есть постоянное, а буквы B и A — переменные. Возьмем теперь его дифференциал, положив $dB = 0$; он будет равен 0; таким образом, мы найдем, что $A = 4B$.

Итак, сила, продвигающая корабль вперед, оказывается максимальной, когда высота, до которой поднимаются воды, равна учетверенной величине высоты, соответствующей скорости корабля.

В найденном выше уравнении $B = 2MC(A - \sqrt{AB})$ положим $A = 4B$ и найдем, что

$$M = \frac{1}{4C},$$

а так как (согласно § 25)

$$M = \frac{N}{8A\sqrt{A}},$$

то теперь будет

$$A = \left(\frac{1}{2}NC\right)^{2/3},$$

а также

$$B = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}NC\right)^{2/3}.$$

Следствие

§ 28. Если, согласно указанию предыдущего параграфа, отверстию, через которое воды вытекают внизу из трубы по направлению к корме, придать сечение $\frac{1}{4C}$, т. е. такое сечение, которое относится к сечению в 1 кв. фут, как мера в 1 фут относится

к учетверенной высоте, соответствующей скорости корабля, находящегося под действием 72 фунтов, то тогда получится, что корабль будет уноситься с половиной той скорости, с какой вытекают воды, и тогда сила отталкивания вытекающих вод составит

$$2MA = \frac{1}{2C} \times \left(\frac{1}{2} NC\right)^{2/3}.$$

Но сила, продвигающая корабль вперед, равна половине вышеприведенной, так что половина эффекта теряется вследствие инерции тех же вод, которые непрерывно забираются.

Пояснение

§ 29. После того как мы, таким образом, показали, как с наибольшей пользой и с наибольшим успехом следует наладить этот способ судоходства, теперь же я полагаю, что это дело следует затем пояснить на таком примере, который, как мне кажется, хорошо согласуется с природой вещей, дабы одновременно выявилось, какого примерно результата можно ожидать.

Рассмотрим трирему, в просторечии галеру с 260 веслами. Допустим, что эта галера с помощью веса 1 куб. фута воды, т. е. 72 фунтов, проходит в течение каждой секунды расстояние в 2 фута, для каковой скорости производящая высота, обозначенная через C, равна $\frac{1}{16}$, если принять, что весомое тело, падая свободно из состояния покоя, проходит в течение первой секунды 16 футов. Далее, так как здесь применяется 260 работников, из которых каждый, согласно второму опыту, относящемуся к части девятой, в состоянии поднять за каждую секунду $^4/_5$ куб. фута на высоту 1 фута, то будет $N = {}^4/_5 \times 260 = 208$. Итак, пусть будет устроено отверстие, через которое воды будут вытекать, размером в 4 кв. фута. Тогда работники будут в состоянии поддерживать воду в трубе, поднятой выше отверстия, на высоте приблизительно $3^1/_2$ фута, каковая высота обозначается через букву A; если взять $^1/_4$ часть этой высоты, то получится $B = {}^7/_8$ фута, так что при этом плавании корабль будет продвигаться вперед с такой скоростью,

какую приобретает весомое тело при свободном падении с высоты $^7/_8$ футов. Таким образом, корабль будет в течение каждой секунды проходить расстояние в 7 $^1/_2$ футов, а в течение каждого часа — 27 000 футов, т. е. свыше 2 французских миль. Подобная скорость корабля, конечно, едва ли может быть достигнута путем гребли, скорее — нет.

Теперь же я построю вычисление на другом допущении, которое, как я надеюсь, не подвергнется очень сильному осуждению со стороны людей, сведущих в морском деле; оно согласуется со всеми наблюдениями, которые я лично провел на море. Я допущу, что паруса, натянутые на триремах перпендикулярно к килю корабля, имеют поверхность в 1600 кв. футов и что они прямо улавливают ударяющий о них ветер, проходящий в течение каждой секунды расстояние в 18 футов, корабль же проходит при этом в том же направлении в каждую секунду расстояние в 6 футов. Таким образом, ветер ударяет в паруса с относительной скоростью в 12 футов. Силу этого ветра я оцениваю равной весу $\frac{9 \times 1600}{850}$ куб. футам воды, т. е. почти 17 куб. футам воды.

Если это так, то отсюда следует, что благодаря подъему вод 260 работниками корабль может продвигаться с такой скоростью, с какой он в течение каждой секунды пробегает расстояние в 6 $^1/_2$ футов.

Не намного отличающаяся оценка вытекает из того, что дает г. Шазель [139] в Comm. Acad. Reg. Sc. Paris за 1702, стр. 98. Но чтобы последнее можно было правильно применить для нашей цели, следует отметить, что при гребле силу, продвигающую трирему, надо оценивать не по давлению гребцов на весла, а по давлению, которое оказывают на воды погруженные в них концы весел. Для того чтобы ее приблизительно определить, необходимо раньше принять во внимание следующее. Было использовано 260 гребцов, которые гребли изо всех сил; в течение первых минут было произведено по 24 натиска весел в 1 мин.; полное колебание весел выполняется с помощью трех движений, которые я буду считать продолжающимися одинаковое время, и из них только одно продвигает трирему вперед. Указанным путем

трирему продвигали вперед с такой скоростью, что она проходила в каждую секунду расстояние в 7 $^1/_5$ футов; часть весла внутри корабля была длиною в 6 футов, а вне коробля — 12 футов; ударяющие о воду поверхности всех весел, взятые в совокупности, г. Шазель принимает в 130 кв. футов. Далее, он отметил, что внутренний край весла проходит при каждом отдельном колебании расстояние в 6 футов; а так как каждое колебание выполняется за время $^{60}/_{24}$ сек. и вместе с тем оно состоит из трех движений, которые я принимаю таутохронными, то ясно, что каждое оттягивание назад весла выполняется за время $^{20}/_{24}$, т. е. $^5/_6$ сек. и что за это время внутренний край весла проходит путь в 6 футов. Далее, вследствие протяженности поверхности весел, ударяющей о воду, не следует считать, что вся она находится на расстоянии 12 футов; поэтому я считаю, что она находится на расстоянии 10 футов, т. е. как если бы за пределами корабля выдавалась часть весла длиной в 10 футов; край этой части описывает 10 футов за время в $^5/_6$ сек. А так как сама трирема обладает скоростью, с которой она за это же время проходит 6 футов, то следует считать, что края весел ударяют о воду с относительной скоростью, с которой она за время $^5/_6$ сек. описывает 4 фута. Таким образом, сила, проталкивающая вперед трирему, равна той силе, которую вода оказала бы на поверхность в 130 кв. футов, если бы она на нее набегала со скоростью, с которой она за время $^5/_6$ сек. проходит 4 фута. Эту силу, согласно общепринятой оценке, я определяю примерно равной весу 40 куб. футов воды. Но эта сила применяется не непрерывно, а лишь в то время, когда весла оттягиваются назад. Таким образом, $^2/_3$ этой силы следует вычесть, так что в конце концов силу, непрерывно продвигающую трирему вперед, следует считать равной весу 13 $^1/_3$ куб. футов воды

Отсюда следует, что если принять, что скорость корабля пропорциональна корню квадратному из движущей силы, то эта же трирема, проводимая в движение весом 1 фута воды, должна была бы приобрести скорость, с которой она могла бы в каждую секунду проходить приблизительно 2 фута. Это допущение является тождественным с тем, какое мы применили в самом начале, так

что отсюда снова следует, что от этого судоходства трирема приобретает такую скорость, с которой она будет в состоянии в каждую секунду проходить $7^1/_2$ футов, каковая скорость несколько больше той, какую триреме сообщала весьма сильная гребля 260 гребцов.

По тщательном размышлении я колеблюсь, какому роду судоходства следует отдать предпочтение, гребле или подъему вод; я считал бы, что результат обоих родов почти одинаков, и я беру на себя смелость определенно утверждать, что если корабль будет слабее продвигаться с помощью подъема вод, то разница будет лишь незначительной; а возможно, что он будет продвигаться сильнее. Но вместе с тем я не сомневаюсь в том, что лицам, несведущим в этих делах, эта новая идея судоходства покажется пустой и смехотворной. Я же придерживаюсь на этот счет иного мнения и рекомендовал бы обратить далее внимание на следующее.

Во-первых, что воды можно с удобством поднимать на кораблях любого вида, на которых весла не могут быть применены, так что благодаря этому новому мореходству даже весьма тяжелые военные корабли, какими пользуются в морских битвах, можно при полном отсутствии ветра направлять в любую сторону.

Во-вторых, что, таким образом, мы имеем в теории пример существования движущих или проталкивающих сил, которые можно назвать внутренними. Этот пример побудит изобретателей придумать иные подобного рода начала движения, притом поддающиеся большему усовершенствованию и пригодные для нужд судоходства.

В-третьих, что можно многими путями облегчить работу людей по подъему вод, и в меньшей мере это может быть осуществлено при пользовании веслами. Ведь существуют естественные устройства, обладающие замечательной и почти невероятной работоспособностью, которые можно заготовить по умеренной цене и с помощью которых можно осуществить то же, что и с помощью труда людей. К их применению особенно можно было бы прибегать во время коротких переездов при ясной и спокойной погоде. О способности,

присущей подобного рода естественным предметам, об эффектах, которые можно отсюда получить, и о их мерах я рассуждал в § 40 и след. части десятой. Но прежде всего я хотел бы, чтобы обратили внимание на § 43, который должен был бы побудить всех, наделенных от природы счастливой способностью к изобретению машин, чтобы они попытались усовершенствовать это дело.

В-четвертых, что могут быть применены некоторые другие чисто механические пути сбережения, аналогичные тому, который был дан § 27; благодаря их применению эффект от одной и той же работы по продвижению кораблей не в малой степени увеличивается. Однако сейчас не представляется возможным рассмотреть все это в соответствии с действительной важностью дела.

Опыты к части тринадцатой

Для того чтобы создать возможность правильно установить на опыте силу отталкивания, можно применить сосуд, имеющий форму параллелепипеда, и взять вес его как порожнего, так и заполненного водой, а затем определить отношение между сечением сосуда и сечением отверстия, которое должно находиться на стенке сосуда, равно как и отношение между высотами воды над отверстием и над основанием. Отсюда можно будет вывести отношение между весом сосуда, заполненного водой, и весом водяного цилиндра, вертикально стоящего над отверстием. Далее, из наблюденной величины броска получится скорость воды. На основании последней, если одновременно присоединить количество воды, вытекающей за заданное время, которое точно так же следует установить путем наблюдения, можно сделать заключение о сечении сжатой струи, которую можно сравнить с сечением отверстия.

После того как все это выяснено, сосуд нужно подвесить на очень длинной нити, одновременно заботясь о том, чтобы он не мог иметь иного движения, кроме такого, которое является противоположным направлению вытекающих вод. Затем, наконец, водам предоставится возможность вытекать, и будет наблюдаться, что

нить отклоняется от своего вертикального положения; по углу отклонения определяется сила отталкивания, и ее можно будет сопоставить с указанными нами мерами.

Опыт 1

Я сам когда-то устроил все так, как сейчас указал, и получилось впечатление, что наше правило § 2 хорошо подтверждается. Однако в ту пору я не мог наладить этого опыта с достаточной точностью, а позднее я к нему не возвращался.

Опыт 2

В другой раз я проверил это по-иному, а именно: сосуд, над которым я произвел все необходимые измерения, я поставил наполненным водой на корму лодочки. Последняя плавала на воде в корыте. Когда затем воды стали вытекать из сосуда (однако так, что они не попадали на лодочку), лодочка стала двигаться в противоположную сторону. Скорость лодочки я очень точно определил с помощью пути, пройденного за заданное время. Затем я исследовал, какой грузик следует подвесить к лодочке, чтобы под действием его веса она приобрела ту же скорость. Сопоставив затем его вес с весом водяного цилиндра заданного диаметра, я отсюда убедился, что наша теория очень точно подтверждается.

Опыт 3

Когда воды из сосуда, поставленного на лодочку, вытекали в лодочку, то последняя оставалась совершенно неподвижной. Это указывает на то, что натиск водяной струи равен силе отталкивания, как я это доказал в §§ 16 и 17. А когда водяная струя падала прямо на плоскость, укрепленную на лодочке, последняя точно так же оставалась неподвижной; но когда струя падала на плоскость косвенно, то лодочка действительно получала движение, но более медленное.

Наконец, когда вытекающие воды воспринимались лодочкой, так что отверстие было погружено в воды, покоящиеся в лодочке,

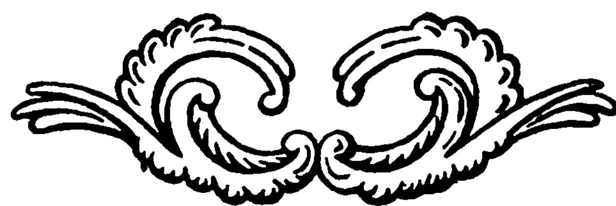
то лодочка оставалась точно так же без движения; это свидетельствует о том, что струя вызывает одинаковое давление, будет ли устроено так, чтобы все движение ее пересекалось или чтобы оно отклонялось под прямым углом, как это было доказано в § 18. Равенство между силой отталкивания и силой водяной струи, падающей перпендикулярно на плоскость, я подтвердил весьма точно очень многими другими путями. Эту силу, согласующуюся с нашей теорией и противоречащую теории, общепринятой до настоящего времени, я подтвердил на стоящем выше всякого возражения опыте, который я провел в своих покоях в присутствии г. Эмануила Кенига, своего двоюродного брата Николая Бернулли и своего отца, с такой уверенностью, что произведя все измерения, я с полной точностью наперед предсказал давление водяной струи, каким оно должно оказаться в будущем, хотя я раньше никогда не делал этого опыта. Все это, выведенное из новых механических начал, я сообщал Петербургской Академии наук, в «Комментариях» которой оно когда-нибудь будет помещено.

Опыт 4

Для того чтобы показать ложность общепринятого правила как относительно силы отталкивания, так и относительно натиска вод, я применил сосуд, какой показан на фиг. 86, снабженный трубкой AB равномерного сечения и изогнутой, направление которой в A было горизонтальным, а в B вертикальным. Я увидел, что этот сосуд не отталкивается в горизонтальном направлении. Следовательно, согласно § 14, является ложным то правило, которое относится к определенному там же простому цилиндру.

Конец

ПРИЛОЖЕНИЯ



АВТОБИОГРАФИЯ

Даниил Бернулли, доктор философии и медицины, ординарный и непременный (perpetuus) профессор физики в Базельской Академии.

Появился на свет 29 января 1700 г. от родителей Ивана Бернулли, украшавшего тогда кафедру математики в Гронингене, и от Доротеи Фалькнер, происходившей также из прославленной и очень древней базельской семьи.

На шестом году жизни был возвращен родителями на родину, где он, научившись немецкому языку и закончив обычный курс обучения в классах Базельской гимназии в 1713 г., был признан достойным быть предназначенным для чтения академических лекций.

Чтобы утвердиться в практическом знании французского языка, он был отдан на воспитание какому-то французскому священнику в Куртларии. Через год он вернулся на родину, где в 1716 г. получил звание магистра философии.

Затем он вступил в число изучающих медицину и усердно слушал врачей, преподававших тогда в Базеле. В 1718 г. перешел в Гейдельбергскую академию, в которой под руководством самого выдающегося врача Небеля тщательно изучал все отделы медицины. В следующем году он перешел в жилище муз в Страсбург, где самые выдающиеся мужи трудились на поприще анатомии и хирургии. В 1720 г., вернувшись на родину и защитив диссертацию «О дыхании» был провозглашен лиценциатом медицины.

Но пример членов его семьи, а именно его отца и старшего брата Николая, а также наклонности его собственной души влекли его к математическим наукам и к изучению природы. Он почти целиком отдался этим занятиям, хотя и не забросил вовсе медицину. По этой причине он прибыл в 1723 г. в Венецию, чтобы утвердиться в практическом знании медицины и приобрести в ней опыт под руководством знаменитейшего врача Микелотти. В 1724 г. один знатный венецианец, друг автора, напечатал на свой счет в Венеции несколько экземпляров небольшого сочинения, в основном полемического, под названием: «Даниил Бернулли. Математические упражнения». После этого наш Бернулли был чужд каким бы то ни было научным пререканиям, о чем с полной ясностью свидетельствуют его разнообразные сочинения, изданные после этого.

В это время Парижская Академия наук пришла к весьма похвальной мысли, начав предлагать ученым вопросы с обещанием весьма щедрых премий, в большой степени содействующих развитию геометрии, астрономии и медицины. Первая из этих премий, имевшая практическую цель, приглашала ученых высказать свое мнение о лучшем способе построения песочных часов (clepsydra), чтобы они могли с удобством применяться мореходами. Бернулли взялся за разрешение этой задачи и послал свое исследование Академии наук; оно по решению судей получило премию, после чего было напечатано.

Затем, привлекаемый славой первейшего мужа Иоанна Баптиста Морганьи, он прибыл в Падую, но не успел он перейти ее границы, как заболел жесточайшей лихорадкой; однако силу этой болезни победило тщание самых выдающихся врачей Валиснера, Морганьи и Когросса. Но болезнь так подорвала его силы, что он едва восстановил их после шестимесячного пребывания у Падуанских муз и не мог проявить себя какими-либо успехами в изучении наук. Но Болонья дала ему, в то время как он находился в Италии, новую почетную степень. В этом городе достославное учреждение для развития наук тогда превратилось в ученую академию, и Бернулли в 1724 г. был внесен в список ее членов.

Точно так же и в знаменитой республике Генуе возникла мысль основания подобного же научного общества. Руководство этой Академией было предложено Бернулли. Но он был более скромного мнения о себе и, не будучи уверен в своих силах, считал это дело для себя слишком трудным и потому вначале был в нерешительности. Пока он колебался, божественное провидение предложило ему другой удел: после того как незадолго до этого Петром Великим, императором россиян, была основана в С.-Петербурге знаменитейшая Академия наук, он был в 1725 г. приглашен в С.-Петербург вместе с братом Николаем, который уже через восемь месяцев закончил свой земной путь и ушел из жизни.

Даниил же после пятилетия, в течение которого он посвятил свой труд Академии, вследствие слабости здоровья решил просить об увольнении и вернуться на родину. Но в силу каких-то причин он был удержан Академией, что послужило к еще более замечательной его славе, ибо жалованье его было увеличено на половину, и он получил звание почетного профессора Академии, причем ему была назначена пожизненная пенсия и дано разрешение оставаться в Петербурге до тех пор, пока это ему будет полезно.

Эти проявления императорской милости удерживали его как оковы, и поэтому он еще три года пробыл в Петербургской Академии, до тех пор, пока неустойчивое состояние здоровья не заставило его, наконец, серьезно подумать о возвращении на родину. Однако же в течение того времени, которое он провел в этих краях, он сделал все возможное для того, чтобы приблизиться к тому результату, к достижению которого стремился славной памяти основатель Академии. Благосклоннейший покровитель (Princeps Optimus)[1] приказал академикам исследовать и обработать какую-либо тему, полезную для человеческого общества и еще недостаточно разработанную. Поэтому Бернулли написал свою «Гидродинамику» или «Записки о силах и движениях жидкостей», и это сочинение перед своим отъездом он представил Академии, а позже, в 1738 г., в расширенном виде напечатал в Страсбурге. Кроме того, за корот-

[1] Подразумевается Бирон.

кое время до своего отъезда он узнал, что будет дана удвоенная премия тому, кто разрешит вопрос «О взаимном наклонении планет», который был предложен в 1732 г. Парижской Академией наук, но тогда не было представлено такого решения вопроса, которое было бы достойно премии; поэтому он решил, что и он должен принять участие в этом состязании. Слава этой премии до такой степени овладели умами ученых, что, как заявила Академия в особом объявлении, было очень много ученых, которым ей с большим огорчением пришлось отказать в премии. Трем ученым открыт был доступ в Академию и выданы похвальные грамоты; присужденная же премия была разделена между двумя учеными. Когда были вскрыты запечатанные конверты с девизами, оказалось что эту награду получили отец и сын Бернулли. Поэтому сочинение Даниила Бернулли, написанное по латыни, было переведено им на французский язык и издано Академией на обоих языках.

В 1733 г. он отбыл на родину в сопровождении младшего брата Ивана, который тогда совершал поездку с учебной целью.[1] После опасного морского путешествия они были занесены в Данциг, откуда отправились в Голландию, а затем в Париж.

В это же время Академия родного города Даниила предоставила ему звание публичного профессора анатомии и ботаники.

В это время он всецело посвятил себя науке о природе и математической науке и поэтому лишь в небольшой степени занимался изучением медицины; тем не менее, побуждаемый любовью к родине, он принял это приглашение и вернулся к прежним занятиям. В конце 1733 г. он прибыл в Базель, по обычаю предков принял права и почести доктора медицины и вступил во вверенный ему удел. Однако некоторое время спустя, когда в том же его родном университете, освободилась кафедра физики, он с согласия как высших должностных лиц этой республики, так и высокого академического совета, переменил кафедру медицины на более близкую его сердцу кафедру физики.

[1] In itinere literalia versantem.

В то же время, поскольку он получил звание почетного профессора Петербургской Академии с соответствующим жалованием, он прилагал все усилия к тому, чтобы выполнять надлежащим образом эти обязанности, отправляя в Петербург свои сочинения, главным образом механического содержания; эту работу он продолжает вплоть до нынешнего дня. Всем другим весьма выгодным и блестящим поручениям, которые возлагались на него учеными учреждениями всех стран, он предпочитал научные занятия на досуге и любовь к родине.

Однако он постоянно переписывался с иностранными учеными, из которых предпочтительно перед другими здесь заслуживают быть упомянутыми Мопертюи, Бугер, Леонард Эйлер, Клеро и Иоанн-Альберт Эйлер.

Кроме тех двух названных выше сочинений, за которые Бернулли получил премии от Парижской Академии наук, он написал еще много других которые были также премированы, а именно: «О лучшем способе устройства якорей» (1738 г.), «О морском приливе и отливе» (1740 г.), «О наилучшем способе устройства магнитных стрелок наклонения» (1743 г.), «О лучшем способе определения времени в море» (1745—1746 гг.); «Теория магнита» — в 1742, 1744 и 1746 гг.

В 1751 г. удостоилось удвоенной премии его сочинение «О теории течений и о лучшем способе их наблюдать»; в 1753 г. получило премию его сочинение «О наиболее выгодном способе замены действия ветра на больших судах», в 1757 г. — другое сочинение «О наилучшем способе уменьшения боковой и килевой качки судна».

Все эти сочинения напечатаны.

Следует также упомянуть о том, что Бернулли в своем родном университете был награжден различными почестями и званиями своими согражданами: так он был дважды, а именно в 1744 и 1756 гг., выбран ректором Академии; в 1754 г. он был назначен деканом Базельского петринского капитула, после того как в предшествующем году был избран членом этого капитула.

Кроме указанного выше научного учреждения в Болонье, в которое он, как мы сказали, вступил в 1724 г., и имп. Петербургской Академии, почетным профессором которой он был назначен в 1730 г., он был выбран членом многих других, и притом знаменитейших, иностранных академий и научных обществ, и, в частности, в 1747 г. — членом королевской Берлинской Академии наук.

В 1748 г. он был избран членом Парижской королевской Академии наук, в которой было только восемь мест для иностранных членов, в 1750 г. — Лондонской Академии, в 1762 г. — Бернского экономического общества, в 1764 г. — Цюрихского экономического общества, в 1767 г. — Курфюрстской Пфальцской Академии.

Нельзя умолчать, что Бернулли был в числе тех семи иностранных ученых, которых милостивейшая и могущественнейшая ныне царствующая императрица россиян удостоила подарком — именным экземпляром знаменитой золотой медали, недавно вычеканенной в память о славном мире, заключенном с турками. С нетерпением и вместе с тем с глубочайшей благодарностью Бернулли ожидает получения на ближайших днях этого ценнейшего памятника своего счастья.[1]

---

[1] На этом автобиография обрывается.

В. И. Смирнов

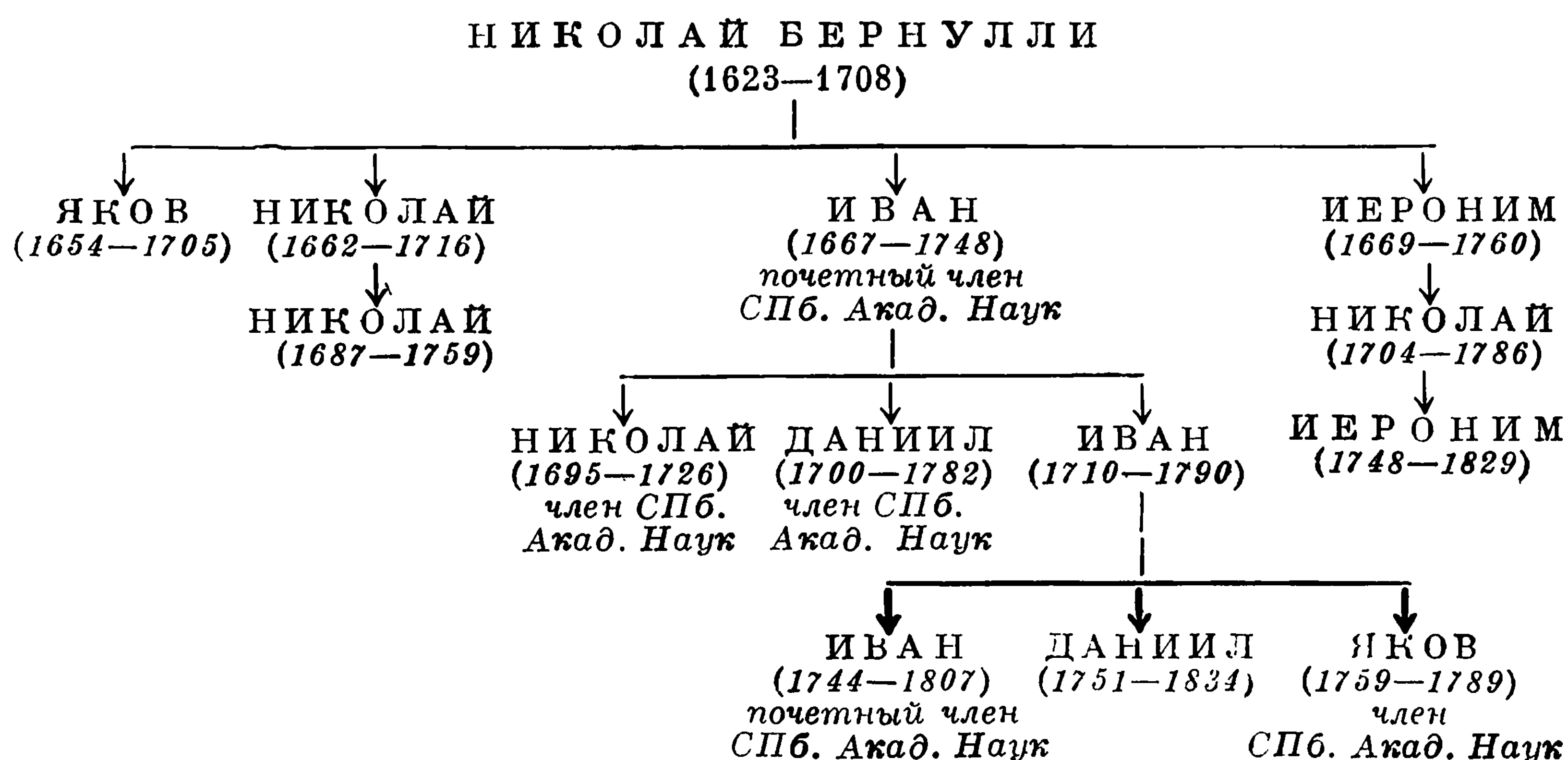
ДАНИИЛ БЕРНУЛЛИ (1700—1782)

1. Даниил Бернулли и его старший брат Николай принадлежали той группе ученых Западной Европы, которые были приглашены в Петербургскую Академию наук при ее основании. Фамилия Бернулли представляет собой яркое явление в истории науки. Три поколения этой фамилии играли исключительно большую роль в развитии физико-математических наук.

Бернулли ведут свое происхождение из Антверпена. Яков Бернулли из-за религиозных преследований со стороны герцога Альбы переселился во Франкфурт на Майне (умер в 1583 г.). Один из его внуков, тоже Яков, поселился затем в Базеле, где получил права гражданства. Его сын Николай, родившийся в 1623 г., и является родоначальником целой плеяды представителей физико-математических наук. Приводим схему родства, начиная с упомянутого выше Николая Бернулли.

Наиболее выдающимися учеными были Яков (1654—1705), Иван (1667—1748) и Даниил (1700—1782). После Лейбница и Ньютона братья Яков и Иван Бернулли были наиболее видными представителями новой математики — анализа бесконечно малых. Широко известны их работы по вариационному исчислению, теории рядов и дифференциальным уравнениям. Яков Бернулли — творец знаменитого труда «Искусство комбинирования» («Ars conjectandi»), который является одной из основ современной теории вероятности. Большое значение в истории механики и физики

имеют исследования Ивана Бернулли о законе сохранения энергии и принципе возможных перемещений. Кроме них и Даниила Бернулли, физико-математическими науками занимались также: родные братья Даниила — старший Николай и младший Иван, его двоюродный брат Николай и два его племянника Иван и Яков, сыновья Ивана, младшего брата Даниила.



Пять представителей фамилии Бернулли были связаны с Петербургской Академией наук. Отец Даниила, Иван Бернулли, был почетным членом Академии с ее основания.

Сам Даниил и его старший брат Николай вошли в Академию при ее основании. Николай Бернулли умер в 1726 г., на следующий год после приезда в Петербург. Племянник Даниила, Иван Бернулли, член Берлинской Академии наук с 1764 г., был избран почетным членом Петербургской Академии в 1776 г. В 1778 г. он приезжал в Петербург для свидания с Эйлером. Кроме математических работ, ему принадлежит большое число работ по астрономии, а также ряд книг с описанием его путешествий. В Берлине было издано пятнадцать томов описаний его путешествий (1782—1793). Наконец, младший племянник Даниила, Яков Бернулли, был в 1786 г. избран адъюнктом Академии и в 1787 г. академиком. Умер он в 1789 г. от удара во время купания в Неве.

2. Приведем некоторые дополнительные сведения о жизни Даниила Бернулли, причем остановимся более подробно на времени его пребывания в Петербурге.

В 1695 г. отец Даниила, Иван Бернулли, занял, по представлению Гюйгенса, место профессора математики в Гронингене, где 29 января 1700 г. родился Даниил Бернулли. Его имя шло от деда со стороны матери. Возвращение семьи в 1705 г. в Базель было связано со смертью Якова Бернулли. Его место профессора математики занял Иван Бернулли. Математические знания Даниил получил от своего отца и старшего брата Николая. Рано проявился его яркий научный талант, и Лейбниц писал о нем его отцу: «Я радуюсь, что и твой сын носит печать Бернулли и хранит наследственный блеск фамилии» («Gaudeo etjam D^nFilium tuum Bernoullizare et hereditarium familiae decus tueri»).

В 1718 г. Даниил Бернулли надеялся получить по жребию профессуру по анатомии и ботанике, а также по логике в Базеле, но эта попытка кончилась для него неудачно, и он уехал в Гейдельберг.

Первым напечатанным трудом Даниила Бернулли были изданные в Венеции «Математические упражнения» (1724 г.). Эта работа написана в защиту отца и дяди (Якова Бернулли) от нападок некоторых итальянских ученых. Кроме того, она содержит и некоторые его собственные исследования, в частности исследования, касающиеся уравнения Рикатти и рекуррентных рядов.

В 1724 г. по инициативе немецкого философа Вольфа имела место переписка между Блюментростом, впоследствии президентом Петербургской Академии, и Иваном Бернулли (отцом Даниила) о приглашении Даниила в Петербург. Ниже мы печатаем выдержку из письма Ивана Бернулли к Гольдбаху в связи с приглашением его сыновей Николая и Даниила в Петербург. Сам Даниил писал в январе 1725 г. к Гольдбаху, который тогда находился в переписке с Блюментростом: «Я прошу Вас только не льстить мне по дружбе и сказать откровенно Ваше мнение, хотя бы оно было и не в мою пользу. Я — молодой человек 25 лет, которые даже не дадут мне по некоторым чертам лица и малому росту, почему

и думают, что я моложе, чем я есть на самом деле. Я только что в эту минуту получил письмо от брата: он из дружбы истинно братской, говорит, что не решается отпустить меня в Московию, а ежели я уже непременно хочу отправиться туда, то и он готов пожертвовать своими выгодами (у него кафедра, которая ему приносит по крайней мере 150 луидоров) и сопутствовать мне. Я полагаю, что было бы легко найти обоим нам место в Петербурге, тем более, что нет ничего обширнее математики. Если Вы сможете помочь этому плану, то Вы будете иметь заслугу не разлучить двух братьев, которых связывает так сильно самая тесная дружба».

В этом же письме Даниил Бернулли указывает на то, что Блюментрост неясно различает его, его родного брата Николая и двоюродного брата Николая.

Иван Бернулли от 20 января 1725 г. пишет Гольдбаху: «Уже несколько месяцев тому назад мне писал славный Вольф, что ему поручено от имени российского императора предложить кафедру математики в Петербургской Академии моему сыну. Поскольку он, однако, не указал имени сына, коему она предназначается, и лишь по некоторым обстоятельствам можно было о сем догадаться, то я решил, что это — младший сын». Далее упоминается о письме Блюментроста к Ивану Бернулли, в котором нет указаний, кто именно из братьев приглашается в Петербург, и о болезни Даниила Бернулли, находящегося в Падуе. В конце письма Иван Бернулли просит Гольдбаха сообщить Головкину (русскому послу в Берлине) и Блюментросту о причинах опоздания ответа от него и просьбу отсрочить ответ до выздоровления Даниила Бернулли.

В октябре 1725 г. Николай и Даниил Бернулли приехали в Петербург. Даниилу Бернулли была предоставлена кафедра физиологии, Николаю — кафедра математики.

Первое выступление Даниила Бернулли в Академии состоялось 4 декабря 1725 г. с докладом на тему: «Возражения Питкарну против его теории о выделении соков в теле животного» («De secretione humorum in corpore animali contra Pitcarnium»).

В протоколе от 14 января 1726 г. записано: «Даниил Бернулли физиологии профессор, начала математические к Теории медической потребная, да приличность их к физиологии научит: перед обедом от часа 7 до 8. Николай Бернулли математики профессор, о тех частях математики, которые к физике привязаны, а особливо о механике читать будет с 8 до 9».

В связи с занятиями физиологией приведем выдержку из письма Даниила Бернулли к президенту Академии Блюментросту от 1728 г.: «...умоляю Вас, милостивый государь, дать мне знать, обязан ли я составить какой-нибудь трактат из физики, математики или же систему физиологии. Я сознаюсь, что последняя возьмет у меня несравненно более времени, чем первые, но трудность не устрашает меня, и я думаю, что сделал довольно много наблюдений касательно кровообращения, движения мускулов, дыхания, питания, зрения, образования голоса и пр...»

Вскоре Даниил Бернулли занял кафедру математики, которая после его отъезда в 1733 г. перешла к Эйлеру. С самого же начала своего пребывания в Академии Даниил Бернулли чрезвычайно продуктивно работал. Первые тома «Комментариев» Академии содержат целый ряд его мемуаров. В это же время он начал грандиозный труд создания «Гидродинамики», о чем мы будем говорить ниже. Большую роль сыграл Даниил Бернулли и его отец в привлечении Эйлера в Петербургскую Академию. В сентябре 1726 г. Блюментрост писал Ивану Бернулли: «Вы мне так прекрасно изобразили г-на Эйлера, что я надеюсь, что он окажет добрые услуги Академии».

Сам Даниил Бернулли писал Эйлеру следующее: «Несколько месяцев тому назад я писал Вам по приказанию нашего президента Блюментроста и от его имени приглашал Вас занять место адъюнкта в нашей Академии с жалованием по 200 рублей в год. Я хорошо знал, что оно гораздо ниже ваших достоинств, и хотя вы сами приняли такие предложения, однако я не преминул хлопотать о ваших выгодах и был настолько счастлив, что несколько успел в том... советую воспользоваться малым промежутком остающегося у Вас времени, чтобы изучить анатомию и

прочесть книги, в которых излагается физиология, основанная на принципах геометрии, как-то: Беллини, Борелли, Питкарна и др. Кроме того, пришлите в наискорейшем времени какую-нибудь из Ваших статей. Ею вы убедите, что сколько ни говорил я о вас хорошего, однако всего еще не высказал, так как уверен, что я тем оказал Академии гораздо большую услугу, чем вам».

3. С первых лет деятельности в Академии Даниилу Бернулли пришлось быть участником довольно сложных взаимоотношений между членами Академии и всесильным тогда в Академии Шумахером — библиотекарем и советником академической канцелярии, который был посредником между академиками и Блюментростом.

Первое время Даниил Бернулли был в сравнительно хороших отношениях с Шумахером, что, повидимому, объяснялось ссорой Даниила Бернулли с академиками Бильфингером и Германом, к которым не благоволил Шумахер. Еще в 1720 г. Николай Бернулли высказывался против трудов Германа. Уже вскоре после приезда братьев Бернулли в Петербург, еще до смерти Николая Бернулли, начались на научной почве раздоры между Бернулли, с одной стороны, и Германом и Бильфингером, с другой. Последний имел весьма неспокойный характер, был самоуверен и в научном отношении был, конечно, несравненно ниже Даниила Бернулли. Ссора приняла весьма резкий характер. В 1729 г. Парижская Академия наук выдвинула в 1729 г. тему: «Найти лучший способ определения высоты полюса на море». Даниил Бернулли объявил о своем желании прочесть на эту тему доклад в торжественном заседании, которое должно было состояться 28 июня 1729 г. в связи с именинами Петра II (29 июня), и демонстрировать свой прибор для определения высоты полюса при качке корабля. На этом же заседании должно было быть зачтено жизнеописание покойного Николая Бернулли. Накануне заседания Даниил Бернулли сделал группе академиков предварительное сообщение и демонстрировал свой прибор. Это сообщение вызвало возражения со стороны Бильфингера, с которым Даниил Бернулли в резкой форме не согласился. Кроме того, Бильфингер возражал против прочтения жизнеописания Николая

Бернулли, ссылаясь на торжественность заседания. Однако заседание прошло спокойно. В протоколе от 28 июня 1729 г. записано: «Сего числа имелось публичное академическое собрание, в котором господин профессор Бернулли предлагал изрядный способ изображения высоты полюса как через наблюдения астрономические, так и через механический инструмент, которому господин профессор Герман именем академических членов ответствовал. В котором собрании вывешен был новоизображенный инструмент для сыскания высоты полюса, и его превосходительство господин адмирал Сиверс обещал с оным инструментом на море пробу учинить. Потом в сем же собрании читал господин профессор Беэр житие умершего Николая Бернулли».

На собрании Академии, состоявшемся 1 июля того же года, споры возобновились, в результате чего Даниил Бернулли и Бильфингер направили президенту Блюментросту письма, выдержки из которых мы ниже приводим. Была образована комиссия для рассмотрения этого дела.

В письме к Шумахеру от 10 сентября 1729 г. Даниил Бернулли писал: «...Боже мой, к каким крайностям вынуждают меня! Обвиняют меня прямо в ложных выводах, и это обвинение делает г. Бильфингер. Еще более: он меня выдает за преступника, сообщая сведения de vita et moribus meis [о жизни и моем нраве]. Я могу только оплакивать мое несчастье... Он хочет уничтожить мою известность, а между тем не в состоянии доказать ни одного ложного вывода, и мне легко обличить и опровергнуть его вздорное злоречие. Мне он не оказывает ни малейшего одолжения, а между тем я, как истинный друг, часто исправлял его статьи, которые он не хотел печатать, не показав их мне три или четыре раза для исправления. Он этим умел очень хорошо воспользоваться, что свидетельствуют его диссертации „О силах, присущих движущемуся телу“ („De viribus corpori moto insitis“), „О капиллярных трубках“ („De tubis capillaribus“) и пр.».

Подробное изложение всей истории, касающейся темы об определении высоты полюса над морем, находится между прочим в письме Даниила Бернулли к Гольдбаху от 22 сентября 1729 г.

Рассказывается об участии во всей этой истории не только Бильфингера, но и Ивана Бернулли, Эйлера, Германа и некоего Мейера. Это был экстраординарный академик по математике, который приехал в Петербург с Бильфингером как его ученик. Он скончался в том же 1729 г. Мейер узнал об упомянутой выше теме от Эйлера, написал работу и направил ее в Парижскую Академию.

Письмо Даниила Бернулли к президенту, о котором мы выше упоминали, было отправлено 7 июля 1729 г. Он пишет, что около четырех недель тому назад Шумахер предложил ему от имени президента составить речь для первого публичного собрания и что он представил на выбор три темы: 1) о строении глаза и о зрении, 2) о новой силе, с помощью которой можно заставить суда идти без весел и без парусов, и 3) о наилучшем способе наблюдений высот в море. Он пишет: «... почти несомненно, я выбрал бы вторую тему; но я хотел полностью положиться на их выбор, который, повидимому, склонялся к последней...».

«Если бы вопрос, который должен был составлять предмет моей речи, был для меня новым, мне не хватило бы этого короткого времени; но почти два года назад я уже составил большую речь, которую послал моему брату в Базель, прося его ее усовершенствовать и послать от его имени в Париж; в ней заключалось все, что я сказал на публичном собрании... и я должен Вас просить, милостивый государь, заметить, для понимания дальнейшего, что я послал эту речь в Базель несколькими месяцами раньше, чем г. Мейер начал работать на ту же тему». Далее идет подробное изложение всех обстоятельств дела, связанных с предварительным обсуждением речи Даниила Бернулли и решением о прочтении слова памяти покойного Николая Бернулли.

В конце письма Даниил Бернулли формулирует обвинения, выдвинутые против него, и отвечает на эти обвинения. Первое из обвинений говорит о том, что он заимствовал правильную часть своей речи из мемуара Мейера, посланного им в Парижскую Академию. Кроме сказанного выше, Даниил Бернулли приводит свидетельство Эйлера о том, что он, Даниил

Бернулли, говорил ему о своих идеях раньше, чем Мейер. В одном из следующих обвинений говорится о непригодности прибора, демонстрированного Даниилом Бернулли на публичном заседании. Кроме того, Даниилу Бернулли был со стороны Бильфингера сделан упрек в том, что он печатает в мемуарах Академии сведения об экспериментах, которые не были сделаны в присутствии академиков. В письме имеются жалобы и на личные оскорбления, а также фразы, вроде следующей: «Он [т. е. Бильфингер] угрожал мне также тем, что никогда больше не придет на заседания. Я ответил „на здоровье!“ и замолчал».

Письмо Бильфингера к президенту содержит главным образом обвинения Даниила Бернулли в том, что он намеренно не показывал предварительно своей речи Герману, что он самоуверенно говорил об опытах, которые не были произведены в присутствии академиков, и что он является виновником того, что торжественное заседание, связанное с днем Петра и Павла (29 июня), было омрачено траурной речью о Николае Бернулли.

Уже через год, в 1730 г., ссора между Даниилом Бернулли и Бильфингером прекратилась. В 1731 г. Бюльфингер и Герман уехали из Петербурга.

Упомянутая выше премия Парижской Академии, объявленная на 1729 г., была присуждена Бугеру за работу: «О методе точного наблюдения высоты звезд на море».

4. С 1729 г. начинается работа Даниила Бернулли над его знаменитой «Гидродинамикой». В письме к Шумахеру от 5 июня 1729 г. он пишет об этом и просит довести до сведения президента: «Месяцев шесть, как приступил к сочинению очень полного трактата о законах движения воды, который будет около 40 листов. Однако эта работа займет у меня почти день и ночь в продолжение всего времени, которое у меня остается по моему обязательству . . . У меня теперь мысли так наполнены этим предметом, что я весьма желал бы иметь возможность, не отрываясь новыми занятиями, окончить работу так, как она представляется теперь в моем уме. Я обязуюсь в таком случае окончить ее прежде моего отъезда. Я не думал, чтобы это сочинение потребовало столько труда,

а потому намеревался присоединить к нему вторую часть для применения этих открытий к кровообращению, движению воздуха при вдыхании и других жидкостей человеческого тела».

«Гидродинамика» была в основном закончена до отъе́зда Даниила Бернулли за границу в 1733 г. Рукописный экземпляр ее он оставил в Петербурге. После отъезда из Петербурга он занимался ее дополнением и переработкой. Повидимому, некоторые материалы, а может быть и просто копия основного текста, были им взяты с собой при отъезде. Вопросы, связанные с изданием «Гидродинамики» и ее выходом из печати, занимают довольно много места в письмах Даниила Бернулли к Эйлеру.

В письме от 18 декабря 1734 г. Даниил Бернулли пишет, что его «Гидродинамика» издается Дульзеккером в Страсбурге и что он получит 30 экземпляров книги и 100 талеров. Здесь же он говорит о своем желании посвятить книгу русской императрице.

В письме от 28 декабря 1737 г. Даниил Бернулли пишет: «Это письмо не содержит ничего научного, если не считать новости об окончании „Гидродинамики“». Автор просит разрешения посвятить ее императрице (*S. M. J.*), так как он считает книгу «принадлежащей России и специально Петербургской Академии». В письме от 29 марта 1738 г. Даниил Бернулли пишет, что он, по совету президента, посвятил свой труд герцогу Курляндскому, т. е. Бирону. В письме от 24 мая того же года он извещает Эйлера о том, что он уже отправил несколько экземпляров «Гидродинамики» в Петербург и просит Эйлера перелистать книгу и сообщить ему замечания, которыми он мог бы воспользоваться в дальнейшем. Он спрашивает в этом письме также о том, как принято в Петербурге его посвящение «Гидродинамики» Бирону.

В письме от 9 августа 1738 г. Даниил Бернулли пишет: «Манускрипт, который я оставил в Петербурге, не полон и не без ошибок и я хотел бы, чтобы Вы его уничтожили, так как теперь напечатана сама работа» (этот «манускрипт» хранится в Архиве Академии наук СССР). Далее в этом письме он опять просит Эйлера дать советы для 2-го издания и узнать мнения других академиков об экспериментальной части. Специально он

упоминает о Краффте. В письме от 7 марта 1739 г. он просит Эйлера выразить его мнение о последних двух разделах гидродинамики и пишет, что сам он считает их весьма ценными.

5. По второму контракту, подписанному Даниилом Бернулли 1 сентября 1730 г., он обязывался за 6 месяцев предупредить о своем возможном отъезде за границу. В конце 1731 г. он заявил, что хочет уехать в июне 1732 г. При этом он пишет, что он «не будет вне возможности оказывать услуги Академии и заслуживать некоторым образом звание почетного профессора, на которое заранее было мне всемилостивейше соизволено». Он писал еще президенту, что если бы он не уехал, то хотел бы получить назначение деканом с титулом и рангом какой-либо гражданской должности.

В июле 1732 г. Даниил Бернулли подал Анне Иоанновне заявление об увольнении из Академии с пенсией и при этом писал, что если ему надо оставаться, то он просит дать ему какой-либо чин. Блюментрост, докладывая об этом, писал: «...сия отмена [пожалование чина] прочим профессорам, из которых иные ему первенство оспаривают, зело досадна будет и к великому несогласию повод подаст, также и Академия в нем необходимой нужды не имеет для того, что на его место профессор Эйлер, а на место сего профессор Краффт свободно определены могут».

В начале 1733 г. Даниил Бернулли просил об отпуске за границу со званием почетного академика и ежегодной пенсией в 200 рублей. В это же время выставлялась кандидатура в Академию на кафедру математики или юриспруденции младшего его брата Ивана Бернулли, который приехал тогда в Петербург. 24 июля 1733 г. Даниил и Иван Бернулли уехали. Даниил Бернулли получил кафедру анатомии и ботаники в Базеле. В 1748 г. после смерти Ивана Бернулли, отца Даниила, его кафедру математики получил по жребию некто Рамспек, который поменялся кафедрами, как это тогда делалось, с Иваном Бернулли, братом Даниила Бернулли, занимавшим тогда кафедру элоквенции. Спустя два года, в 1750 г., Даниил Бернулли без обычной процедуры жребия, получил после смерти профессора физики Штехелина

кафедру физики, которую он и занимал до последних лет своей жизни. В 1740-х годах Даниил Бернулли получил предложения переехать в Берлин в качестве академика Берлинской Академии наук, а также вернуться в Петербургскую Академию наук. Приглашение в Берлин и вообще вопросы, касающиеся оживления деятельности Берлинской Академии в 40-х годах XVIII в., занимают большое место в переписке Даниила Бернулли с Эйлером, который в 1741 г. переехал из Петербурга в Берлин.

В письме от 28 января 1741 г. Даниил Бернулли пишет о приглашении в Берлин его самого, его отца и его брата и о том, что только его брат может принять это предложение. В письме от 23 апреля 1743 г. он возвращается к этому вопросу и пишет, между прочим, следующее: «Я также не вижу, чтобы я мог при настоящем положении оказать какие-либо услуги. Те небольшие способности, которыми наградил меня Бог, я не смог бы лучше применить как в первые годы существования вновь учрежденной Академии... По моему мнению, лучше иметь при Академии наук лишь небольшое число высоких гениев, которые понимают истинное значение наук и умеют различать действительность от мишуры и при этом осведомлены в отношении того, что в каждой науке прежде всего может быть найдено полезного и что еще в ней следует дальше искать в еще большем количестве, если только таковое может быть найдено».

«В Академии должна быть в некоторой степени субординация подобно тому, как в военном сословии. Просвещенный ум увидит все, что может вести к новым полезным изобретениям; для этого он нуждается в людях, которые работают под его руководством и от которых требуется больше ловкости, нежели научных знаний. Следовательно, если бы я мог считать себя также среди этого небольшого числа настоящих ученых, от какового воображения я, однако, очень далек, то я все-таки был бы лишним, так как Вам известно и я слышал, что как скоро король опять вернется к мысли об Академии, различные знаменитые люди уже готовы определиться туда. Мысль о родине не оказывает на меня ни малейшего впечатления; нам скорее совестно покидать наших

старых родителей. К этому присоединяется однообразие спокойной жизни и посредственность моего настоящего положения, которые я начинаю предпочитать всякому блеску».

В 1746 г. президент Петербургской Академии Разумовский предложил Эйлеру вернуться в Петербург. Даниил Бернулли советовал Эйлеру хотя бы года на два вернуться и даже соглашался его временно заменить в Берлине. Эйлер тогда отказался вернуться и после этого в 1747 г. обратился к Даниилу Бернулли с предложением приехать в Петербург, но последний отказался от этого предложения. Этот отказ мотивируется Даниилом Бернулли в письмах к Эйлеру от 29 мая и 22 сентября 1747 г. и 15 мая 1748 г. В первом письме он пишет, что его ничто не связывает с родиной, но что он не может решить вопрос о Петербурге, пока не убедится, что в Академии дела идут нормально. Во втором письме он пишет, что отец, которому осталось уже немного жить, не отпускает его. Третье письмо написано уже после смерти отца, который скончался 1 января 1748 г. В нем Даниил Бернулли ссылается на трудность путешествия и на климат Петербурга. В этом письме упоминается, между прочим, что Шумахер является причиной недоверия к Академии заграницей. В одном из писем, полученном Даниилом Бернулли из Петербурга, говорилось, что если он и далее будет отказываться приехать, то введет президента «в подозрение, которое может повредить многим».

По поводу дела о приглашении Даниила Бернулли вернуться в Петербург, Эйлер, живший тогда в Берлине, имел переписку с Петербургом. В письме от 7 июля 1747 г. он пишет: «... присланный контракт послал немедленно господину Бернуллию; но Ваше высокоблагородие легко рассудит, что он за 1200 рублей едва ли паки поедет. Господин президент, по милости своей, хотя великую надежду на меня полагает, однако я сумневаюсь, откроет ли мне господин Бернуллий свои мысли, сего ради я наперед употребляю всякую предосторожность, чтобы мне не отвечать, если сия негоция не по желанию его высокографского сиятельства окончится».

В более позднем письме он пишет: «...теперь по смерти отца своего нарочито богат стал понеже он теперь в почтении имеется, легко причину можно догадать, для чего так великое переменение восприять не хочет. Между тем ему с нынешней почтой пишу, что его Сиятельству весьма удивительно показалося, что он намерен был прежде ангажироваться, а после свое намерение так нечаянно отменил, однако же его пенсия не пропадает, токмо надобно, чтобы все то, что приготовил для посылки в Императорскую Академию прислал немедленно, что он без сумнения скоро учинит». Это письмо было написано Эйлером по-русски.Эйлер пишет также в Петербург: «Среди иностранных членов он почти один из тех, кто оказал Академии существенные услуги, и он в состоянии и в полной готовности продолжать эти обязанности с большим старанием».

Сам Даниил Бернулли в письме к Эйлеру от 9 марта 1748 г. писал: «Что касается вопроса о том, что не хочу ли я теперь, после смерти своего покойного отца, принять петербургское приглашение, то могу честью своей заверить Вас, что я не в состоянии был бы сделать это, если бы даже я имел к этому большое желание. Я уже давно очень болен и поэтому не в состоянии выполнять мои здешние дела, не говоря уже о том, чтобы совершить такое большое путешествие и жить в таком суровом климате. Поэтому я прошу Вас засвидетельствовать г-ну президенту мою глубокую благодарность за честь, которая мне сделана и за доброе доверие, которое мне оказано. Впрочем, я имею без пенсии больше, нежели мне требуется на мои скромные расходы, и смотрю на все с философской точки зрения».

6. Приведенное выше заявление Эйлера об иностранных членах Академии вполне соответствовало действительности. Находясь за границей, Даниил Бернулли поддерживал тесную связь с Петербургской Академией, живо интересовался ее делами, печатал свои работы главным образом в Петербургской Академии. Уже в первом письме из заграницы от 22 сентября 1733 г. Даниил Бернулли говорит о необходимости наладить связь между Петербургской и Парижской Академиями наук. В письме от

18 декабря 1734 г. он пишет: «... почет Академии от иностранцев главным образом проистекает от математических и физических наук. В этом я достаточно убедился при моем возвращении. Надо постараться достать из Парижа молодого Клеро. Я не могу Вам с достаточной убедительностью сказать с какой горячностью повсюду спрашивают „Петербургские мемуары“ ...».

В 1735 г. он пишет: «... для меня истинное удовольствие всю жизнь состоять в русской императорской службе, все же прочее я считаю за ничто».

В январе 1746 г. он пишет Эйлеру: «Если до меня еще доходит что-нибудь из Петербурга, то всегда нечаянно, и это тем более доставляет мне радость. Между тем я не вижу, как было бы возможно восстановить Академию на прочном основании. Отличиться бы можно было физикой механической и экспериментальной, а Вы бы из-за границы были в состоянии делать хорошие предложения, быть полезным некоторым академикам и сверх того заниматься согласно нынешнему направлению. Теперешних академиков я не настолько знаю, чтобы судить, достаточны ли собственные их умозрения для внушения уважения к Академии, о чем я прошу Вашего мнения, так как убежден, что Вы не сомневаетесь в моей скромности и благонамеренности».

	Общее число работ	Из них напечатано в Петербургской Академии
1721—1725 гг.	8	0
1726—1730 »	15	15
1731—1735 »	5	4
1736—1740 »	10	7
1741—1745 »	8	4
1746—1750 »	3	0
1751—1755 »	2	0
1756—1760 »	2	0
1761—1765 »	2	0
1766—1770 »	8	8
1771—1775 »	10	10
1776—1780 »	2	2

Приведем таблицу, указывающую общее число напечатанных Даниилом Бернулли работ по годам и число работ, напечатанных в изданиях нашей Академии. Эта таблица взята нами из статьи Т. И. Райнова «Даниил Бернулли и его работа в Петербургской Академии» (Вестник Академии наук СССР, 1938).

В постановлении Академии наук от 18 марта 1737 г. мы читаем: «В Базель обретающемуся профессору Бернулли быть членом почетным для содержания с ним во всяких, до Академии касающихся делах, корреспонденций. Того ради и жалования ему от Академии произвести генваря с 1 дня прошлого 1735 г. по двести рублев, так же, как давалось профессору Герману. И за прошлые 735 и 736 годы 400 рублев для посылки к нему Бернуллию выдать профессору Эйлеру, записав в расход с распискою. И о том к расходу дать указ».

Эти 200 рублей выплачивались весьма неаккуратно, с большими перерывами, о чем имеется обширная переписка в делах Академии. В 1744 г. Шумахер, представляя в Сенат бумагу о необходимости выплаты денег, писал: «Он за определенную ему годовую пенсию по 200 рублей обязался труды и услуги свои показывать... Оное свое обещание исполнял он с таким тщанием, что академические Комментарии учеными его сочинениями почти наполнены. С Академией содержал он не только прилежную корреспонденцию, но и других ученых людей изобретения и труды всеми мерами в пользу здешней Академии обращать старался, а сверх того он, яко член здешней Академии, и напечатанною в Германии собственным своим иждивением книгой о гидростатике немалую учинил Академии славу». После этого Даниил Бернулли еще много лет не получал своей пенсии. Она была возобновлена с 1767 г. Сам Даниил Бернулли весьма ценил свою связь с Академией, и понимал всю ее силу и перспективы развития в такой стране, как Россия.

Как мы уже упоминали выше, начиная с 1750 г. Даниил Бернулли ведал кафедрой физики в Базеле. Судя по ряду его биографий, его деятельность, как руководителя работ по экспериментальной физике, была весьма благотворной. Он многое делал

для улучшения оборудования по экспериментальной физике. Вокруг него образовалась группа активно работающих физиков-экспериментаторов. Среди них был Социн (Socin), издавший посвященный Даниилу Бернулли трактат «Основы электричества» (1778 г.), и Дитрих (Dietrich) — конструктор первых подковообразных магнитов.

В письме к Н. Фуссу от 18 марта 1778 г Даниил Бернулли пишет о постановке работ по экспериментальной физике в Базеле и о том, что там имеются хорошо оборудованные физические кабинеты, особенно по электричеству. Особо он упоминает о профессоре Социне и пишет, что он является автором труда «Об истинных принципах и механизме электричества». В последние годы жизни Даниила Бернулли его заменяли по кафедре физики его племянники: сначала Даниил, затем Яков — сыновья Ивана Бернулли. В одной из статей, напечатанных в Базеле в связи со столетием со времени смерти Даниила Бернулли, мы читаем: «С Даниилом Бернулли умерла в Базеле на долгое время экспериментальная физика».

7. Непосредственное влияние на работы Даниила Бернулли оказало творчество Лейбница и особенно Ньютона и Ивана Бернулли. Анализ работ Даниила Бернулли с этой точки зрения представляется нелегкой задачей, и я не буду заниматься этим. Прежде чем перейти к конкретным работам Даниила Бернулли, дадим общую характеристику его научной деятельности. Все представители фамилии Бернулли, как и все крупные ученые того времени, имели широкие интересы и занимались одновременно самыми разнообразними науками, причем большое место в этих занятиях занимали общие вопросы естествознания. Специализация в то время не была узкой, и математика постоянно связывалась с естествознанием и прикладными вопросами. Математика, как средство познания окружающего нас мира, интересовала ученых того времени больше, чем принципиальные вопросы основ самой математики. Но уже тогда вставал целый ряд чисто теоретических вопросов, касающихся основных понятий математики, их использования, а также и математического аппарата. К чисто теорети-

ческим вопросам относятся среди других проблемы теории чисел, которые тогда пользовались большим вниманием некоторых ученых. Но и тогда, как теперь, представители физико-математических наук различались, конечно, характером своей научной деятельности, своими научными интересами, стилем своих работ. Даниил Бернулли был типичным представителем того направления, для которого математика является лишь вспомогательным средством для изучения природы, и он мало интересовался специально математическими вопросами. Он любил подчеркивать, что он не математик, и иногда высказывал недовольство тем, что в механических или физических работах слишком много используется математика. Если сравнить даже с внешней стороны работы Даниила Бернулли с работами Эйлера, то мы увидим громадную разницу: работы Эйлера обычно полны разнообразным и иногда весьма сложным математическим аппаратом, а работы Даниила Бернулли содержат этот аппарат в минимальной степени. Вместо этого мы имеем часто в его работах общие рассуждения о той проблеме, которой он занимается, и попытку построить на этих общих рассуждениях простую схему явления, которая не требовала бы сложного математического аппарата. Упоминая о доказательстве одной теоремы механики, он пишет: «Если же принять это определение [центра колебаний], то я мог бы доказать эту теорему любому сапожнику в одну минуту: какое может быть лучшее употребление первооснов».

Приведу близкое по существу высказывание Н. Е. Жуковского о математике: «Можно говорить, что математическая истина только тогда должна считаться вполне отработанной, когда она может быть объяснена каждому из публики, желающему ее усвоить».

Даниил Бернулли был по существу не математиком, а естествоиспытателем в широком смысле этого слова. Математическим аппаратом он пользовался в очень скромном масштабе. Математика в его работах — очень простая. Поражает его необыкновенная интуиция при рассмотрении различных задач механики и физики. Эта та «первооснова», на которой он строил свои работы. Характерным является и тот факт, что он обычно сопро-

вождает свои теоретические работы экспериментом. Иногда он любил и порисоваться своим пренебрежительным отношением к формальному математическому аппарату, как это мы увидим дальше из материалов его писем. Они дают многое для характеристики его как ученого, особенно письма к Эйлеру. Мы приведем ниже несколько выдержек из писем, которые характеризуют точки зрения Даниила Бернулли на науку, в частности его отношение к Ньютону.

Наиболее резкие высказывания Даниила Бернулли по поводу математики были им сделаны в связи с выходом в свет «Гидродинамики» Даламбера, которая содержала полемику с Даниилом Бернулли. В письме от 23 декабря 1743 г. он пишет: «... мне из Парижа чрезвычайно хвалят одного совсем молодого, прекрасного математика, в особенности в отношении механики, я полагаю, что его называют Д'Аламбером».

7 июля 1745 г. он писал: «... в последний раз как был Мопертюйн в Базеле, то представлял мне как чудо из чудес молодого Д'Аламбера, выпустившего в свет механику и гидродинамику. Я ему сказал, что в двадцатилетнем возрасте невозможно по этой науке рассмотреть все начала и достичь изумительных успехов. Между тем это побудило меня добыть вышеупомянутое сочинение, и с удивлением я увидел, что в этой «Гидродинамике», кроме некоторых незначительных вещей, все остальное показывает только наглое самодовольство; ... он также опровергает меня по вопросу о реакции воды, вытекающей из сосуда...».

Эйлер поддерживал Даламбера. Наиболее ярким является одно из последних писем Даниила Бернулли к Эйлеру от 26 января 1750 г.: «Даламбера я считаю великим математиком в отвлеченных вопросах, но когда он совершает набег в область прикладной математики, то все мое уважение к нему исчезает: его „Гидродинамика" слишком по-детски наивна, чтобы я мог уважать его в подобных вопросах. Его статья о ветрах бессодержательна, и тот, кто прочтет все, будет знать о ветрах ровно столько, сколько знал до начала чтения книги. Я хочу сказать, что в этом случае требуются физические определения, а не отвлеченные интегриро-

вания. Постепенно начинает проникать дурной вкус, от которого истинные науки в значительно большей степени терпят ущерб, чем движутся вперед. Для реальной физики (für die realem physicam) было бы лучше, если бы математики вовсе не существовало на свете. Я не могу понять, что хочет сказать г-н Даламбер своими бесконечными по числу изохронными колебаниями и кривизнами в „Берлинских мемуарах"... он остается все время в области абстрактного и не приводит ни разу конкретного примера.., Он хотел по обезьяньи подражать Вам, но его вкус виден в его произведениях и в недостатке чувства реальности».

В письме к Эйлеру от 4 февраля 1744 г. в связи с задачей колебаний масс, связанных нитью, Даниил Бернулли пишет: «... отсюда можно видеть, что природа нигде не может от Вас совершенно скрыться и что самые сложные вопросы Вы умеете свести к чистой математике. Ничего большего нельзя требовать ни от какого математика; однако я полагаю, что в природе скрыты еще некоторые механические начала, открытие которых сделает эту задачу совершенно легкой. Когда я однажды занялся обдумыванием этой проблемы, мне удалось уже довольно далеко продвинуться в этом вопросе при помощи нескольких новых основных положений...».

В письме к Н. Фуссу от 18 марта 1778 г. Даниил Бернулли, говоря о работах в Базеле по экспериментальной физике, дальше в несколько ироническом тоне пишет: «То, что Вы мне сообщаете как о себе, так и о г-не Эйлере, несомненно относится к бесконечно более высокой области. Я имею в виду изящную теорему Эйлера о простых числах и его новый способ исследования любого предлагаемого числа, как бы велико оно не было, простое ли оно или нет. То, что Вы потрудились сообщить мне по этому вопросу, мне показалось очень тонким и достойным нашего великого маэстро. Но не находите ли Вы, что простым числам уделяется слишком большая честь тем, что на них истрачено столько богатств ума; не есть ли это дань утонченному вкусу нашего века?». Говоря о восхищении трудами самого Н. Фусса, Даниил

Бернулли пишет далее: «... но это восхищение удваивается в том случае, когда тема может привести к полезным знаниям».

В письме к тому же Н. Фуссу от 7 июня 1777 г. Даниил Бернулли в связи с проектом Кулибина деревянного моста через Неву выражает свое высокое мнение о Кулибине и пишет далее: «Я нимало не слушаюсь чистой теории в этих работах, потому что невозможно достаточно исчислить все обстоятельства, которые непременно должны быть приняты в расчет. Необходимо работать ощупью над бесчисленным множеством предметов, не допускающих никаких точных определений. Главный строитель обязан чаще всего обращаться к своей врожденной сообразительности. В этом то я признаю все преимущества, которым может владеть такой человек, как Кулибин».

8. Несмотря на влияние Ивана Бернулли и вопреки ему, Даниил Бернулли был в основном ньютонианцем. Но все же иногда у него проявлялись отголоски и точек зрения Декарта. Кондорсе в своей речи, посвященной памяти Даниила Бернулли, говорил: «Признание Даниила Бернулли было последним триумфом, который еще отсутствовал в славе Ньютона, с которым его отец имел несчастье сражаться всю жизнь». Приведем некоторые цитаты из писем Даниила Бернулли в связи с указанными выше вопросами. Письмо от 20 января 1742 г. связано с работой Эйлера по теории приливов и отливов. Даниил Бернулли пишет в нем: «... можно пожалеть доброго старого Ньютона, который у Вас не только не находит места наряду со всеми этими „знаменитейшими" Гольдбахами, Бильфингерами и т. д., но Вы говорите о нем даже с полным презрением. Как истинный друг, я считаю себя обязанным написать Вам об этом, так как это вызывает возмущение многих ученых; мне известно, что если бы Ваша работа „О морском волнении" не была признана столь безукоризненно хорошей, какой и я ее признаю, то Вы не получили бы ни частицы премии, так как репутация Ньютона стоит теперь так же высоко во Франции, как и в Англии... Мне хорошо известно, как мало у Вас оснований быть довольным англичанами, которые вместо того, чтобы почитать Вас как истинное украшение нашего века

презирают все и всех; но я уверен, что, если бы великий Ньютон был еще в живых, он говорил бы о Вас совсем в ином тоне».

Приведем теперь выдержку из письма к Эйлеру от 4 февраля 1744 г.: «Я радуюсь, что Вам так нравится мысль о сопротивлении эфира... Впрочем, я полагаю, что эфир имеет так же тяготение к солнцу, как воздух к земле; я не могу скрыть от Вас, что в этих вопросах я ньютонианец чистейшей воды, и я удивляюсь, что Вы все еще продолжаете держаться за принципы Декарта; и здесь играет роль какое-то Ваше влечение к этой теории. Если Господь Бог мог создать душу, природа которой непонятна, то он мог также снабдить материю всеобщим притяжением, хотя такое притяжение и выше нашего понимания; наоборот в принципах Декарта всегда заключено нечто, что противоречит нашему пониманию».

26 января 1750 г. Даниил Бернулли пишет: «Хотя я еще не видел теории луны господина Клеро, но я не могу отказать себе в высказании априорного взгляда. Я знаю какой он способный человек, и притом, что важнее всего, я вполне убежден в удовлетворительности теории Ньютона».

Подробное суждение о законе всемирного тяготения Ньютона высказано Даниилом Бернулли в начале его работы «Различные размышления, касающиеся общей физики». Говоря об экспериментах Бугера, касающихся силы тяжести, Даниил Бернулли пишет: «... одним словом он полностью доказал гипотезу Ньютона о том, что тяжесть есть эффект притяжения материи землей, гипотезу, о которой заурядные люди не имели никакой идеи, которая кажется смешной философу, руководимому принципами Декарта, и которая несомненна для тех, которые изучали природу и свободны от предвзятых мнений, — гипотеза, достойная великого Ньютона. Действительно, мир не мог бы существовать таким, какой он есть, если бы не было универсального притяжения материи, которое всемогущество создателя сообщило материи способом, непостижимым для людей, и которое не может быть произведено само собой материей и движением, ибо если бы во вселенной существовали бы только материя и движение,

то это движение, каким бы оно ни было, необходимо стремилось бы удалить частицы друг от друга, и мир рассеялся бы. Таким образом необходимо, чтобы существовала нематериальная сущность, которая побуждает постоянно материю сближаться в то время, как движение отдаляет частицы друг от друга».

В конце своей работы по теории приливов и отливов, за которую он в 1740 г. получил премию Парижской Академии, Даниил Бернулли упомянул о Ньютоне, называя его великим человеком (grand Homme): «Если я и добился некоторого успеха, то я должен это отнести к чести этого ученого философа, это именно он дал нам возможность обоснованно рассуждать об этих вопросах».

В письме к Эйлеру от 30 апреля 1740 г. Даниил Бернулли сообщает, что упомянутая премия поделена на четыре части, причем он называет троих: Маклорэна, Эйлера и самого себя, а по поводу четвертого иронически отмечает, что его единственная заслуга в том, что он не является противником Картезианства. Этим четвертым был иезуит Каваллери. Но далее он пишет: «Мне очень приятно, что Вы не отвергаете моих несколько лет назад высказанных идей объяснения причины тяготения бесконечными вихрями». Но отголоски картезианства в работах Даниила Бернулли были совсем слабыми.

Интересную общую характеристику научной деятельности Даниила Бернулли дал Кондорсе в своей речи, о которой мы уже упоминали выше: «... его вкусы влекли его преимущественно к исследованию вопросов, которые представляют больше трудностей в приведении их к математическому аппарату, чем в решении, когда это приведение уже сделано. В задачах, которыми он занимался, он старался в самой их природе найти средства к их упрощению, к их проведению к простейшей форме, оставляя за вычислениями только то, что от них не может быть отнято. Он имел склонность пользоваться теорией для того, чтобы проникнуть глубже в познание природы, прилагая математику не только к умозрительной механике, к абстрактным законам тел, но также и к физике, к явлениям природы в ее реальном состоянии и

к тем явлениям, которые нам доставляют наблюдения. Никто лучше его не умел находить в анализе средства для того, чтобы подвергнуть вычислениям все детали явления; никто лучше его не мог поставить опыт так, чтобы он мог дать или подтверждение результатов теории или чтобы он мог служить основой вычислений. В полной мере он и философ и физик...».

9. Тяжелый и властный характер Ивана Бернулли доставлял немало огорчений Даниилу Бернулли. Его отец считал себя первым математиком своего времени. В конце своей жизни он признавал еще Эйлера. К успехам сына он относился ревниво, а некоторые из его достижений приписывал себе. Это очень болезненно переживал Даниил Бернулли. Но из почтения и повиновения отцу он на своих ученых работах писал, что является сыном Ивана Бернулли. Особенно большую обиду испытал Даниил Бернулли после выхода в свет «Гидравлики» Ивана Бернулли. Она была напечатана в четвертом томе полного собрания трудов Ивана Бернулли, вышедшего в 1742 г. Эта работа называлась: «Hidraulica. Nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis», т. е. «Гидравлика. Впервые открытая и доказанная непосредственно из чисто механических основ». Она помечена 1732 г.

Жалобами на отца полно письмо Даниила Бернулли к Эйлеру от 4 сентября 1743 г.: «Я прошу Вас высказать мне с дружеской откровенностью и доверием Ваше мнение о сочинениях моего отца, особенно о последнем томе. Что касается меня, то я могу с полным основанием быть недовольным этой книгой: новые механические задачи по большею частью принадлежат мне; мой отец видел даже мои решения, прежде чем он решил их на свой лад. При этом он ни одним словом не упоминает обо мне. Это мне особенно тяжело потому, что мое решение еще не опубликовано. Мое первое решение задачи о спонтанном вращении вокруг центра, выведенное из свойств минимальной инерции, он долго опровергал и поносил, но кончил тем, что опубликовал его, как свое собственное. Впрочем, так как я благодаря счастливому стечению обстоятельств получил лист из его рукописи, в котором

находилось оспариваемое решение и так как я передал ему через брата мою претензию, то он включил и меня в качестве второго автора. Приблизительно так же обстоит дело и с остальными „новыми математическими задачами“.

«У меня целиком отбирает всю мою гидродинамику, ни одной буквой из которой я воистину не обязан моему отцу, и таким образом в один час я теряю плоды десятилетней работы. Все теории взяты из моей гидродинамики, и тем не менее мой отец решается называть свое сочинение «Гидравликой, ныне, в 1732 г., впервые открытой», а моя гидродинамика была напечатана лишь в 1738 г. Однако же мой отец взял все у меня, за исключением лишь того, что он придумал другой общий способ определения приращения скорости, но все это открытие изложено на нескольких страницах. Все, что мой отец не считает полностью своим изобретением, он презирает и, наконец, в довершение зла, он включает в свою книгу еще Ваше письмо, в котором Вы также стараетесь приуменьшить значение моих изобретений в одном вопросе (решение этого вопроса найдено мною впервые и только мною, и я претендую на то, что я исчерпал его совершенно). Вы утверждаете, что я определил давление жидкостей, протекающих по каналу, только в состоянии неподвижности; однако же я вслед за этим на стр. 259 (в конце) показываю, что давление в общем виде равно $\frac{a-v^2}{2c}$. А что такое, отличное от меня, сделал мой отец в этой области? Постановка вопроса принадлежит мне; мысль, что надо рассматривать канал как бы обрывающимся в том месте, где определяется давление, также принадлежит мне; мысль, что следует искать ускорение последней частицы в первый момент обрыва, также принадлежит мне, и, наконец, то, что по этому самому ускороению, либо частью, либо полностью задержанному, можно найти сжатие капельки и то, что это сжатие капельки определяет давление воды в канале, — все это принадлежит мне. Что же касается моего отца, то он не сделал абсолютно ничего, кроме того, что определил скорость на свой лад и притом повторяя это много раз». И да-

лее: «... заклинаю Вас, как своего лучшего друга, если представится подходящий случай, снять с меня несправедливое подозрение в плагиате, без того, чтобы виноватым оказался мой отец, и сделать так, чтобы истина в этом, что касается спора между моим отцом и мной, не потерпела никакого ущерба. Было бы ниже моего достоинства, если бы я стал защищаться сам».

В этом письме ярко выявлены основные идеи доказательства знаменитого интеграла Даниила Бернулли, при помощи которого определяется давление в текущей жидкости. Кроме того, видно, насколько сам Даниил Бернулли ценил свое открытие. В письме Эйлера к Ивану Бернулли, которое было напечатано в «Гидравлике» Ивана Бернулли, по поводу определения давления отмечается: «В то время как никто, кроме твоего знаменитейшего сына, не касался этой темы (а он определил давление лишь весьма косвенным путем, так как все движение он свел к состоянию неподвижности), ты сразу же, открыв естественный способ, точно определил давление при всяком состоянии воды». Имено эта фраза из письма Эйлера к Ивану Бернулли и вызвала справедливую обиду Даниила Бернулли, которую мы видим в письме от 4 сентября 1743 г.

10. Сколько-нибудь полный анализ научных работ Даниила Бернулли представляет большие трудности. Мы ограничимся небольшим очерком этих работ, причем особое внимание уделим тем работам, которые вместе с «Гидродинамикой» являются центральными в его творчестве. Сюда относятся труды, посвященные вопросу о главных колебаниях некоторых механических систем и принципу суперпозиции таких колебаний. Из математических работ надо отметить также его исследование по теории вероятности, по вопросу приближенного решения уравнений при помощи рекуррентных рядов и по теории тригонометрических рядов. Последние связаны с проблемой колебания струны, о чем мы будем говорить ниже.

Наиболее ранние труды Даниила Бернулли относятся к исследованию уравнения Рикатти и рекуррентным рядам. Вопросы эти содержатся еще в первой работе 1724 г. Уравнением Ри-

катти Даниил Бернулли занимался одновременно со своим отцом и братом Николаем. Он рассматривает уравнение Рикатти вида

$$y' = ax^n + by^2, \qquad (1)$$

где a и b — какие угодно постоянные, и доказывает, что оно может быть преобразовано в уравнение того же вида, где только n заменено на $-\frac{n}{n+1}$ или на $-n-4$. Исходя затем от случая $n=0$, он указывает на возможность решения уравнения (1) в конечном виде в случаях

$$n = \frac{4m}{1-2m} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

Впоследствии Лиувилль доказал, что случаи, указанные Д. Бернулли, и случай $n = -2$ являются единственными, когда уравнение (1) интегрируется в конечном виде.

Переходим к работам Даниила Бернулли по рекуррентным рядам. Впервые такие ряды рассматривал Моавр (1720 г.), и Даниил Бернулли, занимаясь ими, не знал об этом. Узнав, он некоторое время не занимался этим вопросом, а затем все же напечатал свои исследования в третьем томе «Комментариев Петербургской Академии». Работа относится к 1728 г. Он ищет корни алгебраических уравнений, которые записываются им в виде (ограничиваемся кубическими уравнениями)

$$1 = ax + bx^2 + cx^3, \qquad (2)$$

и составляет члены рекуррентного ряда, согласно формуле

$$\alpha_n = a\alpha_{n-1} + b\alpha_{n-2} + c\alpha_{n-3}, \qquad (3)$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — какие-либо заданные числа. Утверждается, что отношение $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ приближенно равно корню уравнения, ближайшему к нулю. В начале строятся общие решения линейных уравнений в конечных разностях с постоянными коэффициентами. Указанное выше утверждение при известных оговорках непосредственно следует, как это теперь известно, из связи уравнения (2) с уравнением в конечных разностях (3). Упоминаются случаи мнимых

корней с одинаковым абсолютным значением. Рекомендуется подстановка $x=y+d$ в целях приближения к вещественному корню и возможности использования метода рекуррентных рядов. Указывается на возможность записи алгебраического уравнения в виде

$$x^3 = ax^3 + bx + c. \tag{4}$$

Числа a_n определяются согласно (3) и утверждается, что отношение $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ приближенно равно корню уравнения (4), наиболее отдаленному от нуля.

В двух работах, помещенных в пятом томе «Комментариев», рассматриваются трансцендентные уравнения вида

$$y = x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots \tag{5}$$

Они записываются следующим образом:

$$1 = \frac{1}{y}x + b_2\frac{x^2}{y} + b_3\frac{x^3}{y} + \ldots,$$

и к ним применяется метод рекуррентных рядов, причем в качестве первого приближения принимаются значения $(\ldots, 0, 0, 1)$. Следующими приближениями будут:

$$\frac{1}{y}, \ \frac{1}{y^2} + \frac{b_2}{y}, \ \frac{1}{y^3} + \frac{2b_2}{y^2} + \frac{b_3}{y} \ldots,$$

и приближенное значение корня получается в виде рациональной дроби от y. Наряду с этим дается выражение x через y в виде первых членов степенного ряда, получаемым обращением ряда (5). Оба способа сравниваются на примере, и автор удостоверяет преимущество метода рекуррентных рядов. В качестве примера берется уравнение

$$1 = \frac{x}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^3}{7!} - \frac{x^4}{9!} + \ldots,$$

имеющее корни $x = n^2\pi^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

В работе Даниила Бернулли отсутствует обоснование метода рекуррентных рядов. Эйлер в XVII главе своего «Введения в анализе бесконечно малых», упоминая работу Даниила Бер-

нулли из третьего тома «Комментариев», дает свое изложение применения метода рекуррентных рядов к приближенному решению алгебраических уравнений, причем рассматриваются уравнения с вещественными различными корнями. Во введении к упомянутой XVII главе Эйлер указывает, что его цель — выяснить, к каким случаям указанный метод приближенного вычисления корней применим.

Отметим еще, что в 1729 г. Даниил Бернулли в письме к Гольдбаху подходит к определению функции гамма. Он указывает на то, что общий член ряда $(1+2!+3!+\ldots)$ имеет вид

$$\left(A+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdots\frac{A}{A-1+x}\right),$$

где x — номер члена ряда и A — «бесконечное число» (см.: В. В. Гуссов. Работы русских ученых по теории гамма-функций. Историко-математические исследования, вып. V, 1952).

11. Большое место среди математических исследований Даниила Бернулли занимают работы по теории вероятностей. Наиболее известной является работа «Попытка новой теории вычисления вероятностей случайных величин» (Комментарии Петербургской Академии наук, т V, 1738), в которой вводится понятие морального ожидания. Работа начинается с определения математического ожидания в обычной форме как суммы произведений значений случайной величины на вероятность этих значений. Далее вводится понятие морального значения перехода капитала α в капитал x. Эта величина определяется формулой

$$y=b\log\frac{x}{\alpha}, \qquad (6)$$

где b — некоторый положительный коэффициент.

Пусть $c_1, c_2 \ldots c_m$ — возможные значения выигрыша и $p_1, p_2 \ldots p_m$ — их вероятности. Среднее моральное значение выигрыша определяется формулой

$$z=p_1 b\log\frac{c_1+\alpha}{\alpha}+p_2 b\log\frac{c_2+\alpha}{\alpha}+\ldots+p_m b\log\frac{c_m+\alpha}{\alpha}.$$

Определяя величину x из уравнения

$$z = b \log \frac{x}{\alpha},$$

получим

$$x = (c_1 + \alpha_1)^{p_1} (c_2 + \alpha)^{p_2} \ldots (c_m + \alpha)^{p_m},$$

и разность

$$(c_1 + \alpha)^{p_1} (c_2 + \alpha)^{p_2} \ldots (c_m + \alpha)^{p_m} - \alpha \tag{7}$$

представляет собой величину морального ожидания выигрыша при основном капитале α (по терминологии Лапласа; у Даниила Бернулли: lucrum legetime expectandum seu sors quesita).

Выражение (7) можно переписать в виде

$$\alpha \left(1 + \frac{c_1}{\alpha}\right)^{p_1} \left(1 + \frac{c_2}{\alpha}\right)^{p_2} \ldots \left(1 + \frac{c_m}{\alpha}\right)^{p_m} - \alpha.$$

Считая α большим, разлагая по биному Ньютона и удерживая лишь члены, не содержащие α в знаменателе, получим выражение математического ожидания выигрыша

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 + \ldots + p_m c_m.$$

Понятие морального ожидания применялось к задаче, которая потом получила название «петербургской игры», и, как пишет Даниил Бернулли, была одной из пяти задач, предложенных Монморту его дядей Николаем Бернулли. Задачи эти были опубликованы в книге Монморта «Анализ азартных игр» («Analyse sur les jeux de hasard de M. de Montmort»).

Сформулируем задачу «петербургской игры». В игре участвуют два лица — Павел и Петр. Петр бросает монету. Если монета падает обратной стороной, то он платит Павлу 1 дукат и игра кончается, а если лицевой стороной, то игра продолжается. В случае появления при втором испытании обратной стороны Петр платит Павлу 2 дуката и игра кончается, а при втором варианте игра продолжается. Если в третьем испытании выходит обратная сторона, то сумма, подлежащая уплате, составит 4 дуката, в четвертом испытании — 8 дукатов и т. д. Для участия в такой игре Павел должен доплатить Петру предварительно

некоторую сумму x, которая для безобидности игры должна равняться математическому ожиданию его выигрыша. В данном случае возможные значения выигрыша равны 1, 2, 4, 8 и т. д., так что математическое ожидание выигрыша у Павла бесконечно велико. Если через α обозначить капитал, которым владеет Павел, то моральное ожидание его выигрыша, согласно изложенной выше теории Даниила Бернулли, выражается формулой

$$\sqrt{\alpha+1}\sqrt[4]{\alpha+2}\sqrt[8]{\alpha+4}\ldots-\alpha=P(\alpha)-\alpha \qquad (8)$$

и будет конечным. При $\alpha=0$ разность (8) равна 2, при $\alpha=10$ — примерно 3, при $\alpha=100$ — около $4^1/_3$, при $\alpha=1000$ — около 6. Сумма x, за которую лицу, обладающему капиталом α, можно купить положение игрока Павла, определяется из равенства $P(\alpha-x)-\alpha=0$.

Приведем еще одну задачу, рассмотренную в этой работе. Некто имеет 4000 дукатов наличными деньгами и 8000 дукатов в товарах, находящихся в далеких странах. Считается, что из десяти кораблей, на которых должны перевозиться эти товары, один тонет. Как с точки зрения морального ожидания выгоднее перевозить товары? Если перевозить все товары на одном корабле, то моральное ожидание приобретения от привозимых товаров равно:

$$12\,000^{9/10}\cdot 4000^{1/10}-400,$$

и если на двух кораблях, то

$$12\,000^{81/100}\cdot 8000^{18/100}\cdot 4000^{1/100}-400.$$

Последняя величина больше предыдущей, и Даниил Бернулли утверждает, что увеличение числа кораблей увеличивает величину морального ожидания приобретения. Основной закон (6) в дифференциальной форме имеет вид

$$dy=b\frac{dx}{x}\,,$$

т. е. бесконечно малое приращение морального значения перехода прямо пропорционально бесконечно малому приращению

капитала и обратно пропорционально величине капитала x, который получает приращение dx. Указанные идеи Даниила Бернулли были воспроизведены у Лапласа, Пуассона и Лакруа. Первое возражение от лица математиков против идеи морального ожидания и ее применения мы имеем в известном курсе Бертрана «Исчисление вероятностей». Он довольно ядовито пишет между прочим следующее: «Теория морального ожидания сделалась классической, и никогда это слово не может цитироваться столь удачно: эту теорию изучали, ей обучали, ее излагали в истинно знаменитых книгах. Успех на этом и окончился, ею фактически не занимались и из нее не смогли сделать никакого употребления». Интересно отметить, что в речи Кондорсе, посвященной памяти Даниила Бернулли, имеется весьма сдержанное упоминание о рассматриваемой работе.

В 1896 г. в серии «Die Grundlagen der modernen Wertlehre» («Основания современного учения о ценности») был издан немецкий перевод указанной работы Даниила Бернулли с примечаниями Принсгейма, где отмечается переоценка понятия морального ожидания в работах Лапласа. Предисловие, написанное Фиком, посвящено указаниям на связь работы Даниила Бернулли с общественными науками. Как мы видели выше, среднее моральное значение выигрыша определяется как математическое ожидание величины

$$b \log \frac{x+\alpha}{\alpha},$$

где x — выигрыш (случайная величина) и α — капитал выигрывающего.

Надо отметить, что в настоящее время в современной теории информации используется идея образования функционала, заданного на вероятностном распределении с помощью логарифмической функции и измеряющего прирост информации. Для дискретной вероятностной схемы таким функционалом является, например, энтропия. Таким образом, с современной точки зрения, важна идея составления с помощью логарифмической функции некоторого функционала, выражающего прирост какой-либо

величины. На эту связь работы Даниила Бернулли с современными идеями теории вероятностей мне указал Ю. В. Линник. Разъяснение «парадокса» «петербургской игры» было дано А. Я. Хинчиным в его работе «О петербургской игре» (Математический сборник, 1925). В этой работе исследуется вопрос о некотором среднем выигрыше за большое число партий.

Остановимся еще на двух принципиально важных работах Даниила Бернулли по теории вероятностей. Одной из его новых идей было применение анализа бесконечно малых к задачам теории вероятностей. Центральной в этом отношении является его работа «Попытка применения алгоритма бесконечно малых в теории вероятностей» (Новые Комментарии Петербургской Академии наук, 1768). Точное решение задач теории вероятностей приводит часто к сложным рассуждениям комбинаторного характера. Даниил Бернулли предлагает заменить их операциями дифференциального исчисления, считая единицу бесконечно малой по сравнению с большими числами, которые встречаются в задаче. Это приводит к приближенным формулам, которые выделяют наиболее существенные члены из точной формулы, т. е. дают асимптотическое выражение искомого ответа при больших значениях параметров, входящих в задачу. Применение дифференциального исчисления значительно упрощает решение задачи.

В рассматриваемой работе естественно отсутствует теоретическая часть. Вопрос разъясняется на примерах. В § 1 Даниил Бернулли, упоминая о задачах, связанных с выниманием записок из урны, пишет: «...для совершения этого дела с удобством могут быть применены исчисления бесконечно малых, если только каждое изменение можно счесть как бы за бесконечно малое, а это возможно до тех пор пока число записок, остающихся в урне, весьма велико, ибо тогда единица может приниматься как бы за бесконечно малую; это основано на той арифметической гипотезе бесконечных, которой пользовались до открытия дифференциального и интегрального исчисления. Впрочем я понимаю, что этот отвлеченно поставленный вопрос нуждается в дальнейшем объяснении и потому перехожу к иллюстрации сути дела

примерами, причем сперва пользуюсь обычным анализом, а от него перехожу к применению алгоритма бесконечных». После этих слов автор формулирует конкретную задачу. В урне имеется n пар записок, причем записки одной и той же пары обозначены одинаковым номером, а записки разных пар — разными номерами. Затем из урны извлекается последовательно несколько записок так, что число оставшихся записок равно r. Ищется математическое ожидание x числа оставшихся пар записок с одинаковым номером. Задача сначала решается алгебраическим методом. Решение не является вполне отчетливым. В частности не делается различия между математическим ожиданием случайной величины и ее значением и не учитывается тот факт, что величины x при разных r суть зависимые. Для x Даниил Бернулли получает правильное выражение $x = \frac{r(r-1)}{4n-2}$ и замечает, что при больших n и r его можно заменить приближенным выражением $x = \frac{r^2}{4n}$. Приведем теперь его рассуждения, при помощи которых он получает последний результат, пользуясь дифференциальными уравнениями. Указанные выше нестрогости имеют место и в этом случае.

При уменьшении r на единицу изымается или записка, входящая в пару, или одиночная. В первом случае $dx = dr$, а во втором $dx = 0$, причем вероятность первого случая считается равной $\frac{2x}{r}$. Это приводит к дифференциальному уравнению $dx = \frac{2xdr}{r}$, решение которого при условии, что $r = 2n$ при $x = n$, дает $x = \frac{r^2}{4n}$. Метод бесконечно малых применяется еще в двух более поздних работах Даниила Бернулли по теории вероятностей (Новые Комментарии Петербургской Академии, т. XIV, 1769). В первой из них рассматривается между прочим следующая задача. В одной урне имеется n белых шаров, а в другой — n черных. Одновременно из каждой урны в другую перекладывается один шар, и эта операция последовательно производится r раз. Требуется определить математическое ожидание числа белых

шаров в первой урне. Точный ответ: $x=\frac{1}{2}n\left[1+\left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right]$, а при большом n имеем приближенную формулу

$$x=\frac{1}{2}n\left(1+e^{-\frac{2r}{n}}\right).$$

Рассуждения, основанные на анализе бесконечно малых, аналогичны предыдущим. Если из первой урны изымается белый шар, то $dx=-1$ и вероятность этого $\frac{x}{n}$, а если черный, то $dx=$ $=dr=1$ и вероятность равна $\frac{n-x}{n}$. Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dr}=-\frac{x}{n}+\frac{n-x}{n} \qquad (dr=1),$$

интегрирование которого при начальном условии $x=n$ при $r=0$ дает указанную выше приближенную формулу. Первое применение метода бесконечно малых в теории вероятностей находилось в работе Даниила Бернулли, посвященной вопросу о пользе оспопрививания (1760 г., напечатана в 1766 г.). Имелись и другие его работы статистического характера.

Последняя работа Даниила Бернулли по теории вероятностей — «Наиболее вероятное значение среди нескольких расходящихся между собой наблюдений и устанавливаемое отсюда наиболее близкое к истине заключение» (Акты Петербургской Академии, 1778). Здесь Даниил Бернулли предлагает в качестве кривой распределения случайных ошибок — полуокружность. Радиус ее является пределом возможной величины случайных ошибок и устанавливается из опыта. Для определения центра, где плотность вероятности наибольшая, автором предлагается следующий замечательный способ, который потом вошел в теорию вероятностей, но не связывается с именем Даниила Бернулли: он предлагает подставлять в правую часть уравнения полуокружности $y=f(x)$ вместо x разность между каким-либо наблюдением из данной серии наблюдений и наименьшим значением из этой серии, а затем искать центр из условия максимума произведения полученных значений $f(x)$. Более точно

мы укажем ниже предлагаемое им построение. В начале работы он критикует выбор среднего арифметического из серий наблюдений, упоминая, что при этом обычно отбрасываются сильно отклоняющиеся наблюдения. Он пишет: «Я не вижу рубежа, по ту или иную сторону коего лежат наблюдения, совсем отбрасываемые, так что может случайно получиться, что отбрасываемое наблюдение как раз могло представить самую лучшую поправку из всех. Тем не менее я отнюдь не порицаю огулом совет отбрасывать то или иное наблюдение . . .». И далее мы читаем: «То, что собственно случается при наблюдении, это, в силу самой гипотезы, мы полностью игнорируем, но само наше это незнание окажется убежищем, прибегнуть к коему мы принуждены, раз мы придерживаемся того, что является не истиннейшим, но правдоподобнейшим, не вполне определенным, но вероятнейшим, как предлагает наша теория». Он указывает затем, что ценностью обладает лишь весь комплекс наблюдений.

Для кривой распределения (scala probabilitatum pro omnibus observationibus) он выставляет пять требований: симметричность, монотонное убывание ординат от центра кривой, касательная в центре параллельна оси X, равенство нулю ординат при достаточном удалении от центра и вертикальность касательной в той точке кривой, где эта последняя пересекается с осью X. В качестве одной из возможностей он предлагает полуокружность. Им дается ряд указаний, как из наблюдений определить радиус этой полуокружности, а затем он переходит к центральному вопросу работы — определению абсциссы центра. Пусть r — радиус полуокружности, A, $A+a$, $A+b$, $A+c$ и т. д. — результаты наблюдений, причем A — наименьшее из них. Расстояние x от центра до A предлагается находить из условия максимума произведения

$$\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{r^2-(x-a)^2}\cdot\sqrt{r^2-(x-b)^2}\cdot\sqrt{r^2-(x-c)^2}\ \ldots,$$

и $x+A$ считается наиболее вероятным значением наблюдаемой величины. Число множителей в указанном выражении

равно числу наблюдений. Указание на то, что A — наименьшее из результатов наблюдений, очевидно, не существенно.

При двух наблюдениях получается для x кубическое уравнение, имеющее корень $x=\frac{1}{2}a$, который Даниил Бернулли называет «полезным корнем». При трех наблюдениях получается уже уравнение пятой степени, которое имеет корень $x=\frac{a+b}{3}$, если сохранить в нем члены с наибольшей степенью r. Для корня этого уравнения дается и следующее приближение при большом r:

$$x=\frac{a+b}{3}+\frac{2a^3-3a^2b-3ab^2+2b^3}{27r^2}.$$

Непосредственно вслед за этой работой Даниила Бернулли напечатана работа Эйлера «Замечания к предыдущей работе». В ней Эйлер упрекает Даниила Бернулли в догматичности и указывает на то, что правило, предложенное Даниилом Бернулли, приводит к уравнениям высоких степеней. Вместо этого он предлагает, исходя в известном смысле из той же кривой распределения ошибок, другое правило, которое всегда приводит к кубическому для x уравнению. Пусть $A+a$, $A+в$, $A+c, \ldots$ — результаты наблюдений, и α, β, $\gamma, \ldots$ — величины, пропорциональные их вероятностям. Эйлер пишет обычное равенство

$$\alpha(x-a)+\beta(x-b)+\ldots=0$$

и предлагает подставлять в него

$$\alpha=r^2-(x-a)^2, \quad \beta=r^2-(x-b)^2 \text{ и т. д.},$$

что и приводит к кубическому уравнению для x.

В письме к Н. Фуссу от 18 марта 1778 г. Даниил Бернулли пишет по поводу указанной выше работы: «Для меня весьма лестно, что Академия сочла мой мемуар „Наиболее вероятное значение...“ достойным напечатания в новом томе своих „Комментариев“, которые сейчас печатаются; я особенно горд тем, что Эйлер имел в этом повод угостить публику мемуаром по тому же вопросу. Но я уверен в том, что этот великий аналист рассмотрел вопрос с совершенно иной точки зрения, чем я; мой

мемуар скорее метафизический, чем математический: этот ряд сомнений, хорошо или плохо рассмотренных, но которые, с моей точки зрения, заслуживают изучения со всем вниманием не предубежденными философами».

Определение полуокружности как кривой распределения случайных ошибок не удержалось в науке. Наиболее ценным в работе Даниила Бернулли является метод определения из наблюдений того значения x, при котором плотность вероятности — наибольшая. В этом отношении Даниила Бернулли надо считать первым, выдвинувшим знаменитый теперь метод максимального подобия — «maximum likelihood method» (см.: Г. Крамер. Математические методы статистики. 1948, стр. 541—549). Г. Крамер отмечает, что в частных случаях метод восходит к Гауссу, а в общем случае предложен Р. Фишером в 1912 г. Согласно этому методу, если мы имеем повторную (т. е. из независимых элементов) выборку $x_1, x_2, \ldots x_n$ с плотностью вероятности $f(x, \alpha)$, зависящей от измеряемого нами параметра α, то этот параметр надо определять из условия максимума произведения $f(x_1, \alpha) f(x_2, \alpha) \ldots f(x_n, \alpha)$. Выяснение некоторых замечательных свойств $f(x, \alpha)$ при таком выборе α является заслугой Р. Фишера. Даниил Бернулли первый применил этот метод для случая $f(x, \alpha) = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2}$. Этим указанием на роль Даниила Бернулли в истории метода максимального подобия я обязан Ю. В. Линнику.

12. Значительна роль, которую сыграл Даниил Бернулли в истории принципа сохранения энергии. Непосредственными его предшественниками в этом вопросе были Гюйгенс, Лейбниц и Иван Бернулли.

Лагранж в «Аналитической механике» пишет: «Даниил Бернулли распространил этот принцип и вывел из него законы движения жидкости в сосудах, вопрос, который рассматривался до него произвольно и неясно. Наконец, он сделал этот принцип весьма общим в своем берлинском мемуаре, показав его применение к движению тел, подверженных произвольным притяжениям и притягиваемых неподвижными центральными силами, пропорциональными любым функциям от расстояния».

Во введении к своей «Гидродинамике» Даниил Бернулли подробно выясняет роль принципа сохранения живых сил, сформулированного им для всей этой работы.

Рассмотрим его берлинский мемуар «Замечания о принципе сохранения живых сил, взятом в общем смысле», в котором он для задач, указанных выше в цитате из Лагранжа, пишет закон сохранения живых сил в той же форме, в которой он пишется и сейчас. В начале работы указывается, что обычный закон сохранения живых сил имеет место лишь в постоянном поле тяготения, но что при правильном подходе к вопросу он сохраняется и в поле тяготения, зависящем от положения точки. Основной прием, которым он пользуется для установления этого закона для упомянутых выше задач, формулируется следующим образом: «Пусть имеется несколько тел, образующих систему, так что никакое тело не может двигаться независимо от других. Если каждое тело находится под действием какого-либо переменного притяжения, то я утверждаю, что сохранение живых сил устанавливается следующим образом. Обозначим массы тел через m, m', ... и их скорости через v, v', ... и будем рассматривать затем каждое тело изолированным от системы и положим, что оно, подверженное притяжению, выходит из начальной точки и приходит в конечную точку, описывая какой угодно путь; легко определить скорость, которую должно будет иметь это тело, изолированное от системы». Эти скорости обозначаются через u, u', ... Далее пишется равенство

$$mv^2 + m'v'^2 + \ldots = mu^2 + m'u'^2 + \ldots,$$

которое, как указывается в работе, и выражает закон сохранения живых сил. Отметим, что коэффициент $\frac{1}{2}$ в выражении живой силы был введен только Кориолисом.

Приведем две задачи из работы Даниила Бернулли. Пусть E — притягивающий неподвижный центр и $\xi(r)$ — сила притяжения, A — начальное положение тела и C — его окончательное положение. Положим, что тело переходит из A в C

следующим образом: сначала вдоль прямой AE оно из A переходит в точку D, а затем по окружности с центром E переходит из D в C. Даниил Бернулли считает, что при движении по окружности скорость не меняется и пишет, учитывая лишь движение вдоль прямой AE, закон сохранения живых сил в виде

$$mv^2 = -2m\int \xi(r)\,dr,$$

причем упоминается, что добавлением постоянной надо учесть начальное положение и начальную живую силу, если не считать, что в начале был покой. В случае, если в начале был покой и $\xi(r) = \frac{b^2}{r^2}$, он пишет закон живых сил для нескольких точек, притягиваемых к неподвижному центру E, в виде

$$mv^2 + m'v'^2 + \ldots = 2m\left(\frac{b^2}{x} - \frac{b^2}{a}\right) + 2m'\left(\frac{b^2}{x'} - \frac{b^2}{a'}\right) + \ldots,$$

где a, a' ... — начальные расстояния точек от $\mathcal{E}$ и x, x' ... — конечные расстояния.

Переходим теперь к задаче взаимного притяжения двух тел. Сила взаимного притяжения считается Ньютоновой. Пусть a — расстояние между телами в начальном положении и x — в окончательном положении. Утверждается, что живая сила сохраняется при любом пути перехода от расстояния a до расстояния x, так что можно, например, считать одно тело неподвижным, а второе — приближающимся к нему по прямой от расстояния a до расстояния x. Таким образом, при начальном покое тел закон живых сил пишется в виде

$$mv^2 + M'v'^2 = \frac{2mM'}{\mu}\left(\frac{\rho^2}{x^2} - \frac{\rho^2}{a^2}\right),$$

где μ и ρ — некоторые постоянные. Этот закон формулируется и для n тел.

Далее отмечается, что указанное правило годится для любого закона притяжения, зависящего от расстояния, и что лишь для простоты взят закон Ньютона. Указывается также, что если в начальном состоянии был не покой, то надо добавить на-

чальную живую силу. «Мы видим, таким образом, что природа никогда не уклоняется от великого принципа сохранения живых сил; это именно я и хотел главным образом показать в этих исследованиях и в этих замечаниях», — пишет Даниил Бернулли.

Интересно его замечание по поводу включения произведения масс в закон всемирного тяготения. Он пишет: «Это предполагает, однако, что одно и то же количество материи обладает одним и тем же значением притяжения. Это не вполне очевидно во всей вселенной. Можно предположить, что интенсивность притяжения, как и инерция, Солнца иная, чем у планет. Если считать, что первая очень мала, а вторая очень велика у Солнца, по сравнению с планетами, то Солнце не меняло бы положения для различных конфигураций планет: может быть это более соответствовало бы наблюдениям, чем гипотеза Ньютона. При этом предположении надо было бы вводить лишние множители». Это указание на возможность различения инертной и тяготеющей массы очень интересно для того времени.

Лагранж характеризует указанную работу Даниила Бернулли следующими словами: «. . . работа, которая блистает методом исследования, изящным по форме и простым по результатам».

Отметим одно интересное обстоятельство, связанное с историей закона сохранения энергии. В Архиве Академии наук СССР имеется написанная рукой Даниила Бернулли бумага, которая носит заглавие: «Замечания по поводу поставленного в Англии опыта, относящегося к принципу живых сил». На полях этой бумаги имеется следующая запись: «Так как эти замечания сделаны только по поводу опыта, но такой опыт не был проделан, то печатание этого маленького сочинения было бы неуместным. Даниил Бернулли».

Приведем лишь начало упомянутой бумаги, которое характеризует отношение Даниила Бернулли к указанному принципу. «В недавно полученном мною письме мой отец описал мне один опыт, поставленный в Англии три года тому назад для опровержения взгляда Лейбница относительно сохранения живых

сил. Он сделал это не из-за важности этого вопроса (он не является столь существенным), но по случаю некоей гидравлической задачи, в которой (как я указывал раньше) необходимо, прежде чем приступить к вычислениям, надлежащим образом рассмотреть вопрос, позволяет ли природа вещи, чтобы в материи, из которой она состоит, сохранялись живые силы, или не позволяет; последнее, однако, ничего не говорило бы против абсолютного сохранения живых сил, так как часть их могла бы перейти в другую материю — доступную или недоступную чувствам, но не относящуюся к предположенной системе, — и в этой материи остаться».

Эта бумага относится ко времени прибывания Даниила Бернулли в Петербурге (1725—1732 гг.).

13. Прежде чем перейти к наиболее важному по значению и большому по объему циклу исследований Даниила Бернулли — по вопросам колебаний механических систем, мы коротко изложим его результаты по бесконечным рядам и, в частности, по тригонометрическим рядам. Эти результаты существенно связаны во многих отношениях с его знаменитыми работами о колебаниях струны и с его спором с Эйлером, Даламбером и Лагранжем об общности решения задачи колебания струны при помощи тригонометрического ряда — решения, впервые предложенного Даниилом Бернулли. Его исследования по рядам напечатаны в 16-м, 17-м и 18-м томах в «Новых Комментариях Петербургской Академии наук» за 1771, 1772 и 1773 гг. Укажем их основные идеи и результаты.

В первой из работ рассматриваются главным образом расходящиеся ряды и их суммирование. Даниил Бернулли видит разницу между сходящимися и расходящимися рядами, но не дает, конечно, точных определений. Характерно само название этой работы — «О суммированиях некоторых несообразных рядов, о их толковании и применении» («De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu»). Вся она — намеки на имеющуюся сейчас теорию суммирования расходящихся рядов.

Приведем ее начало: «Общим свойством рядов, главным образом рекуррентных, является то, что они, будучи продолжены до бесконечности, иногда показывают сумму, явно неверную in concreto, хотя вовсе не абсурдную in abstracto. В самом деле, только та сумма, которой нас учит анализ, опирается на некое достаточное основание, в силу которого она должна быть определена так, а не иначе. Это достаточное основание, поскольку заключается в истинной природе вопроса, не допускает, чтобы решение было неверным in abstracto; этим и объясняется то, что если мы применим различные способы решения, то мы всегда и постоянно получим одно и то же значение. Более того: если мы применим это парадоксальное решение, как промежуточное звено, для определения при помощи его других величин, значение которых не подвергается никакому сомнению, то определенное нами значение явно окажется правильным, — это будет совершенно так же, как в тех случаях, когда вещественные количества получаются при помощи мнимых количеств».

Разбирается простейший пример

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Частные суммы попеременно равны 1 или 0, что приводит автора к равенству $S = \frac{1}{2}$. То же равенство автор получает из разложения $\frac{1}{1+x}$ при $x = 1$ и из формулы $S = 1 - S$. Далее читаем: «То, что в сущности эта сумма не истинна и не ложна, во-первых, очевидно само по себе, а во-вторых, это ясно из того, что из ложного истинное никогда не может быть получено при правильных методах решения, а, как мы увидим из изложенного ниже, это может получиться».

Рассматривается далее еще ряд примеров. Среди них ряд $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots = \frac{1}{4}$ (тремя способами). В качестве примера вывода несомненного результата из сомнительного получается ряд для $\log 2$ при помощи почленного интегрирования разложения $\frac{1}{1+x}$. После рассмотрения примеров выдвигается общий метод

суммирования рядов методом среднего арифметического частных сумм. Именно, если члены ряда удовлетворяют при любом n и некотором p соотношению $a_{n+p}=a_n$, причем $a_0+a_1+\ldots+a_{p-1}=0$, то в качестве суммы ряда предлагается брать среднее арифметическое из частных сумм: a_0, a_0+a_1, $a_0+a_1+a_2\ldots+a_0+a_1+$ $+\ldots+a_{p-1}$. Этот метод формулируется следующим образом: «Если первый член периода будет a, сумма двух первых членов — b, сумма трех первых членов — c и т. д. до полного исчерпания всего периода и если n будет число членов, образующих период, то наш принцип дает сумму бесконечного рекуррентного ряда, равную $\frac{a+b+c+\ldots}{n}$, если только сумма любого целого периода будет предложена равной нулю и при суммировании ряда каким бы то ни было другим методом его сумма никогда не разойдется с этой величиной, даже если сумма окажется истинной лишь в несообразном виде (etriamsi summa non aliter quam incongruę vera) и ряд не будет допускать никакого приближения, как бы не возрастало число членов». Далее указывается, что к этому типу относятся ряды по синусам и косинусам кратных дуг при частных значениях дуги. Даниил Бернулли пишет: «...для меня мой принцип ясен сам по себе; я понимаю, что другие могут чувствовать иначе». Далее он пишет, что не может доказать принципа и потому считает необходимым подтвердить его примерами. В конце работы рассматриваются тригонометрические ряды. В частности «доказывается» формула

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots=\frac{\sin x}{2-2\cos x}. \tag{10}$$

При этом составляется уравнение в конечных разностях для трех последовательных членов ряда. Оно приводит к следующему выводу общего члена ряда:

$$\frac{(\cos x+i\sin x)^n-(\cos x-i\sin x)^n}{2i},$$

а затем используется формула для суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. Указывается, что при $x=0$ формула (10) приводит к неправильному результату. Вторая работа о рядах

посвящена рядам по синусам и косинусам кратных дуг. В качестве исходных формул берется формула (10) и формула

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots = -\frac{1}{2}, \qquad (11)$$

которая приводилась и в первой работе со ссылкой на Лагранжа. Интегрируя ряд (11), подставляя $x = \frac{\pi}{2}$ и пользуясь формулой Лейбница

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4},$$

Даниил Бернулли получает

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \ldots = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}. \qquad (12)$$

Весьма характерно указание на то, что эта формула верна лишь в промежутке от $x = 0$ до $x = 2\pi$ и что на дальнейших окружностях сумма ряда равна $(2n - 1)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x$. Говорится о скачке суммы ряда от $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ до $\frac{\pi}{2}$ при переходе через значение $x = 2\pi$ и указывается на возможность дальнейшего увеличения x. По этому поводу мы читаем: «... скачок имеет место не на дуге dx, но в одной чисто математической точке (transitus perficitur non in arculo dx, sed in unico puncto vere mathematico)». Дальнейшее интегрирование ряда (12) приводит Даниила Бернулли к формуле

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x - \ldots = \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{4} x^2 + C. \qquad (13)$$

Интересен способ, при помощи которого им определяется постоянная C. Он полагает $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \pi$. Последнее из полученных равенств он делит на четыре и сравнивает с первым. Таким образом, он приходит к уравнению

$$C + \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{C}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{4}, \text{ т. е. } C = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Устанавливается промежуток, в котором имеет место формула (13) при указанном значении C. Выводятся разложения и для

полиномов более высокой степени. В конце работы устанавливается связь разложений функций в тригонометрические ряды по синусам с задачей колебаний струны при закрепленных концах. Упоминается необходимость быстрого убывания коэффициентов в разложении

$$y = \alpha \sin x + \beta \sin 2x + \gamma \sin 3x + \dots$$

для того, чтобы получился результат, соответствующий физическим условиям задачи. Точных определений нет. Обращается внимание на то, что правая часть формулы (12) при $x = 0$ не равна нулю, и потому формула эта, по мнению автора, не может соответствовать упомянутой физической задаче. Далее указывается, что дальнейшие формулы дают решение задачи о колебании струны, когда начальное отклонение выражается полиномом от x. Из всего сказанного автор заключает следующее: «. . . в данном вопросе аналитические формулы, взятые абстрактно, могут быть верными в общем, и в то же время во многих частных случаях они могут вызывать противоречие с гипотезами физики».

Эта работа тесно связана со спором Даниила Бернулли с Эйлером о колебании струны. История вопроса о представлении функции тригонометрическим рядом изложена в известной работе Фурье «Теория движения тепла в твердых телах» и в работе Римана «О представлении функции тригонометрическим рядом».

Третья из указанных работ по рядам, напечатанная в 18-м томе «Новых Комментариев Петербургской Академии наук», непосредственно примыкает к первой. Она написана, как указывает Даниил Бернулли, в связи со статьей аббата Боссю (Bossut), напечатанной в 1769 г. в «Записках Парижской Академии наук». В этой последней работе выведены были между прочим формулы для конечной суммы синусов и косинусов кратных дуг. Даниил Бернулли вспоминает о своем методе суммирования рядов, который мы изложили выше, и затем пишет: «После того как в упомянутых моих работах я вывел и обстоятельно доказал, сколь несообразна (incongrua) сумма, хотя и найденная надлежащим путем и надежно подтвержденная мно-

гими методами, между собой весьма различными, после этого я вспомнил подлинное объяснение всей тайны, которую я некогда наблюдал, когда проживал в Петрополе, и, воспользовавшись этим случаем, подробнее развернул этот метафизический вопрос, по моему разумению недоказуемый чисто геометрическим путем. После же всего я напал на новые формулы Боссю, упомянутые в § 1 ... на меня напало желание исследовать, что же эти формулы укажут, если число членов будет взято бесконечным, так, чтобы Боссютово [решение] могло сойтись с моим».

Автор берет формулу Боссю

$$\sin q + \sin 2q + \ldots + \sin nq = \frac{\sin q\,[1 - \cos q - \cos nq - \cos (n+1)\,q]}{1 - \cos 2q},$$

подставляет $n = \infty$ и сравнивает со своей. Таким образом, он получает

$$\frac{\sin q\,[1 + \cos q - \cos \infty\, q - \cos (\infty + 1)\, q]}{1 - \cos 2q} = \frac{\sin q}{2\,(1 - \cos q)}\,. \qquad (14)$$

После этого он пишет: «Право же моя формула, стоящая справа, свободна от всякого кривотолка; Боссютова же загадка с первого взгляда кажется неразрешимой ...». Далее указывается на метод среднего арифметического из первой работы и делается попытка раскрыть смысл символа $\cos \infty\, q$ и показать совпадение обеих частей формулы (14). Но все эти рассуждения очень неясны. Наиболее ценным из всего материала является рассмотрение сумм некоторых тригонометрических рядов с указанием промежутков изменения x, для которых имеют место те или другие значения суммы ряда, и метод среднего арифметического.

Известно, что Эйлер значительно раньше Д. Бернулли поставил вопрос о смысле понятия суммы расходящегося ряда. Но его ответ, связанный в основном с разложением в степенной ряд, может привести к противоречиям. Как известно, определение Эйлера выражается следующим образом: «... сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд». Далее в письме к Гольдбаху (1745 г.) Эйлер писал: «... я же совершенно уверен, что никогда один и тот же ряд не может возникнуть из разложения двух

действительно различных конечных выражений». Это утверждение без соответствующих оговорок неверно. Но в некоторых высказываниях Эйлера о расходящихся рядах мы имеем общие идеи, далеко превосходящие состояние математики XVIII в. Историю вопроса о суммировании расходящихся рядов можно найти, например, в книге Г. Харди «Расходящиеся ряды» (Изд. иностр. литер., М., 1951).

14. Среди всех исследований Даниила Бернулли наибольшее значение в истории развития физико-математических наук имели наряду с «Гидродинамикой» его работы по колебаниям различных механических систем. Они появлялись в печати, начиная с его пребывания в Петербурге и до конца 70-х годов. Их результаты ценны в двух отношениях. С одной стороны, в этих работах разобран ряд конкретных задач, касающихся линейных колебаний механических систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы. С другой стороны, в них высказываются новые принципиально важные общие положения, касающиеся линейных колебаний: определение нормальных (синхронных) колебаний, утверждение о возможности получения любого колебания сложением нормальных колебаний (принцип суперпозиции) и рассмотрение случая бесконечного числа степеней свободы путем предельного перехода от случая конечного числа степеней свободы. Мы начнем с изложения его высказываний по общим вопросам, а затем перейдем к изложению результатов, касающихся решения конкретных задач.

При изложении общих высказываний Даниила Бернулли мы будем говорить и об одной конкретной задаче, а именно: о задаче малых колебаний натянутой струны, закрепленной на концах.

Еще Тейлор показал (в 1713 г.) существование бесчисленного множества простых колебаний такой струны. При начальной скорости, равной нулю, эти колебания имеют, как известно, вид

$$y_n = \cos\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{15}$$

где n — любое целое положительное число, l — длина струны и α — физическая постоянная, зависящая от линейной плотности и натяжения струны.

Даниил Бернулли утверждал, что, умножая выражения (15) на постоянные a_n и складывая, получим также решения задачи и что любое решение может быть построено таким образом.

При изложении общих результатов мы будем пользоваться главным образом работами «Размышления и разъяснения о новых колебаниях струн, изложенных в „Мемуарах Академии" в 1747—1748 гг.» и «О смешении различного вида простых изохронных колебаний, которые могут существовать в одной и той же системе тел» (оба мемуара в собраниях трудов Берлинской Академии за 1753 г.), а также его более поздней работой «Общие физико-математические рассуждения относительно принципа сосуществования простых колебаний, не нарушаемых в сложной системе» (Новые Комментарии СПб. Акад. наук, т. 19, 1774).

Противниками Даниила Бернулли были Даламбер, Эйлер и Лагранж. Все они, не отрицая принципа суперпозиции колебаний, утверждали, что полученное таким образом решение не является общим.

Даламбер написал общий вид решения задачи о колебаниях закрепленной на концах струны при помощи произвольных функций, имеющих период $2l$. Эйлер правильно поставил начальные условия и указал на возможность определения указанных произвольных функций по любым начальным условиям. Эти общие утверждения Эйлера вызвали возражения со стороны Даламбера. К точке зрения Эйлера примкнул Лагранж, который начинал тогда свою научную деятельность. Именно этот метод Даламбера—Эйлера противопоставлялся методу Даниила Бернулли, как более общий.

Работа Даламбера появилась в 1747 г., Эйлера — в 1748 г., а в 1753 г. вышли из печати указанные выше две работы Даниила Бернулли. Основное возражение против метода Даниила Бернулли сводилось к тому, что тригонометрическим рядом можно представлять лишь весьма ограниченный класс функций.

Так, например, Эйлер утверждал, что метод Даниила Бернулли не дает ответа на задачу, если начальное возмущение имеет место лишь на части струны. Даламбер для опровержения общности метода Даниила Бернулли давал пример начального отклонения струны в виде треугольника. Суть всех этих возражений сводилась к смешению понятия функции с понятием аналитического выражения. К этому присоединялся еще вопрос о роли разрывов непрерывности производных (пример Даламбера). У противников Даниила Бернулли не было мысли о возможности представления любой, в известном смысле, функции рядом синусов на отрезке, длина которого равна основному полупериоду. В этом отношении интересным является упомянутая выше работа Даниила Бернулли (1772 г.) по тригонометрическим рядам, где он дает разложение полиномов в тригонометрический ряд и указывает на необходимость ограничиваться определенным промежутком изменения независимого переменного. Следующей крупной датой в вопросе разложения функций в тригонометрические ряды была работа Фурье по теории тепла (1807 г.), о которой мы упоминали выше.

Мы не сможем найти, конечно, в работах Даниила Бернулли даже попыток строгого доказательства общности его метода. Для него наличие класса синхронных колебаний и возможность представления любого колебания в виде их суммы было некоим основным принципом, корни которого он относил к самой природе. В своем методе Даниил Бернулли совершенно правильно видел не только новый способ решения задач, связанных с линейными колебаниями, но и принципиально важное открытие качественной стороны в вопросе линейных колебаний. Кроме того, Даниил Бернулли неоднократно указывал на общность его метода по сравнению с методом Даламбера—Эйлера. Надо отметить, что пример колебания натянутой струны не был по существу выигрышным для Даниила Бернулли. Метод Даламбера—Эйлера не использует бесконечных рядов, и при заданных начальных условиях он дает решение задачи в известном смысле в конечном виде. Но круг задач, при реше-

нии которых этот метод применим с такой простотой, весьма ограничен, и Даниил Бернулли был вполне прав, когда подчеркивал общность своего метода по сравнению с методом Даламбера—Эйлера. Это уже имеет место для тел линейных размеров и тем более, как это мы знаем сейчас, для бо́льшего числа измерений. Отметим, что теоретическому исследованию применимости метода Даниила Бернулли, который сейчас называется обычно методом Фурье, посвящено большое количество работ. Они продолжают появляться до последнего времени.

Работа Д. Бернулли «Размышления и разъяснения о новых колебаниях струн. . .» начинается с изложения результатов Тейлора. Дальше идет выяснение понятия основного синхронного колебания струны и утверждение о том, что решения Тейлора дают все колебания этого рода и что произвольное колебание есть сумма таких колебаний. Отмечается, что в работах Даламбера и Эйлера не получено никаких новых колебаний, которые не могли бы быть построены указанным выше методом. В работе указывается на то, что сложение нескольких простых изохронных колебаний приводит к периодическому колебанию с периодом, равным наибольшему из периодов, соответствующих отдельным слагаемым, и разъясняется, что все же такие колебания не являются простыми синхронными колебаниями. Говорится также, что если коэффициент при упомянутом выше слагаемом с наибольшим периодом обращается в нуль, то период, или, что то же, длина синхронного маятника, внезапно меняет свою величину. В конце работы Д. Бернулли пишет: «Я надеюсь, что сказанное мною в этом мемуаре может пролить больше света на природу новых колебаний струны, найденных с такой проницательностью Даламбером и Эйлером; и в этом была вся моя цель. Если метод, которым они пользовались для решения их проблем гораздо более сложен, чем мой, то я могу лишь удивляться превосходству их таланта. Что же касается вопроса о том, являются ли новые колебания действительно простыми и синхронными колебаниями для всех точек или они только смесь нескольких различных колебаний, сосуществующих в одной и той же струне и различных по про-

должительности, то я говорил об этом для того, чтобы лучше объяснить природу этих колебаний, будучи далек от спора со столь великими людьми о значении некоторых выражений».

В одном из последних писем к Эйлеру, от 7 октября 1753 г., Даниил Бернулли упоминает о том, что его мемуар «может осветить все, что этот вопрос имеет трудного, и в некотором роде мистического, и сделать этот вопрос очень простым». В письме к Эйлеру, которое не имеет даты, Даниил Бернулли возвращается к спору о струне, утверждает, что его методом можно решить задачу Эйлера: дана какая угодно начальная фигура, найти последующее движение, а затем пишет следующее: «Но не в этого рода абстрактных вопросах, как я утверждаю, моя новая теория может быть полезной. Я больше удивляюсь тому сокровищу, которое было скрыто, а именно возможности привести движения, которые существуют в природе и которые, как кажется, не подчиняются никакому закону, к простым изохронным движениям, которыми природа пользуется в большинстве своих действий». В этот период времени закончилась переписка между Даниилом Бернулли и Эйлером.

К вопросу о колебаниях струны Даниил Бернулли вернулся в письме к Н. Фуссу уже в 70-х годах. Он пишет: «Эскиз, который Вы мне сделали из метода Эйлера, доставил мне удовольствие, но он ни в чем не изменил моих идей об этом предмете. Я убежден в том, что мой метод дает in abstracto все возможные случаи. Но я признаюсь, что, с известных точек зрения, метод Эйлера значительно предпочтительнее моего; но имеются другие точки зрения для противного суждения, так как мой метод может быть применен к произвольному числу конечных тел, даже в тех случаях, когда нет полного возвращения к прежнему положению или периоду». В последних словах Даниил Бернулли указывает, что в задачах, которые он рассматривал своим методом, он встречал случаи отсутствия периодичности во времени.

Чрезвычайно интересным по общим идеям является его второй мемуар 1753 г. «О смешении различного вида простых колебаний. . .». Подробно рассматриваются колебания нескольких грузов, связан-

ных с невесомой натянутой нитью. Далее Даниил Бернулли пишет: «То, что я только что сказал о природе колебаний тел, связанных натянутой нитью, я не боюсь распространить на все малые обратные движения (petits mouvements réciproques), которые могут происходить в природе, если только эти малые обратные движения поддерживаются перманентной причиной. Всякое тело, которое немного отклоняют от его точки покоя, стремится к этой точке с силою, пропорциональной малому расстоянию от точки покоя; если взять при этом систему каких-нибудь тел, то каждое тело может совершать столько простых регулярных колебаний, сколько имеется тел в системе, и далее все эти простые колебания могут существовать одновременно в рассматриваемой системе». Далее указывается на то, что эти простые колебания не влияют друг на друга, и указываются аналогии из оптики и акустики: «Это рассмотрение окажет нам большую помощь для того, чтобы понять, как может произойти, чтобы бесчисленное множество лучей проходило через малое отверстие и пересекалось в темной комнате, не возмущая друг друга. Масса световой материи есть система, составленная из бесчисленного множества частей или шариков (globule), и каждый шарик может одновременно совершать бесчисленное множество простых и изотропных регулярных колебаний, причем эти колебания не спутываются и не возмущают друг друга». В конце этого параграфа Даниил Бернулли пишет: «Эта идея кажется мне весьма удобной для объяснения различных преломляемостей, различных скоростей и всех других явлений, указанных Ньютоном в отношении примитивных цветов». Далее Даниил Бернулли приводит в качестве примеров колебания грузов, связанных с подвешенной невесомой нитью, и колебания подвешенного каната. Эти последние задачи были им рассмотрены в VI и VII томах «Комментариев Петербургской Академии наук». Мы подробнее скажем об этом ниже. В конце работы указывается, что все задачи рассматривались в предположении, что начальная скорость равна нулю. Автор говорит, что можно было бы считать ее и отличной от нуля, но это кажется ему «слишком абстрактным».

В более поздней работе «Общее физико-математическое рассуждение...» в сжатой форме повторяются прежние общие утверждения о главных синхронных колебаниях и их суперпозиции. Утверждается между прочим, что принципам во всяком случае удовлетворяют колебания струны, которые сколько угодно мало отличаются от любого реального колебания, и далее следуют несколько туманные рассуждения, связанные с понятием бесконечности. Указывается, что и сами колебания должны считаться бесконечно малыми. Предлагается задача о колебаниях неравномерно толстой струны, «чтобы посмотреть, какой же именно из наших методов сможет принести наиболее обильный урожай». Далее теория поясняется примером из акустики (колебания звучащей струны) и подробно описываются явления, происходящие при звучании стальных пластин, подвешанных на нитке. Автор указывает, что им и Эйлером была дана соответствующая теория и что к этой теории он добавил много экспериментов и «пошел по тому пути, который проложил Ньютон в своей золотой теории цветов». Далее описываются различные явления, связанные с исключением некоторых тонов при помощи зажима пластинки в определенных местах. Упоминается также об опытах с духовыми инструментами. После приведения еще ряда примеров Даниил Бернулли пишет: «Но скучно долее рассуждать о предмете, слишком самоочевидном». В конце работы упоминаются результаты из VI и VII томов «Комментариев Петербургской Академии наук» о колебаниях каната и грузов, связанных с подвешенной нитью, а также формулируется периодичность всякого колебания однородной натянутой струны.

В том же томе «Мемуаров Берлинской Академии наук» (1753 г.), где были напечатаны две указанные выше работы Даниила Бернулли, была помещена и работа Эйлера «Замечания о предыдущих мемуарах Бернулли». В ней Эйлер ставит и решает задачу колебания струны при любых начальных условиях и возражает против утверждения об общности решения Даниила Бернулли. Эйлер признает принцип суперпозиции решения, указывает на его применимость к любым решениям и на то, что он основан на линей-

ности и однородности уравнения. Возражение Эйлера против общности решения Даниила Бернулли, как мы уже говорили раньше, неправильны. Так, например, он утверждает, что начальное отклонение струны, изображаемое уравнением

$$a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots,$$

должно в силу написанной формулы определиться нечетной функцией, причем не учитывается, что отклонение определено лишь на промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$. Но в связи с этим интересно отметить, что в «Institutiones Calculi Differentialis» Эйлера (1755 г.) впервые были получены формулы, дающие разложения некоторых полиномов в тригонометрические ряды.

Отметим еще одну работу Даниила Бернулли, опубликованную в «Новых Комментариях Петербургской Академии наук» (1774 г.). Она называется «Специальное физико-механическое рассуждение о сложных взаимных движениях, многообразных и доныне не обследованных, каковые легко могут быть наблюдаемы в двучленных маятниках в подтверждение его (т. е. автора) принципа о сосуществовании простых колебаний». Главная часть работы посвящена качественному исследованию колебания двучленного маятника с одинаковыми звеньями. Показано, каким образом теория может быть подтверждена опытом. Общая теория двучленного маятника была изложена в работе из VII тома «Комментариев». О ней мы будем говорить ниже. В конце работы приводится явление, наблюденное Даниилом Бернулли при качании весов. Приведем цитату по этому поводу: «Когда я однажды совершенно случайно у больших и медленных (subpigra) весов отвел в сторону одну из чашек и тотчас же ее отпустил обратно, то оказалось, что незамедлительно вследствие этого она стала колебаться, тогда как первоначально противоположная чашка не сдвигалась с места; но тут сразу же и она пришла в движение и стала производить понемногу все большие качания, в то время как первая чашка, наоборот, постепенно теряла свое качательное движение и, наконец, почти успокоилась; в этот самый момент вторая чашка достигла наивысшей степени движения, почти равной первоначальной

степени движения смежной чашки; затем в обратном порядке эти перемены повторялись до тех пор, пока первая чашка полностью лишилась своего первоначального движения и смежная вернулась к моменту покоя; это сообщение [друг другу] и возвращение качаний наблюдались достаточно долго». Теория этого явления не дается и указывается на трудность такой теории. Непосредственно после этой работы Даниила Бернулли появились две работы Эйлера, в которых была сделана первая попытка теоретического рассмотрения указанного выше явления колебания весов. Обширная литература по динамике весов дана в статье Ю. А. Круткова. «О динамике весов. Малые колебания простых рычажных весов» (Известия Академии наук СССР, 1933). В этой статье выводятся уравнения колебаний чашек и рычага и производится их исследование.

Основной заслугой Даниила Бернулли в указанном цикле работ о собственных линейных колебаниях различного ряда механических систем было выделение главных колебаний и выяснение основной роли принципа их суперпозиции.

15. Мы переходим теперь к изложению некоторых, наиболее важных работ Даниила Бернулли, посвященных конкретным задачам колебаний. Начнем с работ, напечатанных в VI и VII (1733 и 1735 гг.) томах «Комментариев Петербургской Академии наук», о которых мы уже несколько раз упоминали выше. В них рассматриваются малые колебания грузов, связанных с подвешенной невесомой гибкой нитью, и, в предельном случае, малые колебания однородного весомого подвешенного каната. Для определения главных колебаний автор пишет уравнения, выражающие пропорциональность сил, действующих на грузы и расчитанных на единицу массы, и малых отклонений этих грузов от вертикальной прямой, которая является положением равновесия. Это дает ему возможность написать алгебраическое уравнение для определения периода колебаний, или, что то же, длины соответствующего синхронного маятника, а также определить отношение амплитуд колебаний грузов для каждого корня упомянутого уравнения. Подробно рассмотрены случаи двух и трех грузов.

Пусть имеется n грузов; $m_1, m_2 \ldots m_n$ — их массы, причем грузы нумеруются сверху вниз, и $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ — синусы углов (или самые углы), образованные первым звеном с вертикальной осью, вторым звеном с первым и т. д. Устанавливается, что горизонтальные составляющие сил, действующих на грузы и рассчитанные на единицу массы, выражаются следующим образом («ускоряющие силы» — по терминологии Даниила Бернулли):

$$\alpha_1 - \frac{m_2+m_3+\ldots+m_n}{m_1}\alpha_2, \quad \alpha_1+\alpha_2-\frac{m_3+m_4+\ldots+m_n}{m_2}\alpha_3, \ldots,$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}-\frac{m_n}{m_{n-1}}\alpha_n, \quad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n.$$

Считая, что число грузов соответственным образом беспредельно увеличивается, Даниил Бернулли пишет формулу для силы, действующей на элемент ds весомого однородного каната:

$$\int d\frac{dy}{ds} - \frac{(l-s)\,ddy}{ds^2},$$

где l — длина всего каната, s — длина его дуги, отсчитываемая от точки подвеса, и y — отклонение точек каната от вертикального положения равновесия. Для нахождения главных колебаний указанное выражение приравнивается величине, пропорциональной y, и пишется уравнение:

$$\frac{dy}{ds} - \frac{(l-s)\,ddy}{ds^2} = \frac{1}{n}y,$$

причем произвольная постоянная не добавляется, так как здесь ничего не надо добавлять (quia hic nulla sumenda est). Вводятся обозначения $l - s = x$; таким образом, получается уравнение

$$-\frac{dy}{dx} - \frac{xd_2y}{dx^2} = \frac{y}{n}. \qquad (16)$$

Множитель $\frac{1}{n}$, стоящий справа, равен квадрату частоты колебания, деленному на ускорение силы тяжести, т. е. есть длина

соответствующего изохронного маятника. Уравнение (16) Даниил Бернулли интегрирует с помощью ряда и получает

$$y = 1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{4n^2} - \frac{x^3}{4 \cdot 9n^3} + \frac{x^4}{4 \cdot 9 \cdot 16n^4} - \dots \qquad (17)$$

При современных обозначениях написанный ряд выражается через Бесселеву функцию $J_0(x)$

$$y = J_0\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right).$$

Возможные значения величины n Даниил Бернулли определяет из условия закрепления каната

$$1 - \frac{l}{n} + \frac{l^2}{4n^2} - \frac{l^3}{4 \cdot 9n^3} + \frac{l^4}{4 \cdot 9 \cdot 25n^4} - \dots = 0 \qquad (18)$$

и утверждает существование бесчисленного множества корней. Выражение (17) с точностью до произвольного постоянного множителя дает, как известно, распределение амплитуд колебания вдоль каната.

16. Переходим к работам Даниила Бернулли о колебаниях стержней. Предварительно укажем на его идеи, касающиеся вопроса об упругих кривых. Этому вопросу посвящено специальное добавление в знаменитой книге Эйлера «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума...» (1744 г.). В этом добавлении Эйлер пишет: «...достославный и остроумнейший в этой возвышенной области исследований природы Даниил Бернулли сообщил мне, что он может представить всю силу, заключающуюся в изогнутой упругой пластинке, одной формулой, которую он называет потенциальной силой, и что это выражение для упругой кривой должно быть наименьшим...». И далее: «Пусть AB представляет собой упругую пластинку, как-нибудь изогнутую; назовем дугу AM через s и радиус соприкасающегося круга кривой MR через R; тогда, согласно определению Бернулли, потенциальная сила, заключенная в части пластинки AM, будет выражаться формулой

$$\int \frac{ds}{R^2},$$

если только пластинка будет повсюду одинаково толстая, широкая и упругая и в естественном состоянии будет вытянута прямолинейно».

Об этом Даниил Бернулли пишет в нескольких своих письмах к Эйлеру, первое из которых относится к 7 марта 1739 г., а второе — к 28 января 1741 г. В письме от 20 октября 1742 г. он пишет, что пришел, таким образом, к дифференциальному уравнению четвертого порядка. В одном из следующих писем Даниил Бернулли указывает на простое обобщение своего принципа на случай неоднородной упругой кривой и на возможность обобщения на случай кривой, которая в естественном состоянии не прямолинейна. В этом же письме указывается на трудность обобщения указанного принципа, если учитывать силу тяжести упругой кривой. Эти случаи были рассмотрены Эйлером в упомянутом выше добавлении. Эйлер пользовался уравнением, составленным Яковым Бернулли, которое выражает тот факт, что сопротивление изгибу выражается парой с моментом, пропорциональным кривизне.

Колебаниями стержней почти одновременно занимались Даниил Бернулли и Эйлер. Исследования Эйлера были напечатаны в указанном уже выше добавлении (1744 г.), а работы Даниила Бернулли — в «Комментариях Петербургской Академии наук», изданных в 1751 г. Работы эти помечены 1741—1743 гг. Они носят следующие названия: «Физико-геометрическое рассуждение о колебаниях и звучании упругих стержней» и «Механико-геометрические исследования о многообразных звуках, различным образом издаваемых упругими стержнями, иллюстрированные и подкрепленные акустическими опытами». В литературе XVIII столетия применялся термин «lamina», который мы перевели словом «стержень». При переводе книги Эйлера был применен термин «пластинка», который и вошел в приведенные нами выше цитаты из книги Эйлера.

В начале первого мемуара Даниил Бернулли пишет: «Наша тема преизобилует множеством преизящнейших вопросов; поскольку же один и тот же метод достаточен для них всех, я не считаю нужным излагать их все по отдельности. Чрезмерная длина

проблем, которую столь любят многие, чаще всего немало умаляет изящество доказательств и отнюдь не прибавляет веса существу дела — притом не без того, чтобы нанести налет чего-то несколько смехотворного... ради этого, я буду рассматривать стержни, расположенные горизонтально и колеблемые единственно собственной упругостью; эти допущения я устанавливаю с единственной целью упрощения расчета, ибо метод отнюдь не отказал бы и при более запутанной постановке вопросов».

Рассматриваются гармонические колебания стержня. Упругая сила считается пропорциональной удалению элемента от положения равновесия, и, применяя упомянутое выше уравнение Якова Бернулли, причем кривизна отождествляется с производной второго порядка, автор получает уравнение, содержащее двойную квадратуру. Дифференцируя это уравнение он приходит к хорошо известному сейчас уравнению четвертого порядка, которое пишется им в следующем виде:

$$y^{(\mathrm{IV})} = \frac{1}{f^4} y, \tag{19}$$

где f — некоторая постоянная, зависящая от упругости, стержня.

Говоря о необходимости интегрирования этого уравнения Даниил Бернулли пишет: «У меня есть двоякий способ осуществить это приведение: либо посредством рядов — каковой способ я, пожалуй, предпочитаю ради удобств расчета, либо чисто геометрически — каковой способ состоит в абсолютной интеграции. Это последнее приведение я даже не намеревался пытаться произвести, если бы прежде не узнал от проницательнейшего Эйлера, что он им владеет. Привожу и тот и другой способ, так как каждый из них имеет свои выгоды».

Таким образом, Даниил Бернулли пишет общее решение уравнения (19) и в виде степенных рядов и в конечном виде. Вообще во многих работах он пользуется бесконечными рядами для интегрирования уравнения. Дальше мы приведем в связи с другой работой Даниила Бернулли пример, когда он пользуется бесконечным степенным рядом для построения решения в конечном виде.

Написав общее решение уравнения (19) через элементарные функции, Даниил Бернулли рассматривает ряд задач при различных предельных условиях на концах: заделанный, опертый и свободный конец. Это приводит в каждой задаче к соответствующему уравнению для определения частот колебаний. Исследуются эти уравнения, а также вопрос о положении узловых точек. В работах описываются опыты, результаты которых сопоставлялись с формулами, полученными теоретическим путем. Указывается, что эти опыты дают значение упругой постоянной, входящей в коэффициент f. Даниил Бернулли пишет, что он пользовался тонкими, весьма длинными стержнями, у которых он мог определять число колебаний за данное время. Во второй работе он пишет, что будет говорить лишь о столь быстрых колебаниях, которые могут различаться только на слух, «ибо отсюда исходит большая польза, и немного усовершенствуется часть физики, именуемая акустикой». Указывается, что удавалось различать три или четыре одновременно звучащих тона.

Переходим теперь к одноразмерной задаче малых колебаний воздуха в трубе. Первоначальная теория была почти одновременно построена Даниилом Бернулли, Эйлером и Лагранжем. Соответствующая, большая по объему работа Даниила Бернулли «Физические, механические и аналитические исследования о звуке и тонах органных труб, различным образом построенных» была напечатана Парижской Академией наук (1762—1764 гг.).

Изложим результаты этой работы в том порядке, в котором они следуют в самой работе. План работы намечен в самом ее начале. Предполагается сначала исследовать, каким образом происходят колебания воздуха в трубах, затем изложить механические основы движения частиц воздуха и, наконец, привести все к вычислениям, дающим возможность определять периоды колебаний частиц воздуха, т. е. тоны, которые может издавать труба при тех или иных условиях. Указывается, что Лагранж только что опубликовал работу о духовых инструментах (Miscellanea Taurinensia, т. II), в которой он описывает колебания воздуха совершенно таким же образом, как и Даниил Бернулли.

В работе Даниила Бернулли изучаются колебания воздуха в цилиндрических трубах и связанные с этими колебаниями сгущения и разрежения при различных условиях на концах (открытый или закрытый конец), причем сначала описание относится к основному тону трубы. Исследуется зависимость этого тона от того, будет ли труба закрытой с двух концов, полуоткрытой или открытой с обоих концов. Далее указывается на возможность существования различных тонов у одной и той же трубы. Механизм образования этих тонов объясняется подразделением трубы на равные части, причем каждая часть считается как бы отдельной трубой, издающей основной тон. Все тоны, издаваемые упомянутыми частями, должны быть одинаковыми. Особое внимание уделяется тем частям, которые примыкают к концам трубы. Указывается на эксперименты, которые были произведены для подтверждения построенной теории. Получение различных тонов достигалось изменением мундштука трубы. В специальной ссылке Даниил Бернулли указывает, что теория была им построена до производства эксперимента. Приводится далее аналогия между явлением колебания воздуха в трубе и колебанием струны. Указывается на возможность сосуществования нескольких тонов и возобновляется прежний спор с упоминаниями о работе в Берлинской Академии, о которой мы говорили выше.

Изложенная часть работы, которую автор называет физическим исследованием, не содержит никаких формул. Далее автор переходит, как он сам говорит, к механическим исследованиям и аналитическому решению задачи. В предположении, что упругость воздуха пропорциональна его плотности, составляется следующее дифференциальное уравнение основных синхронных колебаний воздуха в цилиндрической трубе:

$$-\frac{d_2\alpha}{dx^2}P=\frac{\alpha}{r}, \tag{20}$$

где $\alpha(x)$ — кривая амплитуд для отклонений поперечного слоя, имеющего абсциссу x в естественном положении, P — постоянная, зависящая от упругости воздуха в естественном состоянии, и r — постоянная (длина синхронного маятника).

Это уравнение приводится к виду

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 = \frac{c^2-\alpha^2}{Pr},$$

где c — некоторая постоянная, откуда получается

$$\arcsin\frac{\alpha}{c} = \frac{x}{\sqrt{Pr}}, \tag{21}$$

причем считается, что конец трубы $x=0$ закрыт. Если закрыт и конец $x=L$, то $\alpha=0$ при $x=L$; для r получается формула

$$r = \frac{L^2}{Pn^2\pi^2}. \tag{22}$$

Если d — плотность воздуха в естественном состоянии, D — плотность ртути и A — показание барометра, то

$$P = \frac{DA}{d},$$

и тогда формула (22) записывается в виде

$$r = \frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\frac{d}{D}\cdot\frac{L}{A}\cdot L.$$

Путем естественных рассуждений получается формула для уменьшения плотности

$$\delta = \frac{c\cos\frac{x}{\sqrt{Pr}}}{\sqrt{Pr}}\,d. \tag{23}$$

Далее эта формула пишется только при $n=1$. Это оправдывается тем, что расстояние между двумя соседними узловыми точками трубы, где $\alpha=0$, можно принять за полную длину L закрытой трубы:

$$\delta = \frac{\pi c d}{L}\cos\frac{\pi x}{L}. \tag{24}$$

Исходя из результата для закрытой трубы, Даниил Бернулли получает аналогичные результаты для полуоткрытой и открытой трубы. Так, например, замечая что формула (24) дает $\delta=0$ при $x=\frac{L}{2}$, автор утверждает, что основной тон полуоткрытой трубы

будет таким же, что и у закрытой трубы, удвоенной длины и т. д. Относящиеся сюда результаты были указаны еще в первой части работы. Изложение теории для цилиндрических труб заканчивается некоторыми замечаниями. Указывается на влияние температуры на тон, т. е. на величину r, и приводятся эксперименты, которые должны были выяснить влияние на тон того факта, что конец трубы открыт не полностью, а также эксперименты, подтверждающие построенную теорию. Далее рассматривается цилиндрическая труба, состоящая из двух частей различного по площади сечения, но с одной и той же осью (les tuyaux à cheminée). Пусть ABC — составная труба, L — длина колена AB, l — то же для BC; пусть отношение площади поперечного сечения колена BC к площади колена AB равно $\frac{1}{n}$. Составная труба считается закрытой на конце A и открытой на конце C. Рассматривается лишь основной тон составной трубы и считается, что можно рассматривать трубы AB и BC отдельно с условиями сопряжения в B, которые сейчас будут указаны.

Даниил Бернулли говорит, что он пренебрегает той частью воздуха, которая переходит из одного колена в другое, считая эту часть малой по сравнению со всем воздухом, находящимся в составной трубе AC. Обозначая через λ длину полуоткрытой трубы, имеющей тот же основной тон, что и составная труба AC, и обозначая через c амплитуду колебания на конце C или на открытом конце фиктивной трубы длины λ, он получает, на основании сказанного выше, для амплитуды в точке, отстоящей от открытого конца на расстоянии l, величину

$$C \sin \frac{\pi(\lambda - l)}{2\lambda}. \tag{25}$$

Эту же величину он принимает и для крайнего сечения B трубы BC. При этом для того же сечения трубы AB, ввиду разности площадей сечений, он получает величину

$$\frac{c}{n^2} \sin \frac{\pi(\lambda - l)}{2\lambda}. \tag{26}$$

Отсюда он, как и выше, получает следующее выражение для амплитуды плотности в сечении B трубы BC:

$$d + \frac{\pi c d}{2\lambda} \cos \frac{\pi(\lambda - l)}{2\lambda}. \tag{27}$$

Учитывая величину (25) смещения сечения B трубы AB, автор получает амплитуду плотности в этом сечении для трубы AB. Ставя условие непрерывности плотности, при переходе через сечение B, он получает уравнение для определения λ:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi l}{2\lambda} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi L}{2\lambda} = \frac{1}{n^2}. \tag{28}$$

Далее приводятся результаты экспериментов, а также рассматривается тот случай, когда конец A составной трубы AC открыт.

В конце работы рассматриваются трубы переменного сечения. Пусть $\xi(x)$ — площадь сечения с абсциссой x. Указывается, что если рассматривать не dx, а ξdx как постоянную, то уравнение (20) может быть записано в виде

$$-\frac{d_2(\alpha\xi)P}{dx^2} = \frac{\alpha\xi}{r}.$$

Далее автор пишет: «. . . если сначала не предполагается постоянство чего бы то ни было, то приходим к следующему уравнению»:

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\xi} \cdot \frac{d(\alpha\xi)}{dx}\right] = \frac{\alpha}{Pr}. \tag{29}$$

Это уравнение может быть непосредственно получено, если предположить, что имеется одноразмерное малое колебание газа, и учесть закон неизменности масс при движении элементарного объема.

Поскольку удалось построить уравнение для основных синхронных колебаний, автор говорит: «. . .в этой проблеме не хватает не теории, а анализа, необходимого для интегрирования». Указывая на то, что звуковые лучи, исходящие из какой-либо точки, образуют конический пучок, Даниил Бернулли интегрирует

уравнение (29) для полной конической трубы и, как он пишет, «к счастью в этом случае уравнение делается интегрируемым». Он полагает

$$\xi(x) = \frac{x^2}{l^2} c,$$

причем x отсчитывается от вершины конуса, через l обозначена длина конической трубы и c — площадь сечения на ее конце. Уравнение (29) интегрируется Даниилом Бернулли при помощи степенного ряда, который затем суммируется. Окончательный ответ получается в виде

$$\alpha = \frac{3f(Pr)^{1/2} \sin \frac{x}{\sqrt{Pr}} - 3fPrx \cos \frac{x}{\sqrt{Pr}}}{x^2}, \tag{30}$$

где f — произвольная постоянная.

Указывается на возможность различных типов синхронных колебаний в конической трубе. При этом узлы определяются обычным условием $\alpha = 0$, а пучности (vetres), т. е. те точки, в которых сохраняются неизменной плотность, —условием $d(\xi\alpha) = 0$, т. е. $d(x^2\alpha) = 0$, что в силу (30) равносильно $x \sin \frac{x}{\sqrt{Pr}} = 0$, и r определяется из того условия, что $\sin \frac{l}{\sqrt{Pr}} = 0$ (конец $x = l$ открыт), т. е.

$$r = \frac{l^2}{n^2 \pi^2 P}. \tag{31}$$

Приводится вычисление корней уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{Pr}} = \frac{x}{\sqrt{Pr}},$$

из которого определяются узлы.

Указывается, что формула (31) для длины r изохронного маятника годится и для основного тона усеченного конуса, открытого с обоих концов, с высотой $\frac{l}{n}$, причем n не должно быть целым числом.

В конце работы определяется скорость звука как отношение расстояния между двумя пучностями к периоду колебаний. Указывается на то, что скорость не зависит от целого числа n, совпадает с тем значением, которое было получено Ньютоном из других соображений, и оказывается одинаковой для цилиндрических и конических труб. Отмечается, что полученная указанным методом скорость звука меньше той, которую дает эксперимент. Как известно, при малых колебаниях сжимаемого газа скорость распространения фронта волны равна $\sqrt{\varphi'(\rho)}$, где $p=\varphi(\rho)$ — зависимость между давлением и плотностью. Даниил Бернулли принимает прямую пропорциональность между p и ρ, отчего и получает слишком малое значение скорости звука. Кроме того, из его рассуждений видно, что он определяет фазовую скорость синусоидальной волны, которая совпадает в рассматриваемом случае со скоростью фронта. В самом конце работы обращается внимание на значение амплитуды α в пучностях. При этом $\sin\frac{x}{\sqrt{Pr}}=0$, и формула (30) даст

$$\alpha=\pm\frac{3fPr}{x},$$

т. е. амплитуда в пучностях обратно пропорциональна первой степени расстояния от вершины конуса.

18. Непосредственную связь с исследованием колебаний воздуха в составной трубе с двумя различными цилиндрическими частями мы находим в более поздней работе «О колебаниях струн, состоящих из двух частей неравных между собой как по длине, так и по толщине» (Новые Комментарии Петербургской Академии, т. XVI, 1771). Она начинается со следующих слов: «Вслед за обильной жатвой, собранной различными перворазрядными геометрами в области малых дрожательных изохронных движений, от которых зависит вся акустика, а, пожалуй, и сама оптика, и мне не страшно, в порядке набирания колосков после жатвы, добавить кое-что, прежде незатронутое, пусть даже оно покажется более легковесным».

Составная струна считается закрепленной на концах. Длина одного участка струны обозначается через λ и другого через λ', линейные плотности этих участков через p и p'. Натяжение вдоль всей струны считается одинаковым. Считается, что каждый участок струны является частью струны, закрепленной в концах и совершающей основное колебание без узлов. Длины этих фиктивных струн обозначаются через $2L$ и $2L'$. При этом автор пишет следующее условие совпадения периодов колебаний этих струн: $p^2L^2 = p'^2L'^2$. Далее ставится условие совпадения касательных в точке соединения двух участков струны для тех синусоид, которые дают закон амплитуд вдоль упомянутых фиктивных струн. Приравнивая между собой подкасательные для общих синусоид, автор получает равенство

$$-L\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\lambda}{2L} = L'\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\lambda'}{2L'},$$

и, пользуясь равенством $p^2L^2 = p'^2L'^2$, приходит к уравнению для определения L:

$$-\frac{\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi\lambda}{2L}}{\sqrt{p}} = \frac{\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi\lambda'\sqrt{p'}}{2L\sqrt{p}}}{\sqrt{p'}}. \tag{32}$$

Имея L, можно получить период колебания согласно формуле $T = \frac{4L}{a}$, где $a = \sqrt{\frac{K}{p}}$ и K — натяжение. Указанный путь решения задачи совпадает, конечно, с тем, которым пользуются и сейчас. Только этот прием сейчас начинают с обычного разделения переменных для обоих участков струны. В начале работы Даниил Бернулли рассматривает сначала частный случай $p' = 0$ (один участок нити считается невесомым). Получив общее решение, он возвращается к этому частному случаю и из общего уравнения (32) получает соответствующее уравнение для этого частного случая:

$$\lambda' = -\frac{2L}{\pi}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\lambda}{2L}. \tag{33}$$

При рассмотрении этого последнего уравнения Даниил Бернулли пишет: «. . .искомая длина L может быть приближенно

найдена путем подбора, вслед за чем существуют различные методы, с помощью коих эта длина может определяться с любой степенью точности». При $\lambda' = \lambda$ он дает приближенное решение уравнения в виде

$$L = \frac{(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} + 1}{(2n-1)^3 \frac{\pi^2}{4} + 2(2n-1)} \lambda.$$

Указывается, что примененный метод не годится для струн очень малой длины.

При изложении научной деятельности Даниила Бернулли мы не касались его знаменитой «Гидродинамики», поскольку в настоящей книге напечатан ее полный текст с комментариями.

Большую помощь при чтении латинских текстов мне оказал В. С. Люблинский, за что я ему очень благодарен.

Выше мы привели перевод написанной на латинском языке автобиографии Даниила Бернулли, которая находится в Архиве Академии наук СССР. Она была получена Петербургской Академией 21 июля 1776 г. Конец ее, повидимому, утерян.

ВВОДНОЕ ПРИМЕЧАНИЕ АКАД. А. Н. НЕКРАСОВА

Д. Бернулли создавал свою «Гидродинамику» в Петербурге, состоя профессором Петербургской Академии наук. В Петербурге был написан первый вариант и выполнены разнообразные опыты, с помощью которых Д. Бернулли проверял выдвинутые им положения. «Гидродинамика» написана на латинском языке. Печатание книги производилось в Страсбурге, где она и вышла в свет в 1738 г. Эта книга никогда полностью не была переведена на один из современных языков, хотя она и содержит много важного; таким образом, настоящее издание есть первый полный перевод «Гидродинамики» Д. Бернулли на русский язык.

При переводе старались по возможности сохранить стиль подлинника и пунктуацию автора, хотя в общем законы применения знаков препинания в «Гидродинамике» другие, чем в настоящее время. Особое внимание было обращено на дословность и точность перевода, так что пропуски слов при переводе являются исключениями, вызываемыми требованиями русского языка. Способы написания формул и рассуждений оставлены такими, какими они представлены в подлиннике, кроме способа написания степеней, неудобного для современного читателя и часто нарушаемого самим Бернулли.

Особого внимания заслуживают части IX, X и XII «Гидродинамики». В части IX вводится понятие работы, которую Д. Бернулли называет «абсолютной мощью» («абсолютной потенцией»).

Основываясь на этом понятии, исследуются разные машины, особенно гидравлические, причем для суждения о преимуществах одних машин перед другими Д. Бернулли пользуется также понятием коэффициента полезного действия, не определяя однако его явно.

Часть X посвящена статике и динамике сжимаемой жидкости, главным образом воздуха. Эта часть должна быть особо отмечена благодаря тому, что в ней Бернулли опередил современную ему науку больше, чем на столетие. Здесь в сущности даны основания кинетической теории газов и отведены из нее разные следствия. Когда при зарождении кинетической теории газов эта часть «Гидродинамики» была переведена на немецкий язык, то стало ясно, что Д. Бернулли должен почитаться одним из творцов кинетической теории газов. Немного позд-

нее М. В. Ломоносов пришел к тем же взглядам на теорию газов, но так же, как и Д. Бернулли, не имел, к сожалению, последователей. Наконец, в части XII Д. Бернулли выводит из физико-механических соображений свой знаменитый закон, который в настоящее время под именем закона Бернулли содержится во всех курсах гидродинамики и гидравлики.

В «Гидродинамике» Д. Бернулли в первую очередь выявляет себя первоклассным естествоиспытателем. Не математика, а естествознание — вот основная сущность этой книги. С этой точки зрения «Гидродинамика» Д. Бернулли никогда не потеряет своего интереса и навсегда останется поучительной.

ВВОДНОЕ ПРИМЕЧАНИЕ ПРОФ. К. К. БАУМГАРТА

Как редактор перевода книги Бернулли, я был заинтерисован в правильном комментировании перевода, но в мои задачи входило еще особое обстоятельство. В Архиве Академии наук СССР была обнаружена почти законченная латинская рукопись, представляющая первоначальную редакцию «Гидродинамики» Д. Бернулли. Она не может не обратить на себя внимания историков науки. Нет сомнения, что замечательный труд Д. Бернулли, заключающий ряд достижений чрезвычайной важности, сохранивших свое значение и в настоящее время, и ряд гениальных предвидений заслуживает издания со всеми сохранившимися вариантами, как изданы, например, труды Галилея в так называемом «Edizione nationale» и труды Гюйгенса в издании Голландского научного общества. Надо было ознакомиться с первоначальной редакцией «Гидродинамики»

Надо думать, что со временем будет переведена и первая редакция «Гидродинамики» Бернулли, и ее издание составит ценное дополнение к печатаемому ныне переводу «Гидродинамики».

Преобладающая часть комментариев к печатаемому переводу составлена мною.

В настоящее время мы не располагаем полным переводом найденной рукописи, поэтому сличение с напечатанной Д. Бернулли «Гидродинамикой» затруднительно во многих отношениях. В моих примечаниях даны лишь немногие извлечения из рукописи, а именно те, которые понятны без контекста. Разумеется, я в комментариях и к рукописи и к книге выбирал те места, которые представляют интерес или с точки зрения принципиальных взглядов Бернулли, или с точки зрения генезиса его идей. Кроме того, в них даны также сведения о лицах, упоминаемых Д. Бернулли в его книге. Это важно не только для выявления «исторического фона» книги. Почти для всех упомянутых лиц даны не только годы жизни, а указаны также те из их работ которые близки теме «Гидродинамики». Таким образом выяснен тот материал, на который мог опираться Д. Бернулли, создавая свою «Гидродинамику». Помещенные у некоторых примечаний рисунки представляют фотографические воспроизведения подлинных рисунков Д. Бернулли.

ПРИМЕЧАНИЯ

Примечания, принадлежащие акад. А. И. Некрасову, имеют в конце обозначение[*Н.*]. Примечания, принадлежащие проф. К. К. Баумгарту, имеют в конце обозначение [*Б.*].

Во всех случаях, в которых имеется в виду первоначальная редакция труда Бернулли, употреблено слово «рукопись». Если в примечании нет слова «рукопись», то имеется в виду напечатанная Д. Бернулли книга «Гидродинамика».

Во всех случаях, в которых упоминается фамилия Бернулли без указания имени, имеется в виду Даниил Бернулли.

---

[1] (к стр. 9). Воспроизводим титульный лист (стр. 13) и первую страницу книги (стр. 507).

Перевод текста титульного листа дан на стр. 14.

В рукописи труд Д. Бернулли назывался «Записки о равновесии и движении жидкостей» («Commentarii de aequilibro et motu fluidorum»). [*Б.*].

[2] (к стр. 9). Образное выражение Бернулли означает: «. . .если только автор теории способен создать разумную теорию».

Минерва — богиня мудрости у древних римлян. [*Б.*].

[3] (к стр. 11). В настоящее время механические дисциплины, посвященные равновесию и движению жидкостей, объединяются под названием гидромеханики или аэромеханики, если рассматриваются лишь газы. Часть гидромеханики, занимающаяся теоретическим изучением движения идеальных жидкостей, называется гидродинамикой, а часть гидромеханики, занимающаяся изучением движения реальных жидкостей с применением наблюдений и экспериментов, называется гидравликой. [*Н.*].

[4] (к стр. 12). Фронтин Секстус Юлиус (Frontinus Sextus Julius) — командующий римскими войсками в Британии, с 97 г. н. э. — куратор римского водопровода, трижды консул, умер около 106 г. Написал исследование «О водопроводах Рима» (De aquaeductibus urbis Romae). Этот труд многократно издавался и дополнялся редакторами: Кейхеном (Keuchen, Amsterdam, 1661), Ронделе (Rondelet, Paris, 1821), Дедерихом (Dederich, Leipzig, 1841) и Бюхелером (Bücheler, Leipzig, 1858). [*Б.*].

[5] (к стр. 12). Кастелли Бенедикт (Costelli Benedetto, 1577—1644) — профессор математики в «коллегии наук» в Риме, ученик Галилея, автор ряда физических исследований. К вопросам гидростатики и гидродинамики относятся: «Ответ на возражения господ Л. делле Комбе и В. ди Грациа», (1615), в котором он защищает гидростатические открытия Галилея, и «Геометрические доказательства, относящиеся к измерению текущей воды» (Demonstrazioni geometriche della misura dell aque correnti, Roma, 1628—1629). [*Б.*].

[6] (к стр. 12). Торичелли Еванджелиста (Toricelli Evangelista, 1608—1647) — выдающийся физик и механик XVII в., ученик Галилея и продолжатель его работ. Законы истечения жидкостей из сосудов разобраны им в сочинении «О движении весомых тел, свободно падающих» (De motu gravium naturaliter descendentium). [*Б.*].

[7] (к стр. 12). Гульельмин Доминик (Guglielmino Domenico, 1655—1710) — доктор медицины, главный инспектор водопроводов Болонской области и профессор математики и гидрометрии Болонского университета (1690—1698); с 1702 г. — профессор математики и медицины Падуанского университета. К гидростатике и гидродинамике относятся его исследования: «Измерение текущих вод, произведенное новым методом» (Aquarum fluentium mensura, nova methodo inquisita, 1690—1691), «Два гидростатических письма» (Epistolae duae hydrostaticae, 1692), «Об измерении текущих вод в ответ на письмо Дени Папена Гюйгенсу» (De aquarum fluentium mensura, qua respondet epistolae Dionysii Papini ad Hugenium, 1710). [*Б.*].

[8] (к стр. 12). Мариотт Эдм (Mariotte Edme). Умер в 1684 г. Член Парижской Академии, выдающийся физик. Гидродинамические вопросы трактуются в следующих трудах Мариотта «Трактат о движении вод и других жидких тел» (Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides, 1686), «Наблюдения над сопротивлением водопроводных труб» (Observations sur la resistance des tuyaux de conduite d'eau), «О расходе воды в фонтанах» (Sur la dépense, que font les jets d'eau etc.). Обе последние работы изданы в 1733 г. «Труды Мариотта» (Oeuvres de Mariotte) вышли в 1717 г. в двух томах. [*Б.*].

[9] (к стр. 15). Даниил Бернулли всюду в своей книге пишет названия книг сокращенно. В данном случае цитируется знаменитая книга Ньютона: «Математические начала естественной философии», Лондон, 1687 (Philosophiae naturalis principia mathematica). [*Б.*].

[10] (к стр. 15). Слова «перед отверстием» относятся к наблюдателю, находящемуся перед сосудом: сжатие струи находится вдоль течения жидкости ниже отверстия. [*Н.*].

[11] (к стр. 16). В рукописи в этом месте добавлено: «Я уже никогда не мог убедить себя в том, что сужение водяной струи является столь непосредственным следствием самой природы текущих вод, чтобы без помощи этого явления нельзя было дать никакого другого объяснения, так как сужение изменчиво, непостоянно, а в некоторых случаях вовсе не имеет места, тогда как теория



HYDRODYNAMICÆ

SECTIO PRIMA.

Quæ introitus eſt, variaque continet prænotanda.

§. I.

DUplex cum ſit Theoria Fluidorum, quarum altera Hydroſtatica, liquorum ſtagnantium preſſiones & æquilibria varia, altera Hydraulica, fluidorum motum ſpectans, ſeorſum pertractari a ſcriptoribus conſueverunt, utramque vero tam arcto nexu inter ſe cohærere perciperem, ut altera alterius ope plurimum egeat, haud dubitavi eas confundere, quantum id ordo rerum poſtulare videbatur, ambaſque nomine communi & generaliori Hydrodynamicæ complecti. Quamvis autem ab antiquiſſimis temporibus fuerit continuo exculta Theoria fluidorum, incrementa tamen non admodum notabilia cepit; veterum quidem Mathematicorum cognitio eo terminabatur, quod a-

A qui-

Первая страница первой части «Гидродинамики» Д. Бернулли.

Ньютона, повидимому, требует, чтобы минимальное сечение водяной струи, вытекающей горизонтально, относилось к отверстию как 1 к$\sqrt{2}$». [*Б.*].

[12] (к стр. 17). Фабретти Рафаил (Fabretti R , 1618—1700) — известный археолог; написал книгу «О водах и водопроводах древнего Рима» (De aquis et aqueductibus veteris Romae, 1680).

[13] (к стр. 18). Папин (или Папэн) Дени (Papin Denis, 1647—1714) — известный французский физик и механик, экспериментатор и конструктор приборов, в частности котла, сделавшего возможным построение первой паровой машины. Религиозные гонения заставили его покинуть Францию и Парижскую Академию. Он умер в Германии, в Касселе. Для Бернулли особый интерес представляли труды Папина по способам поднятия воды и по скорости втекания воздуха в пустой резервуар. [*Б.*].

[14] (к стр. 19). Борелли Джованни Альфонсо (Borelli Giovanni Alfonso, 1608—1679) — профессор Мессинского, позднее Пизанского университета, медик и математик. Наиболее известное его сочинение в двух частях «О движении животных» (De motu animalium, p. I. Romae, 1680; p II Lugduni Batavorum, 1685). [*Б.*].

Вивиани Викентий (Viviani Vincenzo, 1622—1703) — итальянский ученый, ученик Галилея, математик, механик и физик, член ряда академий. [*Б.*].

Паскаль Блез (Pascal Blaise, 1623—1662) — французский ученый, автор замечательных исследований в области математики, гидро- и аэростатики. Для трактата Бернулли важны работы Паскаля: «О равновесии жидкостей», «О тяжести воздушных масс» и «Опыты „с пустотой“». Эти работы были выполнены в период 1648—1653 гг. [*Б.*].

Бойль Роберт (Boyle Robert, 1626—1691) — знаменитый английский физик и химик, член Лондонского королевского общества. Для Бернулли имели особое значение опыты Бойля над поведением газов при изменении давления и знаменитый закон Бойля. Труды Бойля вышли в 5 томах в Лондоне в 1744 г. [*Б.*].

Вариньон Пьер (Varignon Pierre, 1654—1722) — известный французский математик и механик, член Парижской академии наук. Для трактата Бернулли особенно ценен мемуар Вариньона «О движении и измерении текущих вод» (Traité du mouvement et de la mésure des eaux courantes, 1725). [*Б.*].

Полени Джованни (Poleni Giovanni, 1683—1761) — итальянский физик и антикварий, большой знаток вопросов гидравлики. Автор трудов «О движении смешанных вод» (De motu aquae mixtae, Padua, 1717) и «Об источниках, из которых вытекают воды рек» (De castellis, per quae derivantur fluidorum aquae, Padua, 1718). [*Б.*].

Германн. Не удалось определить, кого именно имеет в виду Бернулли Возможно, что это Яков Герман (Hermann Jacob, 1678—1733), ученик Якова Бернулли, профессор математики в Падуе, затем во Франкфурте на Одере и, наконец, в С.-Петербурге, автор многих трудов в области математики и математической физики. [*Б.*].

Бернулли Яков (1654—1705) и Иоганн (1667—1748) — братья, профессора Базельского университета, замечательные математики и механики XVII и XVIII вв. Бернулли Иоганн — отец Даниила Бернулли. Братья Бернулли много сделали для усовершенствования анализа бесконечно малых и положили начало новым отделам в математике. В механических исследованиях братья Бернулли неизменно стояли на передовых для своего времени позициях. [*Б.*]

[15] (к стр. 19). О пузырях см.: часть вторая, §§ 9—16. [*Н.*]

[16] (к стр. 21). Это явление есть следствие гидравлического удара. [*Н.*].

[17] (к стр. 24). В рукописи добавлено: «Точно так же и наши гипотезы, быть может, найдут своих поклонников». [*Б.*].

[18] (к стр. 25). Приставная трубочка есть пиезометр. [*Н.*].

[19] (к стр. 26.). В рукописи добавлено: «И что особенно важно, показывается вытекающий из теории прием, применяя который, можно достигнуть того, что хотя вода и не вытекает через большее отверстие или с большей скоростью, но тем не менее отталкивает сосуд с большей силой, чем в том случае, когда вода вытекает через простое отверстие». [*Б.*].

[20] (к стр. 26). Здесь речь идет о реактивной силе; практическое использование ее для получения поступательного движения сделалось возможным лишь в последнее время. [*Н.*].

[21] (к стр. 27). § 19 первой части особенно важен, как содержащий изложение генезиса идей Бернулли. Известно, что Гюйгенс первый применил к решению механических задач (удар шаров, теория маятников) частные случаи теоремы «живых сил» (термин, введенный Лейбницем). Эта традиция через старших Бернулли (Иоганна и Якова) дошла до Даниила Бернулли, который ясно сознает силу метода Гюйгенса, принявшего в руках Бернулли уже аналитическую форму. [*Б.*].

[22] (к стр. 28). В рукописи после слов «сохранение живых сил» написано: «. . . хотя и принятым многими, однако же не всеми. По существу же все сходятся на том, что во всем учении Лейбница о живых силах нет ничего такого, с чем не согласились бы все, хотя каждый выражает это своими словами. Ведь весь вопрос, если я правильно понимаю, заключается в том, чтó из двух удобнее обозначить названием живой силы, т. е. силы присущей движимому телу: число ли всех минимальных упругих противодействий, которые движущееся тело может вызывать до тех пор, пока оно не потеряет всякое движение, причем время вовсе не принимается во внимание, или же сумму всех моментальных давлений, потребных для того, чтобы остановить тело, и противоположных направлению движения (ибо я принимаю, что моментальное давление пропорционально произведению давления на минимальное время, поскольку тот, кто носит в течение двух часов десять фунтов, выдерживает такое же давление, как тот, который в течение одного часа несет двадцать фунтов). Мы правильно поступим, если будем считать в первом случае живую силу тела пропорциональной квадрату скорости, во втором —

самой скорости. В обоих случаях мера будет постоянной; действительно, в природе вещей упомянутая выше с у м м а моментальных давлений сохранится в той же степени, как и число всех напряжений. Но мне первое определение по многим причинам кажется более приемлемым, чем второе, и я применяю это первое. Об этом я подробнее говорил в «Комментариях Петербургской Академии Наук» (т. I). [*Б.*].

[23] (к стр. 29). Слово «давление» употреблено дважды в этом параграфе вместо слов «сила тяжести», чтобы избежать упоминания о действии на расстояние. Последняя фраза описывает формулу $\Delta v = \frac{F}{m}\Delta t$. [*Н.*].

[24] (к стр. 29). Тонкая материя есть теплород, наличием которого тогда объяснялось тепло; любопытно, что здесь указывается на возможность перехода механической энергии в тепловую. [*Н.*].

[25] (к стр. 35). В рукописи эта часть начинается со следующего замечания: «Определения и аксиомы, содержащиеся во всех сочинениях по гидростатике, мною не предпосылаются. Если же окажется, что некоторые менее известные термины нуждаются в каком-либо объяснении, то я объясню их на своем месте и в своем порядке. Точно так же и аксиомы и гипотезы, если они либо вводятся впервые, либо им придана более свободная форма, чем у других, я изложу так, чтобы показать, что они либо сами по себе ясны и необходимы, либо по крайней мере соответствуют общим законам природы.

«Так, например, я кратко изъясню здесь природу упругих жидкостей». [*Б.*].

[26] (к стр. 36). В рукописи добавлено: «Это предложение служит для определения формы Земли, воды в состоянии водоворота и т. д.». [*Б.*].

[27] (к стр 39). Понижение ртути в капиллярах смущает Бернулли и трудно поддается объяснению в свете его теории. В рукописи вопрос изложен так: «Что же касается ртути, то необходимо отметить, что и она поднимется выше уровня и ни в чем не будет отступать от природы остальных жидкостей, если, набрав при помощи всасывания ртуть в трубку, наклонить трубку так, чтобы она была почти горизонтальной. Действительно, при этом ртуть постепенно вытекает, но остается столбик определенной длины, и притом такой, что его высота по вертикальной линии будет иметь постоянную величину; но если конец трубки (на которой всегда есть приставшая капля жидкости) поднести к ртути, то сразу же ртуть (которая до этого времени оставалась в трубке в подвешенном состоянии) вытечет вся; если я не ошибаюсь, это указывает на то, что ртути присуща величайшая сила притяжения ртути же; если сделать такое допущение, то всякий без труда увидит, что ртуть в трубке не достигает уровня, пока трубка погружена в ртуть, по той причине, что ртуть увлекается вниз из-за противодействия, которое встречает движение в стороны вследствие того, что на ее пути находятся стенки трубки». [*Б.*].

[28] (к стр. 44). В §§ 14 и 15 второй части в оригинале имеются многочисленные опечатки в формулах, исправленные при переводе. [*Н.*].

[29] (к стр. 44). Это значит, что длина дуги s принимается за независимую переменную. [*Н.*].

[30] (к стр. 45). Выражение $R=\frac{dyds}{d^2x}$ для радиуса кривизны плоской кривой несколько необычно; оно выводится следующим образом. При независимом переменном s радиус соприкасающейся окружности, т. е. радиус кривизны кривой, имеет следующий вид:

$$R=\frac{(dy^2+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x-dxd^2y}=\frac{ds^3}{dyd^3x-dxd^2y}$$

Так как

$$dy^2+dx^2=ds^2,$$

то

$$dyd^2y+dxd^2x=0,$$

т. е.

$$d^2y=-\frac{dxd^2x}{dy}.$$

Отсюда находим

$$dyd^2x-dxd^2y=dyd^2x+\frac{dx^2d^2x}{dy}=\frac{ds^2d^2x}{dy},$$

поэтому будет

$$R=\frac{ds^3dy}{ds^2d^2x}=\frac{dsdy}{d^2x}.$$

[31] (к стр. 49). Бильфингер Георгий-Бернгард (Bilfinger Georg Bernhard, 1693—1750) — член С.-Петербургской Академии наук (1725—1731). Выдающийся исследователь в области разных наук, в частности физики. [*Б.*].

[32] (к стр. 54). В рукописи другое начало:

§ 1. **Предварительные замечания.** Чрезвычайно трудной задачей гидравлики является определение движения воды, вытекающей из данного сосуда через данное отверстие. Действительно, хотя знаменитейшие геометры пытались разрешить этот вопрос, но им не удалось сделать что-либо больше, чем доказать факт, известный из многократных опытов, а именно, что вода вытекает из сосуда через чрезвычайно малое отверстие с такой скоростью, с которой она может подняться до высоты воды над отверстием. Все движение воды (которое частью зависит от формы сосуда, частью же от величины отверстия) будет переменным в течение всего времени истечения воды, если только отверстие не будет бесконечно малым, и поэтому его надо определять для каждого отдельного момента. Для этой цели Ньютон применял такое основное правило: движение всей истекающей воды такое же, какое может произвести вес воды, лежащей над отверстием в вертикальном направлении. В верности этого правила не приходится

сомневаться, но правильное его применение чрезвычайно затруднительно. Я приму два других основных правила; они таковы, что если согласиться принять их, то нельзя себе представить ни одного явления, относящегося к движению воды, которое не было бы закономерным выводом из этих правил. Оба эти правила приняты и в механике и в гидростатике; однако их надо принимать с известными оговорками.

§ 2. **Гипотеза 1.** Скорость протекания воды по трубе всегда обратно пропорциональна сечению сосуда. Авторы книг по гидростатике доказывают это предложение, исходя из того, что в одно и то же время через каждый отдельный участок сосуда протекает одно и то же количество воды. Но необходимо признать, что при этом делается предположение, которое верно лишь приближенно, а если сосуды имеют очень неправильную форму, то допущение одинаковой скорости воды на одном участке сосуда неверно даже приближенно: гораздо более вероятно, что вода течет медленнее у стенок сосуда, а быстрее у его середины. Это правило принимаем и мы, так как вряд ли оно далеко от истины, поскольку я убедился в его правильности на многочисленных опытах.

§ 3. **Гипотеза 2.** Если какие-либо грузы начинают любым образом двигаться в силу своей тяжести, а затем все снова возвращаются в состояние покоя, то общий центр тяжести грузов вернется на прежнюю высоту. Поскольку я знаю, эту аксиому впервые применил Гюйгенс для правил движения, возникающего при ударе тел, совершенно упругих, и для нахождения центра качания, и она не отличается от закона сохранения живых сил, согласно которому принимается, что движение, возникшее вследствие силы тяжести в какой угодно массе M таково, что сумма квадратов скоростей отдельных точек равна квадрату скорости той же массы M, свободно упавшей, помноженной на ту высоту, с которой упал ее центр тяжести. Этот закон сохранения живых сил я применил в комментариях нашей Академии (т. II, стр. 111) для определения движения воды, где я коснулся лишь немногих, но очень важных вопросов, относящихся к этой теме. Однако, если я не ошибаюсь, важность этого вопроса заслуживает того, чтобы остановиться на нем подробнее. Впрочем, закон Гюйгенса несомненно не вызывает никаких серьезных сомнений; тем не менее доказать его возможно только метафизически, а именно из теоремы Лейбница, согласно которой живые силы пропорциональны квадратам скоростей, а природа имеет своей целью сохранение живых сил. То, что это рассуждение относится только к движению в пустоте, и притом свободному от всякого трения, совершенно ясно; конечно, и в этом последнем случае не пропадают никакие живые силы, но здесь дело скорее обстоит так, что они передаются недоступным чувствам частицам проникающей через все предметы жидкости.

«§ 4. **Теорема.** Если жидкость, находящаяся в неподвижном состоянии в сосуде, вытекает через очень малое отверстие, то направление струи в момент ее выхода перпендикулярно к сосуду».

Дается доказательство этой теоремы.

«§ 5. **Поучение.** Если струя будет вытекать горизонтально, то сначала ось струи будет перпендикулярна к сосуду; но края струи сближаются, и струя становится более узкой и более сжатой. Это сжатие Ньютон использовал (после того, как он заявил, что высота, на которую может подняться вытекающая вода, в 2 раза меньше, чем в действительности) для нахождения истинной скорости вытекающей воды, утверждая, что сечение наиболее сжатой струи так относится к высоте отверстия, как 1 к $\sqrt{2}$. Я, однако, сильно сомневаюсь в том, что это сжатие может играть какую-либо роль, так как оно не играет никакой существенной роли в истечении воды, ибо можно помешать сжатию без изменения скорости вытекающей воды. Истинная причина сжатия струи, повидимому, заключается в том, что в тех случаях, когда отверстие несколько больше, направление капелек, протекающих около стенок отверстия, не может быть перпендикулярным к стенкам сосуда; оно неизбежно получит уклон в сторону оси вытекающей струи. Это ясно из самого доказательства предшествующей теоремы, в которой отверстие рассматривается как бесконечно малое, и подтверждается опытом г. Полена.[1] Этот славнейший муж остроумно заметил, что сжатие струи становится тем большим, чем тоньше стенка, в которой проделано отверстие». [*Б.*].

[33] (к стр. 72). Гравезанд Вильгельм Яков (Storm van s'Gravesande Wilhelm Jacob, 1688—1742) — известный голландский ученый, профессор Лейденского университета, издатель трудов Гюйгенса, автор распространенного в свое время курса физики. [*Б.*].

[34] (к стр. 76). Фонтана Карл (Fontana Carlo, 1638—1714) — архитектор в Риме, автор «Трактата о текущей воде» (Trattato del aqua correnti, Romae, 1694). [*Б.*].

[35] (к стр. 76). Перевод цитаты, приведенной у Бернулли, следующий: «. . . но если бы не оказалось столько воды, чтобы названная трубка была бы всегда полна, то вода будет притягивать внутрь себя воздух в таком количестве, сколько будет недоставать воды, причем воздух разместится в промежутках между столбами воды; но быстрота воды будет убывать настолько, насколько велика будет высота всего сoбранного внутри трубы воздуха». [*Б.*].

[36] (к стр. 78). Полный синус есть синус прямого угла, равный единице. [*Н.*].

[37] (к стр. 80). Воздушный вакуум есть область внутри воды, заполненная воздухом. [*Н.*].

[38] (к стр. 81). Де-ла-Гир Жан (La Hire Jean, Nicolas de, 1685—1727) — врач, член Парижской Академии наук, предложивший конструкцию насоса, непрерывно подающего воду в резервуар. Его отец, Филипп де ла Гир (1640—

---

[1] Маркиз Полен, астроном из Павии, почетный член С.-Петербургской Академии наук. [*Б.*].

1718), и брат, Габриэль Филипп де ла Гир, также были членами Парижской Академии наук.

Особенно известен своими трудами отец. [*Б.*].

[39] (к стр. 94). Мопертюи Пьер (Maupertuis Pierre Louis Moreau de, 1698—1759) — астроном, математик, механик, член Парижской Академии наук, руководитель градусного измерения в Лапландии, которое подтвердило приплюснутую форму Земли. В механике ему принадлежит принцип наименьшего действия, но приоритет его оспаривается (см. статью Н. И. Идельсона в книге: К л е р о. Теория фигуры Земли. Изд. АН СССР, сер. «Классики науки», М.—Л., 1947). [*Б.*].

Клеро Алексей (Clairaut Alexis Claude, 1713—1765) — французский математик, астроном и геодезист. член Парижской Академии наук. Из его многочисленных исследований особенно известны: «Теория фигуры земли» и «Теория движения Луны» (Théorie de la figure de la Terre, 1743; Théorie de la Lueur déduite d'un seul principe d'attraction, 1752).

[40] (к стр. 96). См. выше примечание [14]. [*Б.*].

[41] (к стр. 97). Математическая теория плоскопараллельных струй идеальной жидкости в настоящее время разработана весьма подробно: для струй несжимаемой жидкости замечательная работа принадлежит Н. Е. Жуковскому, а для струй сжимаемой жидкости — С. А. Чаплыгину. В этих работах теоретически определяется и сжатие струи, однако для пространственных струй математической теории еще не существует. Изучение же струй реальной жидкости при наличии различных сопутствующих условий, как рассматривает Д. Бернулли, точному математическому анализу в настоящее время совершенно недоступно. [*Н.*].

[42] (к стр. 100). «Сечение плотной струи» есть то же самое, что определенное выше «сечение сжатой струи». [*Н.*].

[43] (к стр. 133). § 1 пятой части в рукописи имеет такое начало: «Главным предметом гидравлической науки является движение воды через сосуды, остающиеся постоянно наполненными: такого исследования требуют реки, каналы, бассейны и т. д. Поэтому я и счел стоящим труда делом рассмотреть то, что дает для этого наша теория». [*Б.*].

[44] (к стр. 133). В рукописи имеется еще следующая фраза: «Итак, это правило обманывает, если мы станем требовать геометрической точности; однако оно так мало отступает от истины с того момента, как вода начнет вытекать хотя бы в течение минимального времени, что в практических вопросах его можно применять без всякого риска». [*Б.*].

[45] (к стр. 135). 1) Следует обратить внимание на очень несовременные и тем самым затруднительные для чтения способы изложения случая I и случая II. Заметим, что всюду для основания натуральных логарифмов вместо принятого в настоящее время обозначения e Д. Бернулли применяет здесь обозначение c. [*Н.*].

[46] (к стр. 140). Это обозначает, что $\sqrt{a+x}$ и $\sqrt{x}$ пропорциональны соответственно m и n с одинаковым множителем пропорциональности. [*Н.*].

[47] (к стр. 145). У автора пропущено следствие 2. По всей вероятности, § 9 и есть следствие 2. [*Б.*].

[48] (к стр. 157). Слова «следуют третичному отношению квадратов количеств» следует понимать как «высоты пропорциональны степени двух третей из количеств». [*Н.*].

[49] (к стр. 165). Д. Бернулли указывает здесь, что, например, вода, заполняющая открытую с обоих концов U=образную трубку, расположенную в вертикальной плоскости, будет продолжать двигаться в том же направлении, в каком она начала свое движение, когда ее центр тяжести занимал более высокое положение. [*Н.*].

[50] (к стр. 167). На фиг. 34 в книге Бернулли отсутствует буква p. Она должна быть помещена на правой трубке несколько выше f. [*Б.*].

[51] (к стр. 174). В самом деле, приведенное в тексте равенство равносильно равенству

$$\frac{1}{\sqrt{g\gamma}-g}+\frac{1}{\sqrt{g\gamma}-\gamma}=\frac{1}{\sqrt{g\gamma}}.$$

Но мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{g\gamma}-g}+\frac{1}{\sqrt{g\gamma}-\gamma}=\frac{2\sqrt{g\gamma}-(g+\gamma)}{2g\gamma-\sqrt{g\gamma}\,(g+\gamma)}=\frac{1}{\sqrt{g\gamma}}\cdot\frac{2\sqrt{g\gamma}-(g+\gamma)}{2\sqrt{g\gamma}-(g+\gamma)}=\frac{1}{\sqrt{g\gamma}}.$$

Легко показать, что количества $\sqrt{g\gamma}-g$ и $\sqrt{g\gamma}-\gamma$ всегда имеют разные знаки. [*Н.*].

[52] (к стр. 183). В рукописи вместо последних строк § 4 (от слов «эта недостача. . . .») стоит следующее:

«Однако так как решить это уравнение очень трудно, особенно же если n не будет целым числом, то заменим его другим, весьма простым и почти не отличающимся от первого, если только число n не очень мало и если в то же время поверхность ST с начала истечения не слишком близка к другой поверхности. При этих условиях можно без всякого риска отбросить количество x^{n^2-1}, которым можно пренебречь по сравнению с a^{n^2-1}, и получится

$$x=\frac{n^2-2}{n^2-1}b.$$

«Отсюда можно сделать вывод, что наибольшее падение поверхности внутренней воды ниже уровня поверхности внешней воды, приблизительно равно $\frac{b}{n^2-1}$; это чрезвычайно малое количество, и оно указывает на то, что начальная вы-

сота воды оказывает малое влияние на этот спуск, если только она чрезвычайно мала или если отверстие не чрезвычайно широкое». [*Б.*].

[53] (к стр. 183). В рукописи добавлено: «Если $n^2=3$, то получится $x=\frac{a^2}{2a-b}$». [*Б.*].

[54] (к стр. 188) Буквой α обозначено основание натуральных логарифмов. Заметим, что в пятой части, а также в седьмой Д. Бернулли применил для этой же величины букву c. [*Н.*].

[55] (к стр. 197). У Бернулли здесь и в других местах употребляется термин excursio в смысле: размах колебания, колебание уровня. [*Б.*].

[56] (к стр. 219). Это означает, что формула может быть приведена к рациональному виду, т. е. не содержащему корней. [*Н.*].

[57] (к стр. 220). Так как log (—4) есть мнимое количество, то записать эту формулу так, как сделал Д. Бернулли, нельзя. Чтобы получить тот же ответ, не покидая действительных количеств, надлежит изменить знак соответствующих членов в самом дифференциальном уравнении и затем выполнять интегрирование. Например, если $x>1$, то под знаком log окажется действительное количество.
Но если $x<1$, то интеграл следует преобразовать к виду

$$\int\frac{dx}{x-1}=-\int\frac{dx}{1-x}=\int\frac{d(1-x)}{1-x}=\log(1-x),$$

и тогда получится опять действительное количество. То же самое замечание относится и к логарифму $\log(49-35\sqrt{2})$. [*Н.*].

[58] (к стр. 228). Здесь буква c обозначает основание натуральных логарифмов. [*Н.*].

[59] (к стр. 232). В этом параграфе Д. Бернулли впервые с полной ясностью вводит понятие работы, давая ему современный смысл; только вместо термина «работа» Д. Бернулли пользуется выражением «абсолютная мощь» или «абсолютная потенция». [*Н.*].

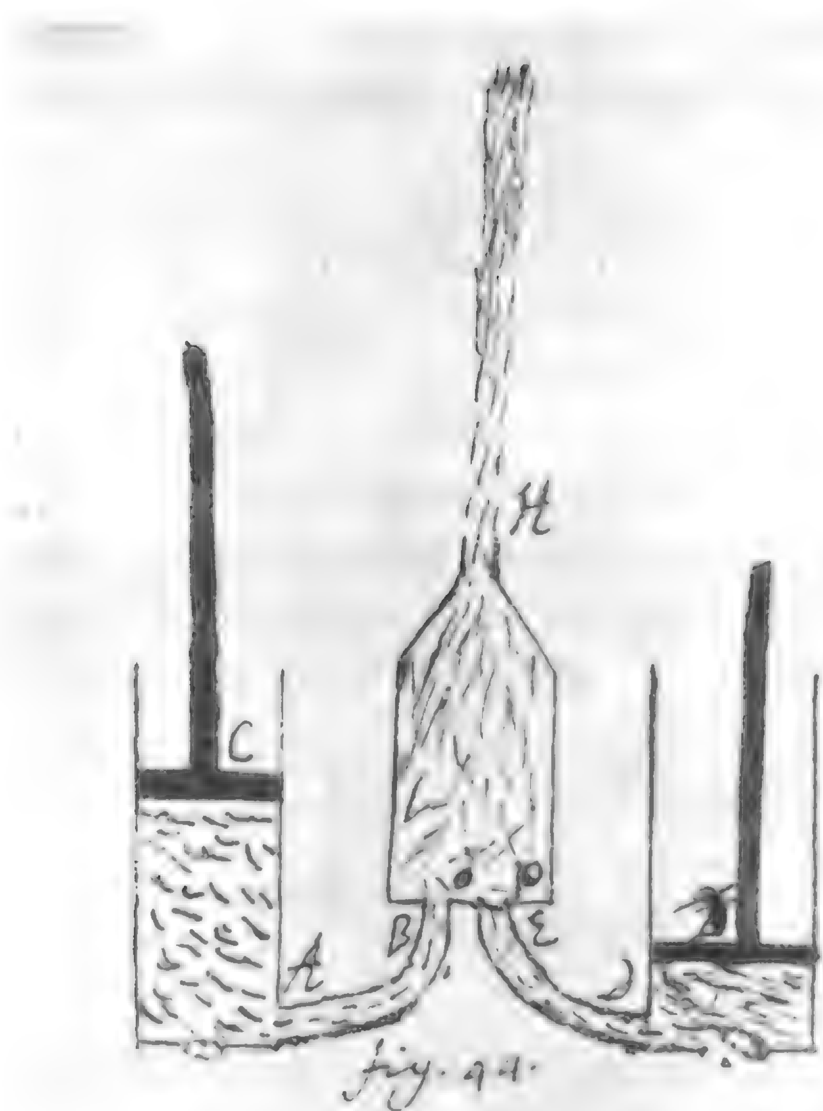
[60] (к стр. 234). Здесь речь идет о машине, приводимой в движение весом человека, идущего по наклонному кругу и тем приводящего этот круг во вращательное движение. [*Н.*].

[61] (к стр. 234). Угол в 30° Д. Бернулли математически не обосновал; он взят лишь предположительно, как близкий к истинному. [*Н.*].

[62] (к стр. 241). Витрувий Марк (Marcus Vitruvius Pollo, приблизительно от 60 г. до н. э. до 26 г. н. э.) — знаменитый строитель. Восьмой том его десятитомного «Трактата об архитектуре» посвящен гидравлике. [*Б.*].

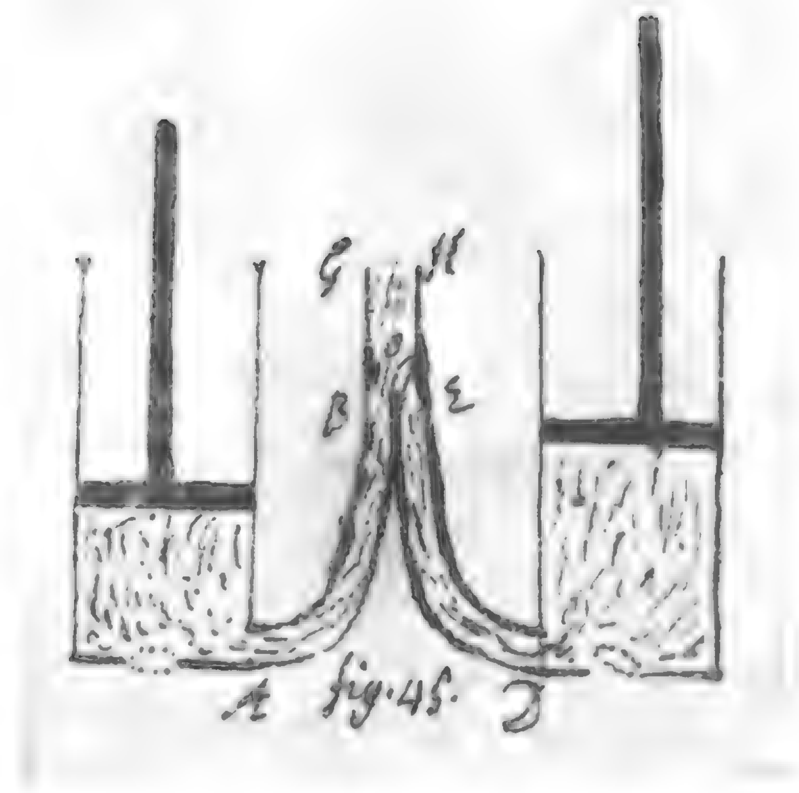
[63] (к стр. 241). Ктезибий (Ktesibios, II в. до н. э.) — механик в Александрии, изобретатель, усовершенствовал клепсидру, изобрел воздушное ружье (?), всасывающий и нагнетательный насос; учитель Герона Александрийского. [*Б.*].

[64] (к стр. 242). В рукописи пример и пояснение даны подробнее: «Для того чтобы стало яснее, как пользоваться этим правилом, мы приведем для примера две наиболее употребительные гидравлические машины; устройство первой из них показано на фиг 44. В этом насосе один из поршней всегда опускается в то время, как другой поднимается; представим себе поэтому, что поршень C вгоняет воду через сифон AB и через отверстие o, устроенное в маленькой створке, в цилиндр BH и выгоняет ее через отверстие H. Благодаря этому потенциальный подъем каждой капли, входящей из AB в BH, должен поглотиться. Поэтому, если принять ширину отверстия, находящегося в H, равной 1, а ширину отверстия, находящегося в o, равной m, то вся абсолютная мощь (именно за то время, в течение которого поршень один раз проталкивается вниз) будет равна p; часть абсолютной мощи, не производящей полезного действия, равна $\frac{p}{1+m^2}$; эта часть весьма значительна, поскольку часто мастера делают отверстие o меньшим, чем отверстие H, ибо в этом случае теряется более половины абсолютной мощи, что можно подтвердить при помощи опыта, если его поставить следующим образом. Пусть оба отверстия H и o имеют одинаковую величину; возьмем поршень данного веса и будем наблюдать высоту струи воды, вытекающей через H. Повидимому, теперь, если убрать цилиндр BH так, чтобы вода извергалась через отверстие o непосредственно в воздух, для выбрасывания воды с той же скоростью или на ту же высоту понадобится поршень, имеющий половину прежнего веса или, во всяком случае, немного больший, чем половину, особенно если этот цилиндр BH имел значительную емкость по сравнению с емкостью соединительной трубки AB; это необходимо для того, чтобы допущения, на которых была в предыдущей главе построена эта теория, могли иметь место. Если это так, то необходимо машину исправить, а это может произойти двумя способами:



«1) Можно сделать как отверстия *o* и *p*, так и всю трубку *AB* и всю трубку *DE* чрезвычайно широкими по сравнению с шириной трубочки в *H*, и благодаря этому можно сохранить чашу *BH* (что, однако, если я не ошибаюсь, не дает никакой выгоды); или же

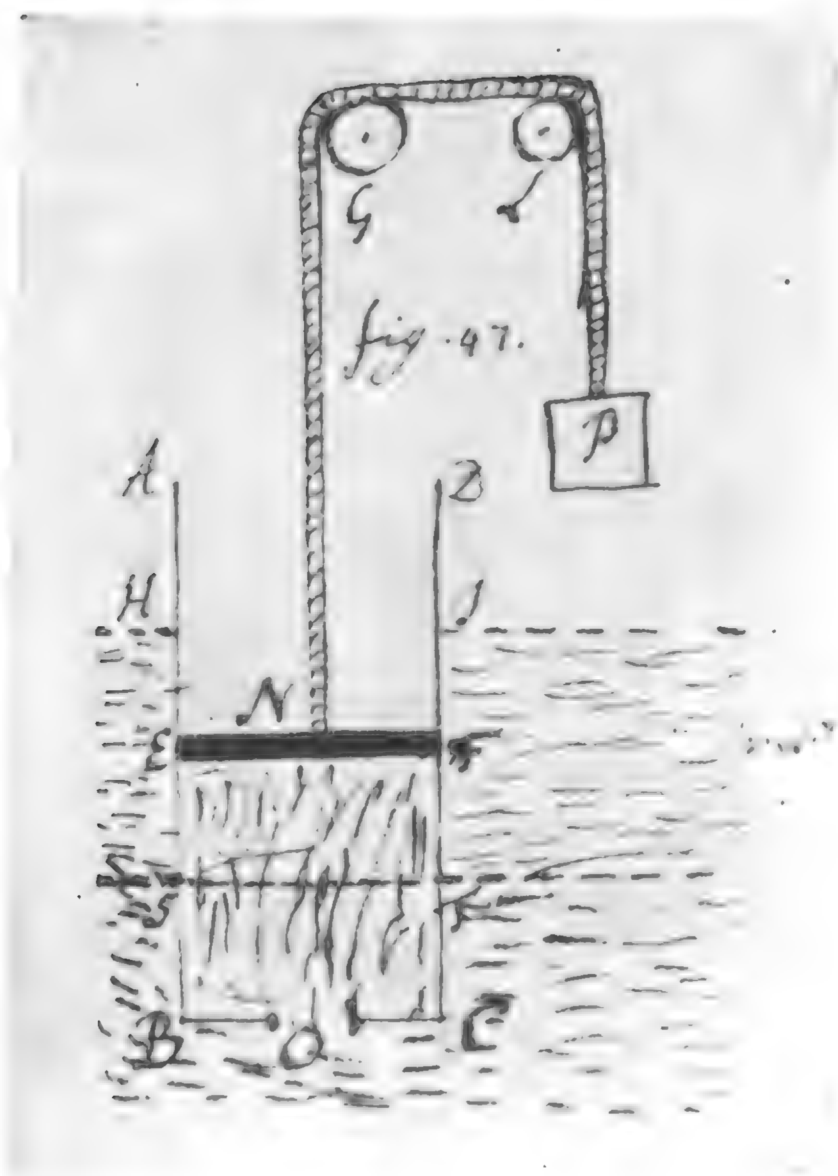
2) удалив эту чашу, но соединив оба сифона *AB* и *DE* в точке *o* и слив их в один, лишь немногим более широкий, чем каждый из предыдущих, таким же способом, каким соединяются кровеносные сосуды в теле животного. Насос, измененный таким образом, изображен на фиг 45, на которой *AB* и *DE* изображает трубки, соединенные вместе в одну трубку *BEHG*; при помощи одной и той же маленькой створки *o*, лежащей в середине между обеими трубками, можно запирать то одну, то другую трубку. Число этих створочек (или дощечек, как их называют другие) не следует увеличивать без необходимости. Ясно, что в насосе такого рода частица воды, содержащаяся в трубочке *BEHG*, никаким образом не может воспрепятствовать истечению через *o* или замедлить его, как это бывает в другом насосе, изображенном на фиг. 44, в котором вода, проходящая через *o*, весьма замедляется из-за воды, находящейся в цилиндре *BH* почти в состоянии покоя. Быть может, мне скажут, что бьющая струя воды при таком устройстве не будет столь непрерывной, как в том случае, когда имеется чаша, однако же я полагал бы, что бьющая струя будет одинаковой в обоих случаях, но ни в одном из них не будет совершенно равномерной; в противном случае проходило бы некоторое время между последним моментом поднятия поршня и первым моментом его обратного опускания. И хотя движение воды не может возникнуть мгновенно, однако же оно возникает столь быстро, когда отверстие *H* имеет чрезвычайно малую ширину по сравнению с шириной, относящейся к цилиндру, в котором движется поршень, что этот ничтожный промежуток времени недоступен ощущениям, как мы отмечали многократно выше. Впрочем, если в этих насосах, изображенных на фиг. 44 и 45, оба поршня будут двигаться одновременно и с одинаковой силой, вода не будет вследствие этого извергаться с большим напором через отверстие *H* и не потеряет ничего из своей абсолютной мощи. [*Б*.].



[65] (к стр. 244). Перро Клавдий (Perrault Claude, 1613—1688) — французский врач и архитектор, автор ряда физических исследований и интересной «механики животных». Перевел на французский язык и комментировал десять томов «Архитектуры» Витрувия. [*Б*.].

[66] (к стр. 251). В рукописи имеется еще следующий экскурс, не вошедший в книгу — «Об измерении воды, оказывающей влияние на цилиндры гидравлических машин с момента поднятия поршня».

«1. Чтобы можно было судить о правильной мере абсолютной мощи, потребной для поднятия поршня, необходимо прежде всего выявить ту движущуюся силу, которая требуется для того, чтобы поднять поршень с данной скоростью. Эта скорость произвольна, поскольку она зависит от воли тех, которые наняты для черпания воды; с изменением же скорости, с которой поднимается поршень в каждом его положении, изменяется также абсолютная мощь, истраченная на все поднятие поршня, так что часто путем исследования максимумов и минимумов можно найти много способов сбережения силы.



«Если простоты ради обратить внимание лишь на то, что происходит на практике, то наиболее будет удовлетворять природе вещей гипотеза, что поршень поднимается почти с равномерной скоростью или же другая гипотеза, что поршень поднимается с равномерной движущей силой. Такие гипотезы делают вычисление более легким. Однако я считаю, что будет более уместным дать общее уравнение, которое будет выражать, каково изменение в отдельные моменты в течение всего движения.

«2. Задача. Для этой цели представим себе, что трубка $ABCD$ (фиг. 47) погружена в бесконечную жидкость до высоты BH и что поршень поднимается, побуждаемый к движению (или встречающий препятствия к своему движению) избытком или недостатком высоты наружной водяной поверхности над внутренней, а главным образом некоторой посторонней движущей силой, все время изменяющейся; эту силу я изображаю грузом P, движущим вверх поршень при помощи блоков G и L. Из этих предпосылок следует, что вода, входящая через отверстие O, будет следовать за движением поршня. Требуется найти природу этого движения.

«Решение. Пусть в начале движения поршень находился в ST, пусть он переместился в положение EF; примем что отношение ширины цилиндра к ши-

рине отверстия ровно $\frac{n}{1}$ и что $CF = y$. Допустим, кроме того, что поршень в положении EF движется с такой скоростью, которая потребна, чтобы достигнуть высоты $\frac{v}{n^2}$. В таком случае скорость воды, вливающейся через отверстие O, будет такой, какая соответствует высоте V. Отдельные положения из числа указанных были разобраны также и в § 53 главы 5, где мы сразу же нашли следующее дифференциальное уравнение, интеграл которого нас здесь не интересует:

$$\frac{ydV + Vdy}{n} + nVdy = n(b - y)\,dy.$$

«Это уравнение было бы верно и для настоящего случая, если бы не было налицо груза P; чтобы учесть этот груз, мы сведем его к весу водяного цилиндра, имеющего такое же основание, что и предложенный цилиндр, а высоту его обозначим через Y, так чтобы вес его был равен nY. Так как до этого времени его актуальное падение равнялось $n(b-y)\,dy$, то теперь его надо положить равным $n(b-y)\,dy + nYdy$ или $\frac{n(b-y)\,dy}{n(b-y+Y)\,dy}$, поэтому окончательно уравнение будет

$$\frac{ydV + Vdy}{n} + nVdy = n(b - y + Y)\,dy.$$

«Это есть уравнение для всех частных случаев, а именно для всех тех, когда вес P (который мы будем рассматривать как переменную величину) или nY, задан через y.

«3. **Пояснение.** Из уравнения предшествующего параграфа легко вывести абсолютную мощь, затраченную на весь подъем поршня, выраженную через данный вес P или через заданную скорость, которая влечет его вверх. Но существует два вида абсолютной мощи, из которых одну я буду называть внешней, производимой присоединенным грузом (только эту силу приходится преодолевать рабочим), другую — внутренней, которая получается вследствие превышения или недостатка высоты наружной воды HI по сравнению с внутренней EF; поэтому она может быть и положительной и отрицательной. Внешняя абсолютная мощь получается путем умножения скорости $\frac{\sqrt{V}}{n}$ на вес или на движущую силу nY, прилагаемую извне, и на элемент времени, который получается при делении dy на скорость $\frac{\sqrt{V}}{n}$. Таким образом, получается $nYdy$, представляющая собой внешнюю абсолютную мощь для одного какого-нибудь момента времени. Сле-

довательно, вся абсолютная мощь будет равна $\int nY\,dy$. Таким же образом находится и в н у т р е н н я я а б с о л ю т н а я м о щ ь.

$$\int n\,(b-y)\,dy = nx\left(by + \frac{1}{2}\,y^2 - b\alpha + \frac{1}{2}\,\alpha x\right).$$

«4. **Следствие 1.** Отсюда понятно, что при прочих равных условиях а б с о л ю т н а я м о щ ь, которую должны затратить рабочие, пропорциональна числу n. Отсюда понятно, что отверстия, через которые должна втекать в цилиндр AC вода, должны делаться как можно большими и наиболее многочисленными. Таким путем может получиться так, что не понадобилось бы никакой в н е ш н е й д в и ж у щ е й с и л ы для того, чтобы тащить поршень назад, если только воду будут поднимать не слишком быстро и не далее наружной поверхности. В этом случае нет необходимости, чтобы поршень был совершенно плотно пригнан к внутренним стенкам цилиндра. Таким образом, можно осуществить способ сбережения силы, указанный в § 13.

«5. **Следствие 2.** Если внешнюю движущую силу, т. е. вес P или nY, принять равным нулю, то получается уравнение § 53 главы 5, а именно

$$\frac{y\,dV + V\,dy}{n} + nV\,dy = n\,(b-y)\,dy.$$

«Там же мы нашли и интеграл этого уравнения после прибавления нужной постоянной:

$$V = \frac{n^2 b}{n^2+1} - \frac{n^2 y}{n^2+2} - \frac{n^2 b}{n^2+1}\left(\frac{\alpha}{y}\right)^{n^2+1} + \frac{n^2 \alpha}{n^2+2}\left(\frac{\alpha}{y}\right)^{n^2+1}.$$

«В этом уравнении α (выражающее высоту воды в цилиндре, когда поршень начинает подниматься) можно принять равной нулю; тогда это уравнение переходит в следующее:

$$V = \frac{n^2 b}{n^2+1} - \frac{n^2 y}{n^2+2}.$$

«Итак, во всех случаях, когда поршень поднимается так, что вода вливается со скоростью, которая порождается высотой $\frac{n^2 b}{n^2+1} - \frac{n^2 y}{n^2+2}$, для этого поднятия не требуется совершенно никакой в н е ш н е й а б с о л ю т н о й м о щ и. Но так как вследствие этого движение поршня по большей части становится медленным, это должно сопровождаться некоторыми потерями, исключая лишь тот случай, когда число n не очень велико, когда цилиндр поршня погружен немного глубже и когда поршень поднимается на небольшую высоту.

«6. Однако не следует думать, что все эти попытки, применяемые с целью уменьшить или совершенно избежать труда по поднятию поршня, являются лишними и праздными. Чтобы убедиться, что это не так, рассмотрим на нескольких частных случаях, какова должна быть та в н е ш н я я а б с о л ю т н а я м о щ ь, которая требуется для того, чтобы поршень поднимался за такое же время, за какое он опускается; ведь так обыкновенно происходит и обязательно должно происходить во многих насосах.

«При рассмотрении этого вопроса примем, что в н е ш н я я д в и ж у щ а я м о щ ь — одна и та же в течение всего подъема поршня; такая гипотеза, конечно, больше всего подходит к естественному порядку вещей.

«При таком допущении подставим в общее уравнение § 2 этого экскурса nA вместо nY, т. е. примем, что вес имеет постоянную величину и повсюду тождествен с весом водяного цилиндра, основание которого равно EF, а высота равна A. Итак, мы будем исходить из уравнения

$$\frac{ydV + Vdy}{n} + nVdy = n(b - y + A)\,dy,$$

причем буквы, входящие в это уравнение, выражают те же количества, что и в § 2, на который мы только что ссылались. Интегральное же уравнение тождественно с тем, в правильности которого мы убедились в § 5 этого экскурса, если только вместо b подставить в него $b+A$, а именно оно будет таким:

$$V = \frac{n^2(b+A)}{n^2+1} - \frac{n^2 y}{n^2+2} - \frac{n^2(b+A)}{n^2+1} \times \left(\frac{\alpha}{y}\right)^{n^2+1} + \frac{n^2\alpha}{n^2+2} \times \left(\frac{\alpha}{y}\right)^{n^2+1}.$$

«Если и в этом случае принять α равным нулю (так как в начале подъема поршня в цилиндре обычно воды совершенно не бывает), то получается

$$V = \frac{n^2(b+A)}{n^2+1} - \frac{n^2 y}{n^2+2}.$$

После этих вводных замечаний я объединяю все последующее в следующей задаче.

«7. **Задача.** Найти отношение между а б с о л ю т н о й м о щ ь ю, потребной для подъема поршня, и а б с о л ю т н о й м о щ ь ю, потребной для его следующего за подъемом опускания, если принять, что и то и другое совершается за одинаковое время и с равной движущей силой.

«**Решение.** Пусть имеется насос AC (фиг. 47), погруженный на глубину $C = b$; пусть движущая сила, с которой поднимается поршень, равна весу водяного цилиндра, основание которого EF, а высота равна A; пусть отношение ширины цилиндра к отверстию O равно $\frac{n}{1}$; пусть высота CF, на которую поршень уже поднялся, равна y; пусть вся высота CD, на которую нужно поднять поршень, равна e; пусть высота, порождаемая ско-

ростью врывающейся воды, равна V; тогда, как мы только что нашли, получится

$$V = \frac{n^2(b+A)}{n^2+1} - \frac{n^2 y}{n^2+2},$$

откуда получим, что высота, порождаемая скоростью воды, движущейся внутри цилиндра, равна

$$\frac{b+A}{n^2+1} - \frac{y}{n^2+2},$$

а сама эта скорость равна

$$\sqrt{\frac{b+A}{n^2+1} - \frac{y}{n^2+2}}\,.$$

«Значит, элемент времени, в который поршень пробегает элемент пространства, равен

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{b+A}{n^2+1} - \frac{y}{n^2+2}}},$$

интеграл его после надлежащего прибавления постоянной дает все время (т. е. то время, за которое поршень поднимается на высоту e и которое я назову T):

$$T = (2n^2+4) \times \left(\sqrt{\frac{b+A}{n^2+1}} - \sqrt{\frac{b+A}{n^2+1} - \frac{e}{n^2+2}}\right).$$

«Следовательно, требуется найти, какова должна быть д в и ж у щ а я с и л а при опускании поршня, для того чтобы все опускание заканчивалось за такое же время T, т. е. какова должна быть высота водяного столба, находящегося над поршнем EF, для того чтобы он мог своей тяжестью извергнуть воды за определенное время. Примем, что эта высота равна F, а ширина отверстия, через которое извергается вода, равна m; тогда в силу этого допущения (с к о р о с т ь в о д ы, и з в е р г а е м о й ч е р е з м а л о е о т в е р с т и е, п р и б л и з и т е л ь н о т а к а я, к а к а я п о р о ж д а е т с я в ы с о т о й в н у т р е н н е й в о д ы, н а х о д я щ е й с я н а д о т в е р с т и е м) время, за которое извергается вся вода (которое я обозначу буквой θ),

$$\theta = \frac{2n}{m} \times \left(\sqrt{F+b} - \sqrt{F+b-e}\right)$$

и его надо принять равным T.

«Чтобы наше вычисление не стало без необходимости слишком длинным, подставим вместо количества $\sqrt{F+b-e}$ другое, почти равное первому:

$$\sqrt{F+b} - \frac{e}{2\sqrt{F+b}};$$

так как высота насоса обычно бывает весьма малой по сравнению с высотой, до которой извергаются воды, то против такой подстановки не может быть никаких возражений. В таком случае мы получаем

$$\theta = \frac{2n}{m} \times \frac{e}{2\sqrt{F+b}} = \frac{ne}{m\sqrt{F+b}} = T,$$

а следовательно,

$$F = \frac{n^2e^2}{m^2T^2} - b.$$

«После того как стали известны движущие силы, остается определить отсюда абсолютную мощь, и так как в силу § 2 этой главы абсолютные мощи относятся как движущие силы, помноженные на пройденные промежутки, а эти промежутки при подъеме и опускании поршня одни и те же, то абсолютные мощи относятся как движущие силы, т. е. как A к F. Отсюда следует, что вся абсолютная мощь, затраченная на подъем поршня, так относится ко всей абсолютной мощи, затраченной на опускание, следующее за подъемом поршня, как A к $\left(\frac{n^2e^2}{m^2T^2} - b\right)$, откуда

$$T = (2n^2 + 4) \times \left(\sqrt{\frac{b+A}{n^2+1}} - \sqrt{\frac{b+A}{n^2+1} - \frac{e}{n^2+2}}\right),$$

что и требовалось доказать.

«8. **Следствие 1.** Если отверстие, через которое вода вливается в насос, значительно меньше, чем основание поршня, как это обычно почти всегда бывает, и если время подъема насоса мало, то не трудно, не производя вычисления, убедиться в том, что в этом случае потребна большая движущая сила для подъема поршня, так чтобы высоты e и b были весьма малыми по сравнению с высотой A. В этом случае $\sqrt{\frac{b+a}{n^2+1} - \frac{e}{n^2+2}}$ может считаться равным $\sqrt{\frac{A-e}{n^2}}$ или же $\frac{1}{n}\sqrt{A-e}$, или же $\frac{1}{n}\left(\sqrt{A} - \frac{e}{2\sqrt{A}}\right)$ и $T = \frac{ne}{\sqrt{A}}$, причем абсолютная мощь, затраченная на подъем, относится к абсолютной мощи, затраченной на опускание поршня, приближенно как A к $\frac{n^2e^2}{m^2T^2}$ или как m^2 к 1, т. е. приближенно как квадраты отверстий, через которые вода извергается и вытягивается.

«9. **Следствие 2.** Далее, так как абсолютные мощи вообще относятся друг к другу как произведения движущих сил на расстояния, то абсолютные мощи для одних и тех же расстояний или для одних и тех же количеств втягиваемой или извергаемой воды будут относиться друг к

к другу, как движущие силы, т. е. как A, когда вода втягивается, или как F, когда вода извергается. Но если оставить в силе допущения, изъясненные в предыдущем следствии, то A и F относятся приближенно как корни из тех скоростей, с которыми поршень поднимается или опускается, или они обратно пропорциональны корням из времени наполнения и опорожнения. Итак, из сопоставления обоих следствий станет ясным то, что я сказал в конце § 16, что абсолютная мощь, потребная для поднятия поршня, так относится к абсолютной мощи, потребной для его опускания, как квадрат отверстия, из которого выливается вода, разделенный на корень из времени, затраченного на подъем поршня, к квадрату отверстия, через которое вливаются воды, разделенному на корень из времени, затраченного на опускание поршня.

«10. **Пояснение.** Абсолютная мощь при подъеме поршня может быть по нашему усмотрению уменьшена при помощи двух способов сбережения силы — именно путем воздействия на медленность движения и на величину отверстия, через которое вливается вода. Но если таким способом эта мощь будет очень уменьшена, то не вполне подойдет то, что было сказано в двух последних следствиях; в этом случае вычисление должно быть поставлено согласно последней пропорции этой задачи.

«Так, например, пусть высота e всего цилиндра будет равна 2, высота погруженной части $b=1$, а время, за которое цилиндр поднимается, будет равно времени, за которое он опускается. В таком случае абсолютная мощь при втягивании воды будет в силу следствия так относиться к абсолютной мощи при ее извержении, как 1 к 9. Однако согласно заключительной части предыдущей задачи в действительности это отношение равно 1 : 8.2. Отсюда можно сделать вывод, что правила, содержащиеся в этих следствиях, можно почти всегда считать приближенно верными, однако при этом абсолютная мощь при поднятии поршня получается немного меньше истинной. Я считал, что будет кстати указать на это по поводу нашего восьмого правила, а теперь вернемся к тому, на чем мы остановились. [*Б.*].

[67] (к стр. 251). В рукописи вместо последней фразы § 19 читается:

«Струя воды не может подняться более чем на высоту $a - b$, ибо нет ничего, что могло бы сообщить поднимающейся воде больший потенциальный подъем. Это можно подтвердить опытом, если о скорости вытекающей воды судить по высоте вертикальной бьющей струи, а по этой скорости — о количестве воды, вытекающей за данное время через данное отверстие.

«Но, если я не ошибаюсь, количество окажется меньшим в вычислении, чем на опыте. Так, например, пусть высота бьющей струи будет равна 15 парижским футам и 1 дюйму, — это та высота, которую свободно проходит при своем падении тяжелое тело, вышедшее из состояния покоя за 1 сек.; пусть величина

отверстия равна 1 кв. дюйму. Значит, через это отверстие должно протекать в каждую секунду 362 кв. дюйма, а за 1 мин. 21 720 кв. дюймов. Как я полагаю, может случиться, что вытечет и большее количество воды. Однако же, повидимому, разница окажется не очень чувствительной. Впрочем, мне ясно также, что все эти капли не могут подняться до одной и той же высоты. Действительно, те капли, которые находятся около отверстия струи, поднимутся на меньшее отверстие, чем те, которые находятся в середине ее. Но это различие я не буду принимать во внимание.

«Если вдуматься в это, то станет ясным, что даже в том случае, когда эта абсолютная мощь не терпит никакой другой потери, она уменьшается уже в силу сказанного, причем эта потеря будет относиться ко всей абсолютной мощи, как b к a. Однако же, никакая теория не смогла бы достаточно точно определить, какой в точности будет эта потеря. Наоборот, на это мог бы указать только опыт, при помощи которого мы могли бы узнать скорость вытекающей воды, определив ее по количеству воды, извергнутой за заданное время. Отсюда уже можно узнать порождающую эту скорость, и если сравнить эту высоту с той высотой, до которой вода поднимается в действительности, то мы получим отношение всей абсолютной мощи к той ее части, которая произвела полезное действие в этом отношении». [*Б.*].

[68] (к стр. 252). Ajutages — дополнительные трубки. [*Б.*].

[69] (к стр. 254.) В рукописи доказательство дано. Приводим его, так как оно показывает, с какой поразительной ясностью Бернулли мыслил о том, что мы теперь называем работой.

«**Правило II.** Пусть теперь тело перенесено до данной вертикальной высоты a не по вертикальной линии, но по какой угодно кривой, с движущей силой, все время изменяющейся, но приложенной в направлении движения; пусть во всех случаях скорость тела в наивысшем месте либо равна нулю, либо всегда одна и та же; в таком случае будет всегда одной и той же абсолютная мощь, затраченная на весь подъем груза.

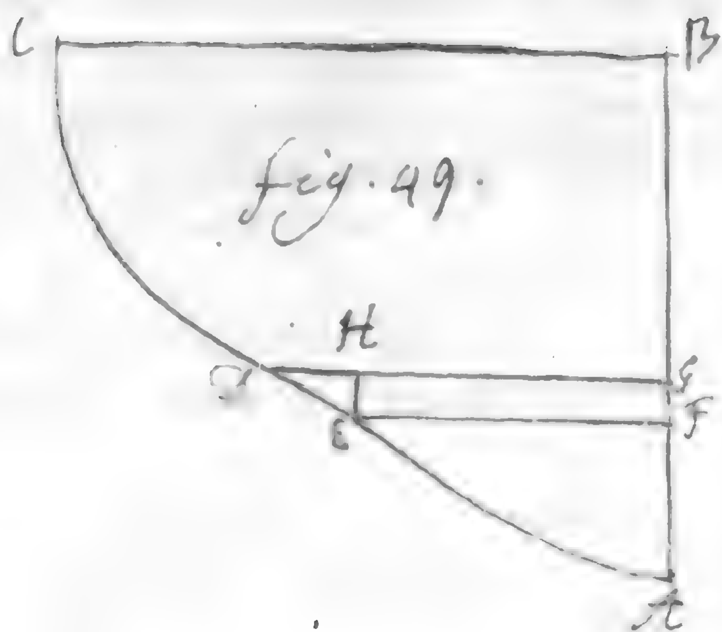
«Правило это доказывается так: пусть имеется тело, вес которого я обозначу через A, которое надо поднять по кривой AC (фиг. 49) до точки C; проведем горизонталь CB и вертикаль AB. Пусть тело пришло в E; проведем горизонтальные прямые EF и DG, бесконечно близкие друг к другу, а также вертикаль EH. Обозначим AB через a; пусть $AF = y$, $FG = dy$; $AE = s$; $ED = ds$, пусть скорость тела в $E = v$, пусть движущая сила, влекущая тело в прямом направлении (т. е. в направлении ED) из положения E в ближайшее к нему положение $D = P$. Тогда абсолютная мощь, затраченная на это бесконечно малое перемещение, равна $P \times v \times \frac{ds}{v} = Pds$, а вся абсолютная мощь, затраченная на все поднятие, равна $\int Pds$. Но если движущая сила равна P, то ускоряющая сила

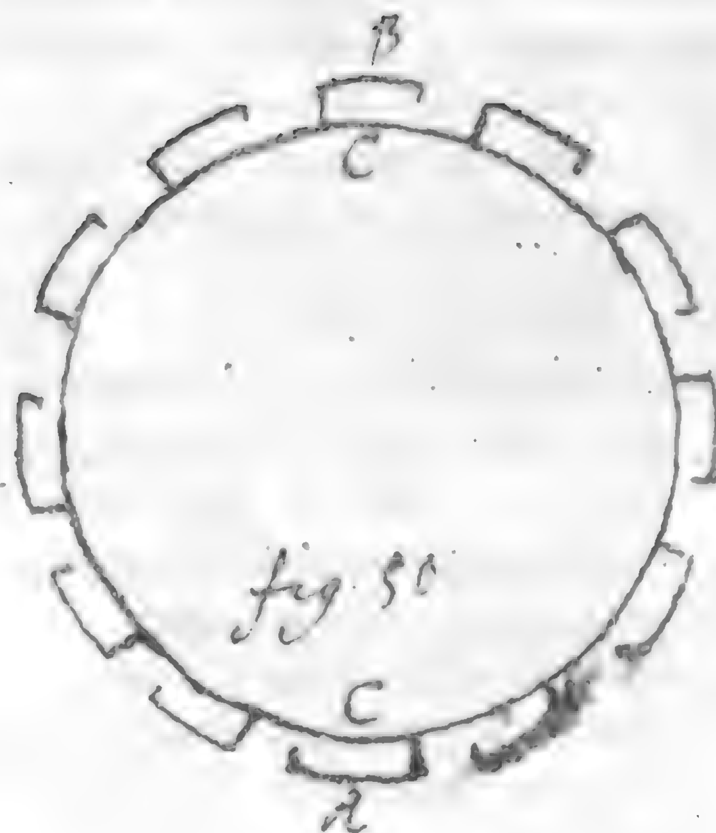
тела, находящегося в E, равна $P - A\frac{dy}{ds}$; если помножить ее на элемент времени $\left(\text{за которое тело перемещается из } E \text{ в } D \text{ и которое равно } \frac{ds}{v}\right)$, то мы получим приращение скорости; откуда

$$dv = \left(P - \frac{Ady}{ds}\right)\frac{ds}{v}.$$

«Следовательно, $vdv = Pds - Ady$, $Pds = vdv + Ady$, а $\int Pds = \frac{1}{2}v^2 + Ay$.

«Если вместо y подставить a, а вместо v любую постоянную c, то вся





абсолютная мощь будет равна $\frac{1}{2}c^2 + Aa$, и притом постоянно одна и та же, и если в высшей точке скорость тела равна нулю, то получится $c = 0$, а абсолютная мощь и в этом случае будет равна Aa». [*Б.*].

[70] (к стр. 255). «Четки» по отдаленному сходству ряда черпаков с рядом четок. [*Б.*].

[71] (к стр. 256). В рукописи содержание § 27 изложено следующим образом:

«Вот, примерно, все те противодействия, которые, как кажется, могут иметь некоторое значение. Все прочее, что в достаточной мере явствует из нашей теории, я опускаю.

«Тот, кто сможет устранить каждое из этих препятствий, будет иметь машину, дальнейшее усовершенствование которой уже невозможно, и тот, кто будет пытаться достигнуть большего, покажет лишь, что он недостаточно знаком с природой этого вопроса.

«В тех случаях, когда воду поднимает барабан или колесо, снабженное черпаками, я полагал бы, что значительной части трения можно избежать, если ось барабана покоится на двух блоках; поэтому этот тип машин следовало бы предпочесть остальным, которые не извергают, а поднимают воду. Сами черпаки так устроены, что, находясь в самом низком положении, сразу же наполняются, а в высшем — сразу выливают всю воду; во время поднятия из них не может разбрызгиваться даже малое количество воды. Сечение такого барабана, перпендикулярное к оси, изображено на фиг. 50, на которой ясно видно, что нижний черпак в положении A сразу же наполняется и что во время подъема вода совершенно не выливается из него; она выливается только в наивысшем положении B, если только глубина BC или AC незначительна. Если воду надо вылить по другую сторону от высшего уровня в другое место, находящееся на меньшей высоте, то в том случае, если разница между той и другой высотой весьма значительна, надо приложить старание, чтобы напор падающей воды несколько содействовал движению барабана. Колесо должно приводиться в движение при помощи ног, ибо к такой работе люди наиболее привычны; для того чтобы полезность работы для черпания воды была наибольшей, необходимо при помощи опыта исследовать, каков должен быть наклон плоскости или склон какой-либо горы, для того чтобы рабочий за то же время и при той же степени усталости мог бы, двигаясь вперед, пройти наибольшую высоту, считая по вертикальной линии. Так, если наклон плоскости окажется, например, в 30°, то машину надо устроить так, чтобы рабочие, ступая обычным образом по колесу, постоянно останавливались на расстоянии в 30° от нижней точки, и если какой-либо человек, весящий 200 фунтов (72 фунта я буду принимать равным 1 куб. футу воды), может за час пройти по дороге, имеющей наклон к горизонту до 30°, расстояние в 6000 футов, то он сможет, прилагая столько же труда и ступая ногами в течение 1 часа, поднять $\frac{6000}{2}\times 200$, или 600 000 фунтов воды, на высоту в 1 фут или 60 000 — на высоту в 10 футов, или $\frac{600\,000}{n}$ фунтов — на высоту в n футов, а это равняется $\frac{8333}{m}$ куб. футов на высоту в m футов. Это вычисление производится, исходя из предположения, что сам человек за это время поднялся бы на высоту в 3000 футов над горизонтом, если бы он не ступал по колесу: одновременно делается, однако, предположение, что машина во всех отношениях совершенна; если же воды будут подняты, как это постоянно бывает, меньше, чем указывает это вычисление, тогда то, что остается, так относится ко всему числу, как абсолютная мощь, примененная без пользы, ко всей затраченной абсолютной мощи. Следовательно, таким способом можно найти потерю в этих машинах, и только что определенный результат можно справедливо назвать результатом, который не может быть полностью достигнут». [*Б.*].

[72] (к стр. 257). Вейдлер Иоганн Фридрих (Weidler Johann Friedrich, 1691—1755) — немецкий астроном и математик. Ему принадлежит трактат «О гидравлических машинах» (Tractatus de machinis hydraulicis), печатавшийся в 1728—1733 гг. [*Б*.].

[73] (к стр. 262). В рукописи в этом месте фраза, заключенная в скобки: «(Это количество q можно найти при помощи такого опыта: будем наливать воды в улитку через отверстие f, находящееся в самом высоком месте, до тех пор, пока она не начнет вытекать через второе отверстие, которое вслед за этим надо заткнуть пальцем; затем выльем всю воду, содержащуюся в улитке, в какой-либо сосуд; ее количество, разделенное на число витков, будет равно q)». [*Б*.]

[74] (к стр. 265). В рукописи после слов «равно 1 8800» читается:

«Опять получится 1.90878. Этому условию мы прекрасно удовлетворим, если примем, что окружность круга равна c и положим $x = c + y$, а $1 + x = \frac{1}{2} y^2$. Легко предвидеть, что искомая дуга окажется немного большей, чем c, так что x надо будет принять за отрицательное количество, причем в виду малости количества y можно будет принять, что $1 - x = \frac{1}{2} y^2$; в таком случае, очевидно, получится $0.60000\,(c + y) + 0.40000\,y^2 = 1.90878$ или, приняв $c = 3.1417$, найдем: $4y^2 + 6y = 0.2376$, откуда $y = 0.0386$. Это значение соответствует дуге в 2°12′. Итак, вся дуга $x = 182°12'$, тогда как в предыдущем случае дуга ag была равна 48°35′; итак, разница дуг равна 133°37′, и поскольку эта дуга так относится ко всей окружности, как дуга opq витка улитки ко всему витку, то отсюда следует, что a относится к h, как 8017 к 21 600. Итак, в улитке, если применять ее по способу Витрувия, никогда не могло бы получиться, чтобы при каждом обороте выливалось $^2/_5$ того количества, которое содержит каждый виток, будучи целиком наполнен водой». [*Б*.].

[75] (к стр. 266). При переводе для внесения ясности употребленное Д. Бернулли слово «ядро» заменено словом «цилиндр», так как речь идет о цилиндре, как носителе витков. [*Н*.].

[76] (к стр. 271). Никаких сведений об итальянце Франкини (Franchini Italus) найти не удалось. [*Б*.].

[77] (к стр. 272). Фонтана — см. примеч. [34]. [*Б*.].

[78] (к стр. 276). Здесь Д. Бернулли затрагивает вопросы аэродинамики, которой во времена Д. Бернулли еще не существовало; лишь более чем через 150 лет сделалось возможным теоретически разрешать эти вопросы. [*Н*.].

[79] (к стр. 280). Из семьи Деларивов вышел ряд более или менее известных швейцарских ученых. Упомянутый Д. Бернулли Деларив — отец очень известного Шарля Гаспара Деларива (De la Rive Charles Gaspar, 1770—1834) — профессор Женевской Академии, выдающийся общественный деятель Швейцарии.

Каландрини Жан (Calandrini Jean Louis, 1703—1758) — швейцарский ученый, профессор математики и философии в Женеве.

Крамер Габриель (Cramer Gabriel, 1704—1752) — профессор математики и философии Женевской Академии наук. Им изданы «Труды Ивана Бернулли» (Les oeuvres de Jean Bernoulli, 1741), «Труды Якова Бернулли» (Les oeuvres de Jack Bernoulli, 1744) и «Переписка Лейбница с Иваном Бернулли».

Жаллабер Луи (Jallabert Louis, 1712—1768) — профессор физики Женевской Академии наук. [*Б.*].

[80] (к стр. 282). В рукописи этот параграф является § 2. Ему предшествует следующий параграф, отсутствующий в книге:

«§ 1. Существуют в природе вещей явления, которые превышают разум человеческий; к ним я причисляю тяжесть, твердость, упругость и другие явления того же рода; действительно, многие уже придумали разнообразные объяснения этим первичным свойствам тел; некоторые из этих объяснений чрезвычайно замечательны и остроумны, однако же никто не придумал таких объяснений, которые были бы вполне удовлетворительными. Но среди всех этих гипотез, относящихся к упругости, нет ни одной (почему бы не сказать этого?), которая мне нравилась бы больше, чем гипотеза моего отца. Он первый подверг рассмотрению вихревое движение некой тонкой материи, центробежная сила которой может произвести упругость как в твердых, так и в жидких телах. Эту гипотезу мой отец подробно изъяснил в специальном исследовании, изданном в Париже; она так понравилась нашему Эйлеру, что он изложил все свойства воздуха, которые могут быть обоснованы геометрически с точки зрения теории моего отца, в «Комментариях Петербургской Академии наук» (т. II, стр. 347). В нашу задачу не входит в данном случае приводить здесь все, что было придумано указанными учеными мужами; я хочу только напомнить кое-что, что могло бы дать представление о воздухе, как обладающем теми свойствами, которые до сих пор известны. Если кто-нибудь вменил бы мне в обязанность дойти до первопричин, то я предпочел бы для объяснения упругости тел взгляд моего отца всем другим. Но так как сейчас речь идет не об этом, то я позволю себе вообразить жидкость, имеющую свойства воздуха, и говорить вместо воздуха о ней, хотя структура частиц, составляющих эту воображаемую жидкость, основной характер движения и все прочие их свойства будут оставаться совершенно неизвестными». [*Б.*].

[81] (к стр. 282). Ввиду исключительной важности высказываний Д. Бернулли о природе газа, привожу здесь полностью более подробную редакцию этого параграфа в рукописи:

«§ 3. Пусть имеется цилиндрический сосуд *ACDB* (фиг. 56), крышка *EF* которого совершенно свободно движется; представим себе, что весь сосуд как бы помещен в пустоте, но что его крышка несет на себе груз *P*; пространство *ECDF* заключает в себе мельчайшие тельца, обладающие чрезвычайно быстрым и постоянно равномерным движением во все стороны; таким образом, эти частицы

будут взаимно ударяться друг о друга и, получив удар, отскакивать или отталкиваться. Некоторые из них будут ударяться о крышку *EF*, одни в прямом, но большая часть в косом направлении. Эти непрерывные толчки препятствуют крышке опуститься вниз; если бы эти тельца не двигались, крышка опускалась бы до тех пор, пока частицы не соприкоснутся вплотную друг с другом и не займут минимального пространства. При таких предпосылках я утверждаю, что жидкость будет иметь все свойства воздуха, а именно: она будет тяжелой, если сами частицы будут тяжелыми; она сможет сгущаться до тех пор, пока тельца не займут наименьшего пространства, а расширяться они смогут сколько угодно; она будет упругой, поскольку будет расширяться актуально, если убрать или уменьшить груз.

Наконец, очевидно само по себе, что непрерывно повторяющийся напор минимальных телец может задержать груз, пропорциональный (при прочих равных условиях) числу толчков. Число толчков, если скорость, как мы положили, будет оставаться неизменной, зависит от пространства, не занятого частицами, рассеянными по *ECDF*, и если объемом всех телец пренебречь по сравнению с пространством *EFDC*, как это, пожалуй, можно сделать при не очень сгущенном воздухе, упругости будут вполне пропорциональны плотностям; но так как объем всех телец не совсем равняется нулю по сравнению с пространством *EFDC*, особенно же в очень плотном воздухе, то упругости будут возрастать в несколько большем отношении, чем плотности (ниже мы покажем это при помощи более детального вычисления).

«При таких условиях все явления воздуха вполне удобно объясняются из предпосылок, которые мы позволили себе сделать. Если бы кто-нибудь спросил бы у меня, каким образом смогло бы сохраняться непрерывное движение частиц во всех направлениях без изменения скорости и откуда она берет свое начало, то я должен буду признаться, что мне и самому это неизвестно; ибо я вовсе не утверждаю, что воздух таков, а только воображаю его таким. Если же эти предположения не встретят у кого-либо сочувствия, то я не возражаю против того, чтобы он вообразил себе другую материю, много более тонкую и вращающуюся с чрезвычайной скоростью вокруг земли; поскольку она постоянно ударяет в частицы воздуха, а не проходит свободно мимо них, она вызывает в них движение. Он должен будет утверждать, что эта двоякая материя вращается вокруг земли в противоположных направлениях для того, чтобы (что получилось бы в противоположном случае) воздушные частицы (так мы будем их называть) не уносились, отрываемые этой тонкой материей. Большая часть физиков утверждает существование такой материи, движущейся в водовороте вокруг земли; множественность вихрей совершенно необходима для объяснения очень многих явлений, и сам Гюйгенс не без основания приписал этой тонкой материи такую скорость, что она за 24 часа может 14 раз пробежать всю окружность земли; такая скорость далеко превосходит ту скорость, которую необходимо постулировать в воздушных частицах для объяснения упругой силы воздуха, так что

движение этих частиц могло бы в большой степени сохраняться. Можно будет допустить, что это внутреннее движение воздушных частиц имеет источником солнечные лучи, если только будет установлено, что теплота, каково бы ни было ее происхождение, либо заставляет воздух расширяться, либо в случае, если отсутствует место для такого расширения, вызывает в нем большую упругость; тогда было бы определенно установлено, что движение воздушных частиц усиливается в результате действия солнечных лучей. В таком случае, почему же не считать, что и всякое вообще движение этих частиц имеет своим источником солнечные лучи?

«Теперь, в подтверждение этой гипотезы, тщательно проследим, произведя точное вычисление, каково должно быть отношение между плотностями и упругостями жидкости в каждой точке, а также некоторые другие явления». [*Б.*].

[82] (к стр. 283). Этими немногими фразами формулируется основание кинетической теории газов, которая, однако, была создана лишь более века спустя, мысли же Д. Бернулли были позабыты. Также были позабыты и аналогичные мысли по теории газов, которые немного позднее Д. Бернулли высказал Ломоносов.

Таким образом, Д. Бернулли и Ломоносов должны почитаться первыми зачинателями кинетической теории газов, но не имевшими продолжателей вследствие того, что наука еще не была подготовлена к развитию этих мыслей. [*Н.*].

[83] (к стр. 283) Небольшой отдел десятой части «Гидродинамики», а именно все высказывания Бернулли по кинетической теории газов, более чем через 100 лет были переведены на немецкий язык и напечатаны сначала в отдельной брошюре, а потом в известном журнале Poggendorf's Annalen (Pogg. Ann., 99, стр. 315, 1857). В пятидесятых годах XIX в., наконец, кинетическая теория газов пробила себе дорогу. Любопытно, что ее творцы, Клаузиус и Крониг, ничего не знали о работах своих предшественников. [*Б.*].

[84] (к стр. 285). Здесь Д. Бернулли подходит к теоретическому выводу закона Бойля-Мариотта и предвидит, что при сильном сжатии газа закон будет другим, т. е. он как бы предвидит существование закона Ван-дер-Ваальса. [*Н.*].

[85] (к стр. 286). Амонтон Гильом (Amontons Guillaume, 1663—1705) — физик, член Парижской Академии наук. Ему принадлежит идея оптического телеграфа, конструкция ряда приборов и теория трения. [*Б.*].

[86] (к стр. 287). Легко показать неправильность расчета Бернулли, отношение $\frac{523}{1000}$ было бы выполнено при температуре —78°по стоградусному термометру. До такой температуры в Петербурге термометр не опускался и при сильнейших морозах. Только в 1958 г. впервые такие низкие температуры были наблюдены в Антарктиде. То же замечание относится и к другим подсчетам на стр. 287. Заметим, что закон Гей-Люссака не был известен во времена Д. Бернулли. [*Б.*].

[87] (к стр. 293). Д. Бернулли хочет этим сказать, что в газе давление определяется упругостью газа, а не его весом. [*Н.*].

[88] (к стр. 294). Дюгамель Жан (Duhamel Jean Baptiste, 1624—1706) — французский астроном, физик и богослов, непременный секретарь Парижской Академии наук, написал историю Парижской Академии наук. [*Б.*].

[89] (к стр. 299). Шейхцер Иоганн Яков (Scheuchzer, 1672—1733) — врач и профессор физики в Цюрихе. Может быть Бернулли имеет в виду его брата Иоганна Шейхцера (1684—1738), преемника первого. Он написал книгу «О явлениях в жидкостях» (De meteoris aquaeis). [*Б.*].

[90] (к стр. 300). В рукописи здесь следующее добавление:

«Здесь надо искать причину того, что упругость воздуха на различных высотах атмосферы не соответствует ординатам логарифмической кривой, если взять за абсциссы отрезки, пропорциональные высоте этих мест над морем. Действительно, геометры сделали правильное наблюдение, согласно которому следовало бы, чтобы логарифмическая кривая представляла собой график упругости и высот, если принять, что упругости в любом месте атмосферы относятся друг к другу как плотности. Но так как в этом вопросе данные произведенных опытов совершенно не совпадают с логарифмической кривой, приходится сказать, что правило Мариотта, согласно которому у п р у г о с т ь в о з д у х а п р о п о р ц и о н а л ь н а е г о п л о т н о с т и, не всегда верно, хотя нельзя не согласиться, что в одних и тех же местах правило это приближенно верно. Причина этого может заключаться в том, что воздушные частицы на различных высотах движутся с разными скоростями, а на одной и той же высоте частицы воздуха, какой бы плотностью они ни обладали, движутся постоянно с одной и той же скоростью, если только сюда не присоединится посторонняя причина, каково, например, различие температур. Некоторое значение следует также придавать величине воздушных частиц, вследствие чего получается, что, хотя скорость этих частиц и остается неизменной, но тем не менее упругости не вполне соответствуют плотностям. Однако это не существенно, как показывают опыты, касающиеся сгущения, и поэтому не заслуживает того, чтобы быть здесь подвергнутым рассмотрению. Впрочем, я не был первым, усомнившимся в том, что упругость воздуха на различных высотах зависит только от его плотности, и предположившим, что она зависит и от других причин, но о том, что это за причины, поскольку я знаю, никто ничего не сказал. В «Комментариях Парижской королевской Академии наук» за 1708 г. (Париж, стр. 15) содержится такой вопрос: «Н е с л е д у е т л и р а с с м а т р и в а т ь в о з д у х, к о т о р ы й п р о с т и р а е т с я о т п о в е р х н о с т и з е м л и д о в е р ш и н г о р, к а к в е щ е с т в о р а з н о р о д н о е и в р а з л и ч н о й м е р е п о д в е р ж е н н о е р а с ш и р е н и ю в с в о и х р а з л и ч н ы х ч а с т я х» и т. д. Этот вопрос указывает как раз на то, на что я только что обратил внимание.

«Поэтому, поскольку многие, не проверив дела опытами, продолжают придерживаться логарифмической кривой, рассмотрим здесь, насколько она отступает от действительной кривой упругостей». [*Б.*].

[91] (к стр. 300). Делиль Иосиф (Delisle Joseph Nicolas, 1688—1768) —французский ученый, член Парижской Академии наук с 1714 г., с 1725—1747 гг. член Петербургской Академии наук, в 1747 г. вернулся в Парижскую Академию. Автор многих работ в области астрономии и физики. Изобретатель термометра Делиля. [*Б.*].

[92] (к стр. 301). Фейе Людовик (Feuillet Louis, 1660—1732) — астроном и ботаник. Основное сочинение: «Дневник наблюдений физических, математических, ботанических и т. д.» (1714) и «Продолжение дневника» (1725). [*Б.*].

[93] (к стр. 306). В рукописи это место имеет такое заключение:

«Безусловно поразительно совершенное согласие между опытом 3 и результатом вычисления, так как опыт был сделан в самой высшей точке — я не подгонял чисел к этому опыту. Из этой теории следует, что на поверхности моря опускание барометра на 1 линию соответствует спуску на $65^2/_3$ фута; таким образом, отсюда следует, что высота атмосферы бесконечно велика.

«На этом мы закончили исследование об упругости». [*Б.*].

[94] (к стр. 307). Неправильность этого утверждения Д. Бернулли очевидна. [*Б.*].

[95] (к стр. 309). Гауксби Френсис (Hawksbee Hauksbee Francis) — английский ученый, занимал должность экспериментатора (curator of experiments) при Лондонском королевском обществе, с 1705 г. — член Королевского общества, умер около 1713 г. Бернулли могли интересовать следующие его работы: «О весе обыкновенной воды при разных обстоятельствах» (1709); «О представляющемся произвольном поднятии вод» (1709); «О точке замерзания обыкновенной воды и воды, освобожденной от воздуха» (1709); «Опыты, касающиеся двух жидкостей, уменьшающихся в объеме при смешении» (1711). [*Б.*].

[96] (к стр. 309). Бернулли всегда сокращенно и довольно небрежно дает названия классических сочинений; очевидно, считая их хорошо известными его современникам. Здесь имеется в виду известный трактат Ньютона: «Оптика» («Optics»). Имеется русский перевод этой книги, сделанный академиком С. И. Вавиловым. [*Б.*].

[97] (к стр. 310). На фиг. 60 пропущена буква *e* при точке пересечения прямой *Bo* с другой ββ окружности. [*П.*].

[98] (к стр. 313.) Фаренгейт Габриель Даниель (Fahrenheit Gabriel Daniel, 1686—1736) — английский ученый, член Лондонского королевского общества. Главные исследования относятся к термометрии. Фаренгейт открыл явление переохлаждения воды. [*Б.*].

[99] (к стр. 313). Начало § 32 в рукописи читается следующим образом:

«. . . это отношение не что иное, как высота атмосферы, которую мы в § 13 назвали о д н о р о д н о й. Эту высоту можно получить, помножив высоту ртути в тщательно сконструированном барометре на отношение между удельными весами ртути и воздуха. Но средняя высота ртути в барометре равна $2^1/_3$ парижских футов, а среднее отношение между удельным весом ртути и воздуха равно

11 333 к 1. При таком допущении средняя высота однородной атмосферы равна приблизительно 26 000 парижских футов. Итак, первой степенью тепла может быть названа такая, при которой высота однородной атмосферы равна 26 000 парижских футов, а она может быть разделена на 1000°. Если это так, то я покажу, каким образом в каждом отдельном месте может быть определена степень тепла.

«Пусть, например, требуется определить, какова температура на поверхности моря при постановке третьего опыта § 8 около горы Пико. Так как высота этой горы, согласно вычислению, оказалась равной 13 158 футам, а этой высоте соответствует опускание ртути на 125 линий, то это показывало бы (если бы только воздух всюду имел одинаковую плотность), что отношение между удельным весом ртути и воздуха было равно отношению указанных выше высот. Но так как в действительности плотность воздуха была меньшей, то следует рассуждать таким образом. Мы должны сказать, что высота в 13 158 футов соответствует высоте такого однородного воздуха, который находится на поверхности моря:

$$\frac{22\,000}{22\,000+13\,158}+13\,158=\frac{289\,476\,000}{35\,158}=8233.$$

«Итак, на поверхности моря удельный вес ртути так относится к удельному весу воздуха, как высота в 8233 фута к высоте в 125 линий, т. е. как 9484 : 1. Следовательно, там высота однородной атмосферы была равна $\frac{9484}{12}\times 27\frac{5}{6}=\frac{2200}{26\,000}=$ [недописано].

«§ 16. Теперь я скажу вкратце, каково мое собственное мнение о нашей гипотезе. Я не решился бы прямо утверждать, что все точно так и обстоит, как было указано. Однако я не считал бы правильным просто отбросить все сказанное, так как многое в достаточной мере совпадает с данными опыта, и мне до сих пор неизвестно ни одного опыта, который противоречил бы этой теории Но я вполне убежден в том, что если дана шкала скоростей, с которыми воздушные частицы или движутся, или можно представить, что они движутся, то нет никаких явлений, относящихся к упругости воздуха или к его плотности, или, наконец, к скорости звука в воздухе, которого нельзя было бы правомерно вывести из этой шкалы. Эту же шкалу можно получить только путем догадок, основанных на различных опытах; пока же, как я полагаю, неплохо принимать $v=\sqrt{a+x}$ до тех пор, пока другие опыты не заставят нас сделать иное допущение.

«Следовало бы еще высказаться по вопросам равновесия воздуха с другими жидкостями и особенно о взвешенном состоянии ртути в Торричеллиевых трубках, об изменениях этого состояния и о другом; но так как правильные и тонкие замечания об этом были уже сделаны другими, а также потому, что ответ на эти вопросы может быть легко выведен из наших предпосылок, то, как я думаю, будет более целесообразным, если я приведу здесь еще несколько примеров, касающихся воздуха, движущего самого себя или другие тела». [*Б.*].

[100] (к стр. 314). Другими словами границы скорости звука относятся как $\sqrt{3} : \sqrt{4}$ или как 173 : 200. [*Н.*].

[101] (к стр. 319). В рукописи содержится еще один абзац о плотности воздуха в ветре:

«Так как вытекающий воздух имеет ту же плотность, что и воздух, заключенный внутри, и сохраняет ее неизменной, пока не уменьшится скорость, то отсюда следует, что воздух—ветер плотнее неподвижного, и притом он тем плотнее, чем с большей скоростью он движется, хотя разница между плотностью того и другого почти неощутима. Действительно, скорость вытекающего воздуха равна $\sqrt{A - \frac{\delta A}{x}} = \sqrt{26\,000 - \frac{26\,000\delta}{x}}$ (если принять $A = 26\,000$), поэтому, если мы примем, что ветер пробегает 30 футов в 1 сек. причем воздух достиг уже большой силы, т. е. если скорость ветра принять равной $\sqrt{15}$, то получим, что $\sqrt{26\,000 - \frac{26\,000\delta}{x}} = \sqrt{15}$, или $\frac{x}{\delta} = \frac{26\,000}{25\,985}$, где $\frac{x}{\delta}$ выражает отношение плотности воздуха, гонимого ветром, и воздуха, находящегося в состоянии покоя. Однако, как я покажу ниже, упругость воздуха, гонимого ветром, не будет по этой причине больше упругости воздуха, находящегося в состоянии покоя. [*Б.*].

[102] (к стр. 320). В рукописи это место изложено следующим образом и к нему непосредственно примыкает рассуждение о силе сжатого газа в стволе орудия:

«. . . чем меньше A, тем медленнее происходит наполнение до точки равновесия. Уменьшается же A либо по причине уменьшения веса атмосферы, т. е. в том случае, когда ртуть в барометре падает, либо по причине падения температуры.

«Так как A согласно нашему предположению возрастает тем больше, чем выше над уровнем моря находится то место, которое выбрано для наблюдения, то отсюда при прочих равных условиях следует, что сосуд тем скорее наполнится до возможного предела, чем на большей высоте он будет находиться.

«Если емкость сосуда, взятого для наблюдения, будет и в этом случае равна 1 куб. футу, а отверстие 1 кв. линии, и если будет взято место, находящееся не очень высоко над поверхностью моря, то получится, что L=20 736, а A=26 000; при этом n=33.11; следовательно, в этом случае наполнение происходит за несколько большее время, чем 33 сек.».

«§ 21. **Пояснение.** Я решил присоединить к своему исследованию эти задачи не только для того, чтобы показать метод решения, чрезвычайно легкий, но главным образом потому, что я буду применять их в дальнейшем, и для того, чтобы стало ясно, что существуют вопросы, зависящие от высоты однородной атмосферы, так что эта высота может быть непосредственно определена без

предварительного установления плотности воздуха или высоты ртути в барометре, а только из одних наблюдений времени. Это бы могло служить и для определения точной степени теплоты, как это ясно из § 15, если бы только опыты такого рода можно было бы поставить с надлежащей точностью. Быть может, можно было бы ожидать большей точности в постановке опытов, если бы сосуд, взятый для наблюдения, был оснащен ртутным указателем, вроде колокола воздушного насоса, при помощи которого плотность внутреннего воздуха по сравнению с наружным может быть получена в каждый отдельный момент. Сюда относится движение жидкостей, перемещающихся в протекающих через очень малое отверстие, частью под действием собственной тяжести, частью под действием других свойств воздуха. Но так как мы уже в целом ряде мест дали общие правила для этих вычислений, а также потому, что этот вопрос ясен каждому сам по себе, я не буду останавливаться на вопросах такого рода. Более полезным будет, как я полагаю, сказать несколько слов о поразительном действии сгущенного воздуха в пневматических ружьях; это дает нам случай вывести некоторые, еще не сделанные другими заключения над порохом и его специфическими свойствами по отношению к сгущенному воздуху. Для этой последней цели необходимо:

«1. Чтобы при помощи опыта была установлена сила, с которой порох действует на ядро, выброшенное из пушки. Этот опыт может быть поставлен так, что будет наблюдаться время, затраченное ядром данной величины и удельного веса, выброшенным вертикально в воздух, на подъем и падение. При помощи такого наблюдения времени можно найти высоту, которой может достигнуть ядро в воздухе, как в среде, оказывающей противодействие, а на основании этой высоты уже можно определить и ту высоту, которой может достигнуть ядро при той же начальной скорости (т. е. при той же силе взрыва) в пустоте, а эта последняя высота является, наконец, мерой силы, сообщенной ядру порохом Как произвести вычисление при опытах такого рода, я показал в «Комментариях Петербургской Академии наук» (т. 2).

«2. Необходимо еще выяснить, сколь велика та сила воздуха или воспламененного пороха, которая пропадает без пользы, выходя через запальник или через промежуток, остающийся между ядром и каналом ствола пушки». [*Б.*].

[103] (к стр. 324). В рукописи Д. Бернулли указывает на возможность использования процессов брожения для приведения в движение машин. К процессам брожения он причисляет гашение извести.

«. . . Амонтонс впервые придумал применять силу огня для приведения в движение машин. Вероятно, можно было бы также добиться каких-либо результатов при помощи различных видов брожения, как, например, при смешивании негашеной извести с водой такое брожение производит новый воздух и в то же время, нагревая его, делает воздух более упругим. В этих случаях необходимо было бы обратить внимание на то, что то же вычисление, которое мы

только что произвели для измерения результата, получающегося в результате распространения более плотного воздуха, остается в силе также для воздуха, который, хотя и не является более плотным, но более упруг. Так, например, во всех тех случаях, когда 1 куб. фут обыкновенного воздуха, вследствие увеличения теплоты, приобретает вдвое большую упругость, с его помощью можно вес в 865 фунтов поднять на высоту 1 фута, если только машина сделана очень точно». [*Б.*].

[104] (к стр. 324). Во времена Д. Бернулли паровая машина еще почти не была введена в практику. [*Н.*].

[105] (к стр. 324). Галезий (Hales, 1677—1761) — английский ученый, занимавшийся исследованием газов и вопросами кровообращения. Фамилия встречается в латинизированном виде: Галезий и Гелезий, а в русском произношении: Хельс или Гельс. [*Б.*].

[105a] (к стр. 330 и след.). Переводчик в этой части несколько сгустил краски по сравнению с автором. Переводчик пользуется двумя терминами «воздух» и «газ»: например, «сгущенный воздух», «пороховой газ», или «газ воспламененного пороха». По многим местам книги можно заключить, что Бернулли подозревает о существовании разных газов, но определенно он этого не высказывает и термином «газ» не пользуется. Он употребляет два термина: aer (воздух) u aura (собственно также воздух); он пишет, например, aura pulveris purii — воздух пороха. Я оставил в переводе слово «газ», так как мне представляется, что оно соответствует невысказанной мысли Бернулли. [*Б.*].

[106] (к стр. 339). Конец десятой части, начиная с этого места, в рукописи другой. Он любопытен с исторической точки зрения:

«Далее есть и другие причины, доказывающие, что надо считать гораздо более значительной упругую силу воспламенившегося пороха в собственном смысле, т. е. чистого и не загрязненного парами земной невоспламеняющейся материи, которая быть может составляет очень значительную часть пороха и может обусловить то, что упругую силу пороха в чистом виде надо считать в 10 или 100 раз большей. Далее надо принять во внимание то, что одно зернышко пороха занимает по сравнению со своим весом меньший объем, чем почти бесконечное число зернышек, лежащих друг на друге, по сравнению с их весом; но так как мы принимаем, что пороху, воспламенившемуся при данном объеме, соответствует тем меньшая упругость, чем больше увеличивается этот объем, и наоборот, то ясно, что удельная упругость одного воспламенившегося зернышка так относится к удельной упругости большого числа воспламенившихся зернышек, как удельный вес одного тяжелого тела к удельному весу их совокупности, рассматриваемой как единое целое. Поэтому ясно, что если эти рассуждения верны, то будет верна такая теорема.

«Если 1 куб. фут наполнить шариками, бесконечно малыми и равными друг другу, так что он будет со-

держать наибольшее возможное число шариков (а это получится, если поверхность шариков будет совершенно гладкой), и если, затем, все эти шары будут перемещены в одну твердую массу, то объем этой массы будет так относиться к объему 1 куб. фута, как $^1/_6$ окружности круга относится к стороне квадрата, вписанного в тот же круг. Отсюда следует, что упругую силу, заключенную в одном зернышке воспламенившегося пороха, надо увеличить по крайней мере на $^1/_3$ ее величины.

«Если все это обдумать надлежащим образом, то можно сделать предположение, что поражающая нас сила пороха превосходит своей упругостью обычную упругость воздуха не менее чем в 1 000 000 раз. Это соображение и побуждает меня считать, что это не сгущенный воздух, а некий эфир, упругость которого в бесконечное число раз больше упругости воздуха, как показали с большой вероятностью г-н Малебранш и мой дядя, Яков Бернулли. Если бы это был действительно воздух, то, как показывает его удельный вес, этот воздух нельзя было бы уплотнить более чем в 1000 раз по сравнению с воздухом в естественном состоянии; стоит только положить, что его упругость только в 10 000 раз больше упругости обычного воздуха, и правило § 4 покажет, что под действием бесконечно большой силы воздух не может уплотниться более чем в 1331 раз, так что в уравнении, выражающем это правило,

$$S=\frac{1}{1331}, \text{ или } \sqrt[3]{S}=\frac{1}{11},$$

а согласно этому правилу, должно было бы получиться, что воздух, скажем, в 4 раза более плотный, чем естественный, наделен в $4^1/_4$ раза большей упругостью, чем он, а это не совсем согласуется с опытами.

«Я скажу еще здесь мимоходом, что ту же эфирную материю, которая, как я считаю, заключена в порах пороха, надо, по мнению моего отца, представлять себе находящейся также и в мельчайших углубленьицах тех тел, которые обладают упругостью. Именно поэтому, когда тела под действием какой-либо посторонней силы приводятся в необычное состояние, сжимается и та материя, обладающая почти бесконечной упругостью, которая заключена в углубленьицах; сжатый эфир стремится расшириться, благодаря чему тела после прекращения действия внешней силы возвращаются в прежнее состояние. Так же можно объяснить стягивающую силу растянутых струн, равно как и все прочие явления, наблюдающиеся в твердых телах, наделенных упругостью». [*Б.*].

[[107]] (к стр. 341). Это замечание интересно в том отношении, что показывает, как в эпоху Д. Бернулли уже многие задумывались над тем, не существуют ли различные газы. [*Б.*].

[108] (к стр. 342). В рукописи к заглавию прибавлено: «а также о движении маятников, погруженных в жидкость». [*Б.*].

[109] (к стр. 342). Трактат X. Гюйгенса «Рассуждение о тяготении» («Discours sur la pésanteur»), опубликованный в 1690 г., направлен против учения о тяготении Ньютона. Рассуждения Бернулли о вихрях интересны с точки зрения исторической, так как они носят определенно картезианский, антиньютонианский характер. [*Б.*].

[110] (к стр. 342). В рукописи имеется следующее добавление:

«При этом можно поставить себе прежде всего задачи двух родов: первая — определить поверхность при различных вихрях, вторая — определить движение тел, плавающих в вихре, и происходящие с ними изменения. Сюда присоединяется еще другой вопрос, очень полезный для дела, но вряд ли поддающийся решению с геометрической строгостью, а именно: определение скоростей жидкости при различных ее расстояниях от оси вихря. Вопросы этого рода подверг рассмотрению Ньютон в «Математических началах естественной философии». [*Б.*].

[111] (к стр. 343). Конец § 2 и § 3 изложен в рукописи следующим образом:

«Но Гюйгенс показал, что центробежная сила пропорциональна квадрату скорости, разделенному на радиус круга, описываемого телом. Поэтому если обозначить скорость через v, если принять, что n — постоянное число, и если силу тяжести обозначить через g, то получится

$$dx : dy = \frac{nv^2}{y} : g.$$

«Поэтому получается

$$\frac{dy}{y} = \frac{gdx}{nv^2},$$

а это — дифференциальное уравнение для кривой, которая строится на основании шкалы скоростей, с которыми движется жидкость, находящаяся на данном расстоянии от оси, что и требовалось сделать.

«§ 3. **Пояснение.** В найденном уравнении можно вместо букв g и n подставить абсолютные числа, основываясь на следующей теореме Гюйгенса: центробежная сила тела, вращающегося со скоростью, которую оно могло бы приобрести, если бы свободно падало с высоты, равной половине радиуса, равна силе его тяжести. Примем, что высота, которая может произвести скорость капельки, равную a, равна V; тогда ее центробежная сила, обозначенная выше через $\frac{nv^2}{y}$, равна четвертой пропорциональной к $\frac{1}{2}y$, g и V, т. е. она равна $\frac{2gV}{y}$ или $nv^2 = 2gV$. Если подставить это значение в уравнение

$\frac{dy}{y}=\frac{gdx}{nv^2}$, то получается $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{2V}$, или, еще лучше, поскольку V задано через y, $dx=\frac{2Vdy}{y}$». [*Б.*].

[112] (к стр. 345). Периодические времена есть не что иное, как времена обращений. [*Н.*].

[113] (к стр. 345). Сольмон (Saulmon) — член Парижской Академии наук, умер в 1725 г.

[114] (к стр. 345). В книге отсутствует следующий текст, имеющийся в рукописи:

«Таким же образом можно также вычислить форму поверхности вихря, частицы которого испытывают притяжение не в параллельных друг другу направлениях, а во всех точках притягиваются к одной и той же точке. От решения таких вопросов зависит и вопрос о форме земли, о чем много замечательных мыслей высказали Гюйгенс и Ньютон, а после них и многие другие, так что трудно в этом деле прибавить что-нибудь, что не было бы замечено предшественниками. Если кто-либо пожелает для различных гипотез, которые каждый может сформулировать так, как подскажет ему его ум, определить форму соответствующей кривой, то для этой цели будет подходящим общее уравнение § 22 главы 1: [1]

$$\left(\frac{-ARds-RCdx}{ds}=\int Cdy\right),$$

которое может служить для всех кривых, относящихся к этому типу. Есть также соображения, побуждающие считать, что диаметр экватора земли больше ее оси. Однако опыты, поставленные парижскими академиками, повидимому, доказывают противоположное, так что все еще позволительно сомневаться, имеет ли земля форму правильного шара или нет.[2] Впрочем, трудно поставить опыты и наблюдения с такой точностью, чтобы можно было получить уверенность в этом деле. Быть может, наблюдения над параллаксом луны, правильное вычисление которого требует, чтобы была известна форма земли, приведут к решению того, имеет земля форму шара или нет, — именно если сравнить наблюдения с вычислениями, основанными на гипотезе о шарообразности земли». [*Б.*].

[115] (к стр. 348). В рукописи высказаны еще следующие соображения о взглядах Гюйгенса и Кеплера.

«Ибо таким образом соединенная центробежная сила обоих вихрей толкает тяжелые тела к центру. Довольно трудно понять, каким образом такое движение

---

[1] В рукописи счет глав иной, чем в книге. В книге это общее уравнение выведено в конце § 14 второй части.

[2] Приплюснутая форма земного эллипсоида была подтверждена градусными измерениями в Лапландии. См. в серии «Классики науки» том, посвященный знаменитому мемуару Клеро «О форме земли» (Изд. АН СССР, М.—Л., 1947).

могло бы продолжаться, и я не решился бы попросту утверждать, что дело обстоит так; но одно несомненно, что эта гипотеза с точностью удовлетворяет всем явлениям природы, относящимся к системе тяготения, притом же она проще и, если так можно выразиться, менее противоречит человеческому разуму, чем гипотеза Гюйгенса.

«Из этого и предшествующего параграфа следует, что безусловно не может существовать вихрей, уносящих тела, и это показывают и многочисленные другие соображения. Однако же от идеи Кепплера — выводить явления тяготения из центробежной силы тонкой материи, поскольку я могу судить, отказываться еще не следует». [*Б.*].

[116] (к стр. 349). В рукописи на стр. 322 и 323 имеется еще следующее поразительное место:

«Действительно, повидимому, никакое движение не пропадает: после многочисленных и почти бесконечных по числу кругооборотов тело, наконец, возвращается туда, откуда оно начало свое движение; это в некоторой степени иллюстрируется примером тел, брошенных вверх: после того как они передают все свое движение тонкой материи, создающей тяжесть materia gravifica, они снова получают ее всю назад от этой же материи. Во вселенной же не пропадает и не рождается никакое движение, — совершенно так же, как и тело не уничтожается и не возникает вновь. Когда мягкие[1] тела ударяются друг о друга, движение передается некоторой неощутимой материи и уже не возвращается в тела; в упругих же телах тонкая материя, заключенная в порах тел, ударяющихся друг о друга, получает движение и передает его вскоре же телами. Таков, повидимому, взгляд Лейбница, правильно определившего количество движения, которое должно постоянно сохраняться через квадраты скоростей, помноженные на количество материи». [*Б.*].

[117] (к стр. 350). В рукописи добавлено:

«Он[2] сросся с тяжелыми частицами значительно крепче, в силу механической причины, вытекающей из движения и материи, чем самые твердые из тех тел, которые постижимы нашими чувствами». [*Б.*].

[118] (к стр. 351). В рукописи §§ 16 и 17 этой части соответствуют 12 страниц подробного построения вихревой теории движения и применение этой теории к определению центра качания маятника, погруженного в жидкость. [*Б.*].

[119] (к стр. 351). Это есть третий закон Кеплера. [*Н.*].

[120] (к стр. 360). §§ 2 и 3 двенадцатой части в рукописи изложены следующим образом:

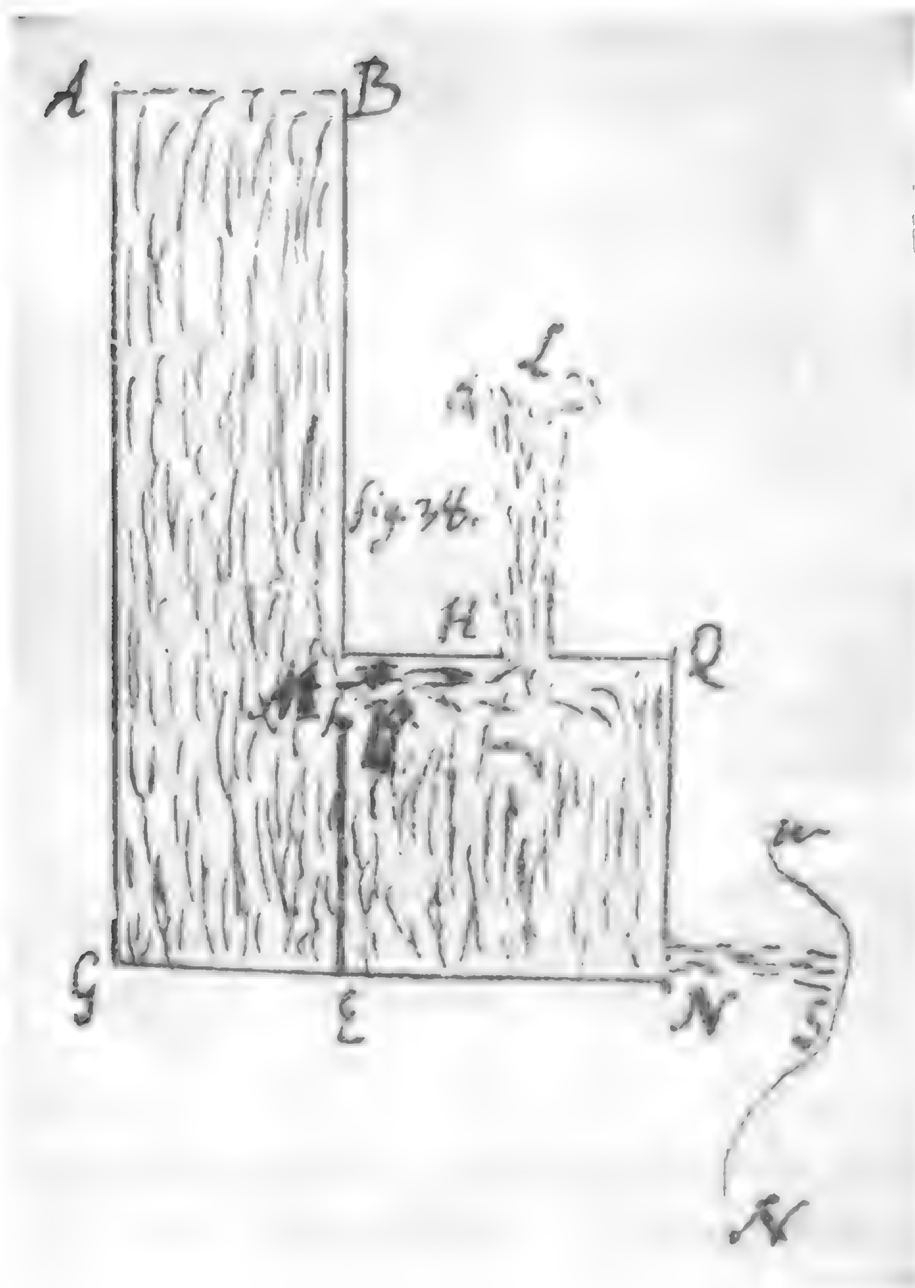
«§ 2. Особенностью этой части гидростатики является то, что здесь давление воды на стенки нельзя определить, если предварительно не определено движе-

---

[1] Т. е. неупругие.

[2] Т. е. остаток.

ние воды; уже отсюда видно, со сколькими трудностями сопряжены эти вопросы Ведь нередко случается, что самое движение воды нам неизвестно в достаточной степени. Отсюда, главным образом, и становится ясным, насколько полезна наша теория, даже если в некоторых случаях наши правила не отличаются заметным образом от обычных правил, так как моментальные изменения быстро следуют друг за другом. Однако же без помощи этой теории вообще нельзя найти законы давлений, ибо они зависят от пока еще неизвестных ускорений; поэтому не найдется никого, кто решился бы считать эту теорию чисто умозрительной и не приводящей ни к каким новым истинам в вопросах практики. Впрочем, каждый раз, как мы определяем движение воды, соответствующее двум отверстиям, уже нет ничего легче, чем вывести отсюда также и давление; в самом деле, если представить себе, что в том самом месте, для которого требуется найти давление воды, находится бесконечно малое отверстие, то уже можно понять, с какой быстротой будет вытекать вода через это отверстие и какая высота может производить эту скорость. Очевидно, пропорциональным этой же высоте и будет такое давление воды, при котором вес водяного столба такой же высоты будет равен давлению, которое выдерживает палец при затыкании отверстия. На основании этого основоположения и можно найти давление, которое выдерживает горизонтальная пластина MQ (см. фиг. 38, изъясненную в § 31 главы 6).



«§ 3. На этом чертеже следует рассматривать пластину MQ как целую и не имеющую никакого отверстия. Пусть вода из сосуда $AGEB$ перетекает в другой смежный сосуд $MENQ$ через очень малое отверстие M для того, чтобы затем вытечь через также весьма малое отверстие N. Требуется определить напор воды на горизонтальную стенку MQ. Можно ли ее определить так же, как мы определяем ее для воды, находящейся в состоянии покоя, при высоте MB? Речь может идти только о том случае, когда отверстие N можно рассматривать как в бесконечное число раз меньшее, чем другое отверстие M. Дать правильный ответ на этот вопрос нельзя раньше, чем будет определено дви-

жение воды. Для этого определения необходимо представить себе, что отверстие H чрезвычайно мало, а затем исследовать высоту HL, до которой может подняться вода, пройдя через это отверстие. Мы нашли двумя способами, что эта высота равна $\frac{a-\alpha^2 b}{1+\alpha^2}$, где $\frac{1}{\alpha}$ обозначает отношение между ширинами отверстий M и N, где a и b обозначают высоты BM и QN; поэтому высоту столба, действующую непосредственно на пластину MQ, надо считать равной $\frac{a-\alpha^2 b}{1+\alpha^2}$. Отсюда следует (на что я уже когда-то обращал внимание) возможность того, что эта пластина не будет выдерживать никакого давления, хотя высота воды MB и будет весьма большой. Действительно, это будет иметь место в том случае, когда $a=\alpha^2 b$, т. е. когда высоты BM и QN будут относиться друг к другу как квадрат ширины отверстия N к квадрату ширины отверстия M. Более того, давление может даже перейти в отрицательное, как если бы на пластину MQ был поставлен груз; это произойдет в том случае, когда отношение высоты BM к высоте QN будет меньше, чем отношение между квадратами указанных ширин» [*Б.*].

[121] (к стр. 361). В § 4 «Гидродинамики» рассматривается давление на верхнюю стенку LQ (фиг. 43), а в рукописи давление на дно EN. [*Б.*].

[122–123] (к стр. 363). В рукописи это место сформулировано так:

«Если же трубка в F имеет отверстие во всю ширину (а это имеет место, если принять $n=1$), то вода в трубке стремится достигнуть скорости большей, чем $\sqrt{a}$. Отсюда следует, что если обрубить конец FD, то вода в трубке будет ускоряться, а вследствие того, что ускорение встречает противодействие, вода подвергнется сжатию, и это сжатие выдерживается стенками трубки». [*Б.*].

[124] (к стр. 363). Заметим, что первоначально живой силой называлось количество mv^2, где m есть масса, а v есть скорость, а не количество $\frac{mv^2}{2}$. [*Н.*].

[125] (к стр. 364). Этой формулой Д. Бернулли впервые в истории науки о движении жидкости установил разницу между гидростатическим и гидродинамическим давлениями. [*Н.*].

[126] (к стр. 367). Текст в книге сильно переработан относительно текста рукописи. Так как § 9 главы XII вплотную подводит к закону Бернулли, то сообщаю соответственное место рукописи (в рукописи — § 10, следствие 4):

«§ 10. **Следствие 4.** Тем же путем можно для отдельных моментов, взятых начиная с начала истечения, определить давление воды, если в дифференциальное уравнение

$$v^2dx+\frac{2nav^2dv}{m}+2cvdv=adx,$$

выражающее движение воды, подставить вместо v скорость, которую имеет вода в тот самый момент времени и в том самом месте, в котором требуется найти дав-

ление воды. Таким путем мы определим, что высота, породившая давление, а именно *gh* или *ln*, в общем виде равна[1] $a—v^2$.

«Поэтому высота *gh* всегда равна разности между всей высотой *EB* и той высотой, до которой вода, протекающая в трубке, может подняться благодаря своей скорости; таким образом, правило, полученное в результате весьма долгого и трудного вычисления, в конце концов становится чрезвычайно простым. Следовательно, в результате становится ясным, что если заткнуть отверстие *o*, а затем открыть его, то сначала высота *gh* будет равна *BE*, а затем она уменьшится с возрастанием скорости воды, вытекающей в *o*, пока эта скорость не достигнет своего крайнего предела. Однако поверхность в *h* будет падать тем быстрее, чем короче трубка *ro*, и все это падение произойдет, с точки зрения наших ощущений, за самое короткое время, так как почти все это ускорение воды, сколько бы оно ни могло быть велико, происходит чрезвычайно быстро, исключая лишь последней недоступной чувствам частицы ускорения, которая никогда не исчерпывается до конца.

«Из этого следствия каждый без труда может предвидеть, какова самая всеобщая теория равновесия воды в каких угодно и как угодно наклоненных трубах, текущей с какой угодно скоростью. Все это мы теперь рассмотрим подробнее». [*Б.*].

[127] (к стр. 368). Слово «равномерной» в условиях задачи было в рукописи вычеркнуто, а в книге опять восстановлено. Как видно из решения, равномерность требуется только для воды, протекающей через отверстие, в основном же требуется установившееся движение. [*Б.*].

[128] (к стр. 368). Здесь Д. Бернулли указывает, что он будет рассматривать лишь установившееся движение жидкости. [*Н.*].

[129] (к стр. 369). Этим рассуждением Д. Бернулли доказывает свой знаменитый закон, согласно которому при установившемся движении жидкости давление жидкости зависит от скорости ее течения, а именно убывает с увеличением квадрата скорости. Закон Бернулли есть интеграл уравнений установившегося движения жидкости. Следует заметить, что самые уравнения движения жидкости во времена Д. Бернулли еще известны не были, и Д. Бернулли получает свой закон из энергетических соображений, а не как интеграл уравнений движения жидкости. [*Н.*].

[130] (к стр. 369). В рукописи имеется в этом месте еще следующее поучение:

«§ 12. **Поучение.** Итак, мы обладаем уже общей теорией, т. е. статикой т е к у щ е й в о д ы; если я не ошибаюсь, она оказалась чрезвычайно легкой, но тем не менее никому неизвестной. Я не сомневаюсь, что найдется много людей, которые, познакомившись с этой теорией, составят косвенные доказательства и отделаются несколькими словами, как если бы истина была ясна сама по себе. Однако я поверю им только в том случае, если они убедят меня при по-

---

[1] В книге обозначению v^2 соответствует *b*.

мощи аналитического доказательства. Разумеется, эта неожиданная простота доставила мне очень большое удовольствие, и я уже не сомневаюсь больше, что опыты, которые необходимо будет когда-либо поставить, в такой мере подтвердят все сказанное, в какой это только позволит случайная обстановка опытов, на которую было указано в § 8. Далее, так как эта гидростатика основана на законах ускорений и движений, которые мы здесь дали, то это согласие между той и другой теорией привело меня в восхищение. Но ясно, что здесь у нас речь идет о сосудах, в которых не происходит внезапного изменения в связи с их формой, как, например, в таких сосудах, о которых нельзя утверждать, что в них сохраняется п о т е н ц и а л ь н ы й п о д ъ е м. Это порождает необходимость другого определения давлений для жидкостей, которые протекают через сосуды только такого рода (таковы, например, сосуды, которые я вслед за Мариоттом рассматривал в VI главе), т. е. через такие сосуды, в которых в каждый отдельный момент поглощается частица п о т е н ц и а л ь н о г о п о д ъ е м а. О таких сосудах предоставляем судить специалисту по анализу, который должен будет прежде, чем утверждать что-либо о течении воды, изучить форму сосуда». [*Б*.].

[131] (к стр. 372). В рукописи в этом месте есть поучение, напоминающее идею гидравлического тарана.

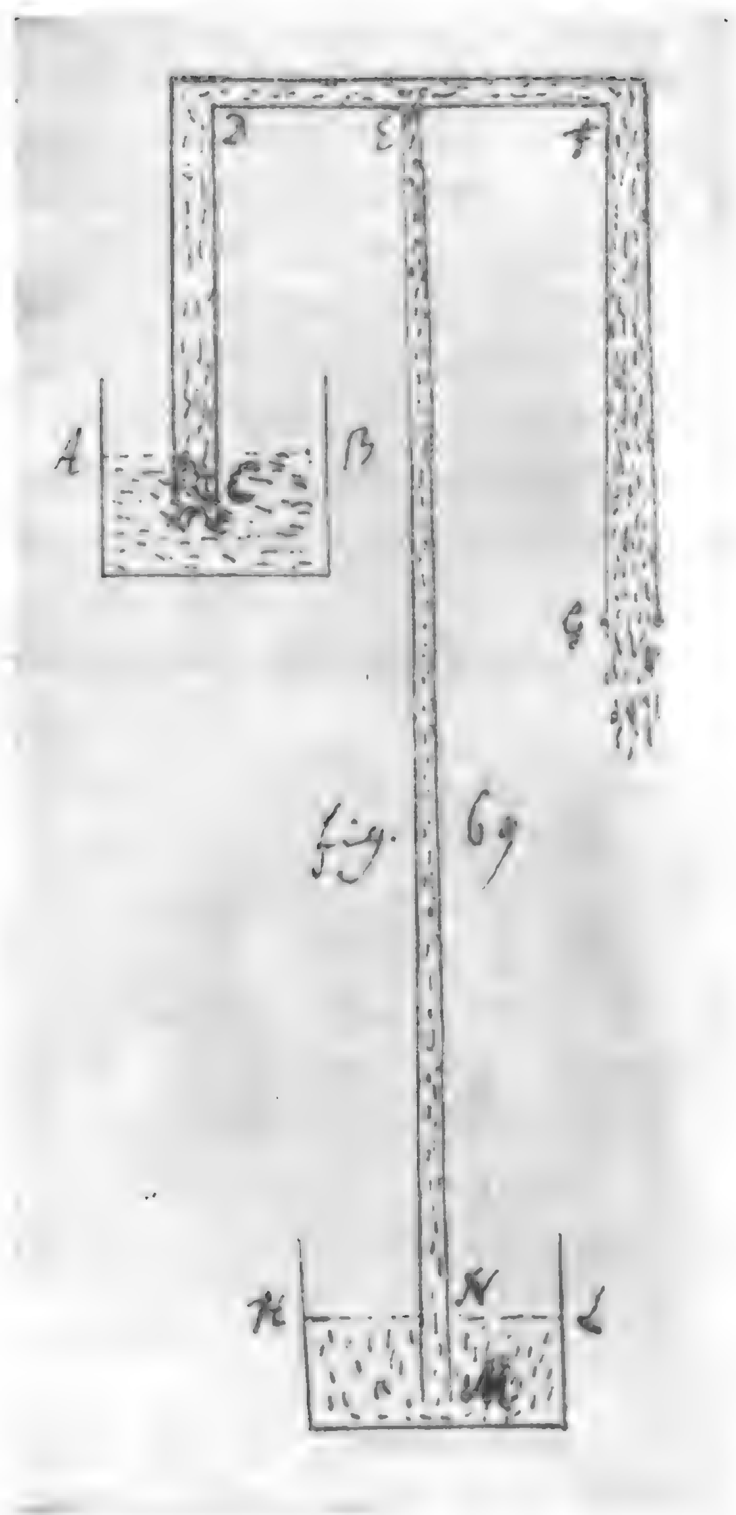
«**Поучение.** Отсюда можно вывести легкий способ либо перегнать воду, либо поднять воду из более низких мест через преграду в другое, более высокое место без приложения какой-либо силы, лишь бы только в более высоком месте вода была в количестве, достаточном для того, чтобы она текла через верхний сосуд непрерывным ручейком (что случается нередко). Но в этом случае надо следить за тем, чтобы вставленная сбоку трубка, через которую должна подниматься вода, была вставлена в самом узком и в то же время в самом высоком месте и чтобы нижнее отверстие в Σ было достаточно широким; все это, однако, должно быть ограничено определенной мерой, ибо в практике не существует ничего такого, что не имело бы своих неудобств». [*Б*.].

[132] (к стр. 374). Отсюда и до конца рукописи читаем:

«Разумеется, недостаточно того, что мы рассмотрели лишь высоту жидкости над местом ее вытекания и что мы установили ту силу, с которой частицы воды противостоят отделению или отрыванию. Действительно, эта теорема верна только для жидкостей, пребывающих в трубке в состоянии покоя, но отнюдь не позволительно распространять ее на жидкости, протекающие через эти трубки. При таких условиях было бы трудно с достаточной точностью определить то, что требуется, без предварительного изложения нашей теории. Наоборот, с ее помощью все становится само по себе ясным. Действительно, всякий сразу же убедится в том, что сила, с которой жидкости противостоят разделению, такова же, каково отрицательное давление или всасывание ее в стенки трубки: равным образом и в сжатых жидкостях каждая частица сжимается на такую величину,

которая равна давлению, которое выдерживают стенки трубки, смежные с данной частицей.

«§ 19. Согласно предыдущему замечанию, сила, противоположная разрыву жидкости, должна быть равна весу жидкого столба, основание которого — сечение трубки, а высота равна $a+v^2$, причем под a и v^2 подразумевается то же, что и в § 17 и в других параграфах, предшествующих ему. Итак, есть три причины, которые могут увеличить ту силу, о которой мы здесь говорим: 1) высота над поверхностью удаляемой воды, 2) тонкость трубки по сравнению с отверстием, через которое удаляется вода и 3) то расстояние, на которое отверстие расположено ниже резервуара. Так, если, например, на фиг. 69 высота E над AB равна 6 футам, а высота той же поверхности AB над отверстием G равна 3 футам и если в то же время мы предположим, что это отверстие в 3 раза больше, чем сечение трубки DF в E, то высота водяного столба EN, которую протекающая вода может поддерживать, будет равна 33 футам, и такую же высоту имеет столб с диаметром, равным диаметру трубки DF, вес которого, действующий в обе стороны в направлениях ED и EF, равен силе, с которой вода в E противодействует разделению. Поэтому если эта высота считается большей, чем та, которая соответствует атмосфере воздуха, то отсюда мы вправе будем заключить, что разрыву воды препятствует не только внешний воздух, но и эфир, причем окажется, что лишь незначительную роль надо отвести двум причинам этого явления, указанным выше в § 28 главы 4.



«§ 20. Если вместе с водой через отверстие C проникнет частица воздуха, этот воздух не сожмется, но расширится и будет занимать в горизонтальной трубке DF большее пространство, чем в каком угодно другом месте. Однако же в тех случаях, в которых давление воды положительно, воздух, правда, сгущается, но меньше под влиянием текущих вод, чем пребывающих в покое. Отсюда ясно, что нельзя приписывать чрезмерному сжатию воздуха то, на что было указано в § 20 главы 4, а именно то, что (как иногда случается

в бьющих фонтанах) вода на короткий миг бьет на гораздо большую высоту, чем уровень самой текущей воды, хотя каждый обязан признать, что это получается только в том случае, когда к воде, текущей по трубке, примешивается воздух. На истинную причину этого явления я указал в цитированном месте.

«§ 21. Возникает вопрос, имеет ли ветер или, вернее, воздух, гонимый ветром, большую или меньшую упругость, чем воздух, находящийся в состоянии покоя; вопрос этот важен потому, что он дает возможность судить, может ли сотрясение воздуха производить изменения в барометре. Я же утверждаю, что воздух, с какой бы равномерной быстротой он не двигался, не изменяет своей упругости, хотя движущиеся жидкости производят меньше давление, чем покоящиеся. Дело в том, что столько же упругости, сколько теряется по этой причине, прибавляется вследствие увеличения плотности, на что мы указали в § 19 главы 8.

«Чтобы доказать, что это прибавление и утрата равны между собой, представим себе вертикальный цилиндр, очень большой емкости, наполненный однородным воздухом такой высоты, чтобы давление однородного воздуха на дно было таким же, каково давление атмосферы. Как и в главе 8, обозначим эту высоту через A. Затем представим себе, что внешний воздух, окружающий сосуд, также однороден и также имеет ту же высоту A, но он менее плотный. Пусть плотности внутреннего и наружного воздуха относятся друг к другу как D к d и пусть давления в местах одинаковой высоты относятся друг к другу так же, как D к d. Наконец, представим себе, что в этот сосуд вставлена горизонтальная цилиндрическая трубка: при таких условиях понятно, что воздух ворвется через эту трубку и притом с такой скоростью, которую производит высота $\frac{D-d}{D}A$. Мы будем, следовательно, изучать этот воздух в таком движении, чтобы можно было подвергнуть рассмотрению ветер, — имеет ли он большую или меньшую упругость, чем окружающий сосуд воздух, находящийся в состоянии покоя. Итак, пусть упругость наружного воздуха равна 1, в таком случае упругость внутреннего воздуха вследствие разницы в плотностях будет равна $\frac{D}{d}$. Но этот же воздух, двигаясь со скоростью, с какой он мог бы подняться на высоту $\frac{D-d}{D}A$, теряет некоторую часть своего давления, и его давление в состоянии покоя будет так относиться к его давлению при движении с указанной скоростью, как вся высота A к разнице между высотами A и $\frac{D-d}{D}A$, т. е. как D к d. Итак, отсюда следует, что упругость воздуха, находящегося в трубке, хотя и более плотного, но находящегося в состоянии движения, и в этом случае равна 1. Значит, ветры, исключая лишь момент их возникновения, не могут вызвать изменений в барометре».

На этом рукопись обрывается, и притом в самом низу последней страницы тетради, так что можно предположить, что рукопись имела продолжение во второй тетради. [*Б*.].

[133] (к стр. 389). Таким образом, научное рассмотрение реактивной силы восходит к Ньютону. [*Н*.].

[134] (к стр. 391). Так как количество движения системы во всех случаях по предложению Бернулли остается постоянным, то импульс сил для всех рассматриваемых случаев будет иметь одно и то же значение. [*Н*.].

[135] (к стр. 394). Во всей общности предложение о таком способе определения давления жидкости на погруженные в нее двигающиеся тела было дано Эйлером. [*Н*.].

[136] (к стр. 404). Дюгамель — см. примеч. [88]. [*Б*.].

[137] (к стр. 408). Sinversus $\alpha = 1 - \cos \alpha$. [*Б*.].

[138] (к стр. 410). Здесь Д. Бернулли указывает на возможность получить поступательное движение за счет реактивной силы (см. часть первую, § 16). [*Н*.].

[139] (к стр. 418). Шазель Жан (Chazelles Jean Mathieu, 1653—1710) — профессор гидрографии в Марселе, член Парижской Академии наук. Написал исследование о разных методах пользования веслами. [*Б*.].



СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Гидродинамика, или записки о силах и движениях жидкостей

Оглавление 7
Предисловие 9
Часть первая 11
Часть вторая 35
Часть третья 54
Часть четвертая 95
Часть пятая 133
Часть шестая 161
Часть седьмая 179
Часть восьмая 203
Часть девятая 231
Часть десятая 282
Часть одиннадцатая 342
Часть двенадцатая 359
Часть тринадцатая 389

Приложения

Автобиография 427
Даниил Бернулли (1700—1782). Акад. *В. И. Смирнов* 433
Вводное примечание акад. *А. И. Некрасова* 503
Вводное примечание проф. *К. К. Баумгарта* 504
Примечания 505

Даниил Бернулли

ГИДРОДИНАМИКА, ИЛИ ЗАПИСКИ
О СИЛАХ И ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТЕЙ

Утверждено к печати
Редколлегией серии «Классики науки»
Академии наук СССР

Редактор издательства *Н. К. Зайчик*
Технический редактор *Э. Ю. Блейх*
Корректоры *Н. Ф. Виноградова* и *Л. В. Семенова*

Сдано в набор 11 июля 1958 г. Подписано
к печати 24 января 1959 г. РИСО АН
СССР № 5-103В. Формат бумаги $70 \times 92^{1}/_{16}$.
Бум. л. $17^{1}/_{4}$. Печ. л. $34^{1}/_{2} = 40{,}36$ усл. печ.
л. +1 вкл. Уч.-изд. л. 31,03+1 вкл. (0.05)
Изд. № 78. Тип.зак. № 726. Тираж 2500.
Цена 23 р. 75 к.

Ленинградское отделение Издательства
Академии наук СССР
Ленинград, В-164, Менделеевская лин. д. 1

1-я тип. Издательства Академии наук СССР
Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

Д.БЕРНУЛЛИ

ГИДРОДИНАМИКА



HYDRODYNAMICA

D.BERNOULLI



23.757